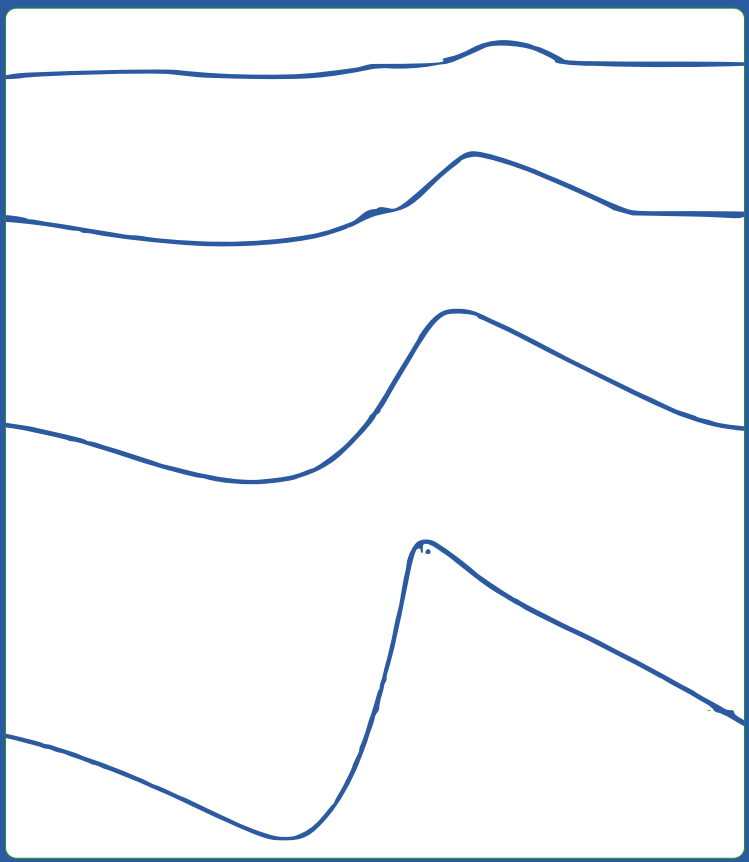
V. Maslov

MÉTHODES OPÉRATORIELLES



Éditions Mir Moscou

В. П. МАСЛОВ

ОПЕРАТОРНЫЕ МЕТОДЫ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

V. MASLOV

MÉTHODES OPÉRATORIELLES

ÉDITIONS MIR • MOSCOU

Traduit du russe
par *Djilali EMBAREK*

На французском языке

© Издательство «Наука», 1973
© traduction française, Editions Mir, 1987

TABLE DES MATIÈRES

Liste des notations 8
Avant-propos. . . . 11

INTRODUCTION AU CALCUL OPÉRATORIEL 16

§ 1. Résolution des équations différentielles ordinaires par la méthode opératorielle de Heaviside 16
§ 2. Equations aux différences 22
§ 3. Intégration des systèmes d'équations différentielles par la méthode de Heaviside 24
§ 4. Algèbre des séries entières convergentes d'opérateurs non commutables 27
§ 5. Spectre d'un couple d'opérateurs ordonnés 40
§ 6. Algèbres munies de μ-structures 44
§ 7. Exemple d'application des méthodes opératorielles à la construction de la solution exacte d'une équation différentielle 67
§ 8. Passage à la limite de l'équation des oscillations du réseau cristallin à l'équation des ondes 72
§ 9. Quasi-inversibilité d'un opérateur et énoncé du théorème fondamental 115

Chapitre I. ESPACES ABSTRAITS 162

§ 1. Systemes algébriques 162
§ 2. Espaces de Banach 166
§ 3. Espacès hilbertiens 172
§ 4. Fonctionnelles linéaires et espaces duaux. 180
§ 5. Opérateurs linéaires. 185
§ 6. Opérateurs adjoints 196
§ 7. Fonctions à valeurs dans un espace de Banach 202
§ 8. Analyse dans un espace de Banach 206
§ 9. Algèbres normées et de Banach 210

Chapitre II. ESPACES FONCTIONNELS. 213

§ 1. Espaces de Sobolev 213
§ 2. Dualité des espaces de Sobolev. 217
§ 3. Quelques espaces de fonctions continues et les espaces qui leur sont rattachés. 222
§ 4. Théorèmes d'immersion 226
§ 5. La fonction de Dirac δ_ξ dans les espaces de Sobolev . 233
§ 6. Fonctions différentiables dans les espaces de Sobolev . . 236

Chapitre III. FONCTIONS D'OPÉRATEURS RÉGULIERS 244

§ 1. Algèbre de fonctions d'un générateur 246
§ 2. Extension de la classe des symboles admissibles 260
§ 3. Homomorphisme des formules asymptotiques. Méthode de phase stationnaire 267
§ 4. Fonctions de l'opérateur de dérivation. Opérateur de Hilbert. 275
§ 5. Spectre d'un générateur 283
§ 6. Quelques propriétés du générateur 287
§ 7. Opérateurs hermitiens 300
§ 8. Opérateurs réguliers 307
§ 9. Distributions propres et associées 312
§ 10. Opérateurs hermitiens comme transformateurs dans l'espace de Hilbert-Schmidt 317

Chapitre IV. CALCUL DES OPÉRATEURS NON COMMUTABLES 322

§ 1. Définitions préliminaires 322
§ 2. Fonctions de deux opérateurs hermitiens non commutables 335
§ 3. Fonctions d'opérateurs non commutables 338
§ 4. Spectre d'un opérateur vectoriel 342
§ 5. Fonctions de deux ensembles générateurs 345
§ 6. Opérateurs pseudo-différentiels 351
§ 7. Exemples 358
§ 8. Dérivation de fonctions d'un opérateur dépendant d'un paramètre 366
§ 9. Formules de commutation 378
§ 10. Symboles croissants 383
§ 11. Spectre quotient 386
§ 12. Symboles à valeurs opératorielles 387
§ 13. Fonctions de générateurs d'une algèbre de Lie nilpotente et leurs représentations 392

Chapitre V. *T*-PRODUIT D'OPÉRATEURS HYPOELLIPTIQUES ET DÉCOMPOSITION SPECTRALE D'UN *T*-PRODUIT 398

§ 1. Théorème d'existence et d'unicité du symbole d'un opérateur 399
§ 2. Conditions suffisantes d'existence du *T*-produit d'opérateurs hypoelliptiques 420
§ 3. Suppression des crochets autonomes 437
§ 4. *T*-produit d'opérateurs dans la représentation de l'interaction ... 444
§ 5. Décomposition spectrale du *T*-produit 454

Chapitre VI. ÉQUATION DE HAMILTON-JACOBI GÉNÉRALISÉE 480

§ 1. Equations de Hamilton-Jacobi à dissipation 481
§ 2. Variété lagrangienne à germe complexe 484
§ 3. γ-atlas et inégalité de dissipation 496
§ 4. Intégration de l'équation de Hamilton-Jacobi à dissipation .. 502
§ 5. Invariance de l'inégalité de dissipation et contournement du foyer 509
§ 6. Intégration de l'équation de transport à dissipation 522

Chapitre VII. OPÉRATEUR CANONIQUE SUR UNE VARIÉTÉ LAGRANGIENNE À GERME COMPLEXE ET DÉMONSTRATION DU THÉORÈME FONDAMENTAL 539

§ 1. Opération quantique de contournement des foyers 539
§ 2. Formules de commutation du hamiltonien à l'exponentielle complexe 558
§ 3. Variétés *C*-lagrangiennes et indice d'un germe 569

§ 4. Opérateur canonique 584
§ 5. Démonstration du théorème fondamental 595
§ 6. Problème de Cauchy pour systèmes à caractéristiques complexes 613
§ 7. Quasi-inversibilité des opérateurs à symboles matriciels 628

Chapitre VIII. THÉORIE DES ÉQUATIONS LINÉAIRES SUR DES SEMI-MODULES 652

§ 1. Exemples d'équations linéaires sur des semi-modules 652
§ 2. Métrique et structure sur un semi-anneau 656
§ 3. Additivité de semi-groupe des mesures idempotentes 664
§ 4. Prolongement maximal d'une mesure idempotente 677
§ 5. Intégration idempotente des fonctions mesurables et semi-mesurables . . 681
§ 6. Mesures idempotentes et fonctionnelles à valeurs dans un semi-anneau 687
§ 7. Transformation de Fourier-Legendre 693
§ 8. Principe de Duhamel 694
§ 9. Alternative de Fredholm 700
§ 10. Equation de Bellman 701

Index alphabétique des matières 704

LISTE DES NOTATIONS

$\mathbf{R}^n$, $\mathbf{C}^n$ espaces réel et complexe à n dimensions

δ, $\delta/\delta x$ dérivée aux différences

$[\![\ldots]\!]$ crochet autonome

$[\ldots, \ldots]$ commutateur

$[\ldots, \ldots]_k \stackrel{\text{déf}}{=} [\![\ldots, \ldots]\!]_k$

$[\ldots, \ldots]_{jk}$ crochet de Lagrange

$\|\ldots\|_{\text{int}}$ norme sur l'espace B_{int}

$\langle a, b\rangle \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^{h} a_i b_i$

$f * g$ produit de convolution des fonctions f et g

δ_{ij} symbole de Kronecker

g_H^t transformation canonique associée au hamiltonien H

$g_{H+i\tilde{H}}^t$ transformation canonique complexe

$\mathscr{K}^{1/h}$ opérateur canonique associé au paramètre $h \to 0$

$E_\lambda(\Delta)$, $E'_\lambda(\Delta)$ projecteurs orthogonaux associés à l'intervalle Δ

$U_A(t)$ groupe d'homomorphismes engendré par l'opérateur A

$T\varphi\left(\overset{3}{A}_2, \overset{1}{A}_1\right)$ fonction de trois opérateurs ordonnés

$\square_c \stackrel{\text{déf}}{=} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2(x)\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ opérateur des ondes

$\Delta \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{j=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2 j}$ opérateur de Laplace

$\left(\dfrac{\partial}{\partial \alpha}\right)^{\nu} \equiv \dfrac{\partial^{|\nu|}}{\partial \alpha^{\nu}} \stackrel{\text{déf}}{=} \dfrac{\partial^{\nu_1 + \ldots + \nu_n}}{\partial \alpha_1^{\nu_1} \ldots \partial \alpha_n^{\nu_n}}$, où $\nu = (\nu_1 \ldots \nu_n)$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} \overset{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} \\ \cdots\cdots\cdots & & \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ matrice de Jacobi

A^* conjuguée de la matrice A

${}^tA$, A^t transposée de la matrice A

${}^tA^{-1} \overset{\text{déf}}{=} (A^{-1})^t$

$(x_1, \ldots, x_n)^t$, ${}^t(x_1, \ldots, x_n)$ vecteur colonne

$L_2(\Omega)$ espace des fonctions de carré intégrable sur $\Omega \subset \mathbf{R}^n$

$\mathscr{B}_{s_1, \ldots, s_N}(\mathbf{R}^{n_1} \times \ldots \times \mathbf{R}^{n_N})$ algèbre de Banach des symboles

S espace des fonctions dérivables décroissant rapidement

$W_2^k(\mathbf{R}^n)$ espace de Sobolev

$\tilde{\tilde{W}}_2^k(\mathbf{R}^n)$ image de l'espace de Sobolev par la transformation de Fourier

$C_l^k(\mathbf{R}^n)$ espace des fonctions k fois continûment dérivables de norme finie

$$\|\varphi\|_{C_l^k} = \sup \sum_{|\gamma|=0}^{k} (1+|x|)^l \left| \frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial x^\gamma} \varphi(x) \right|$$

H_l^k complété de l'espace S pour la norme

$$\|\varphi\|_{H_l^k} = \left\| (1+|x|^2)^{l/2} \left(1 + \left|\frac{\partial}{\partial x}\right|^2\right)^{k/2} \varphi \right\|_{L_2}$$

M_N espace vectoriel engendré par les fonctions e^{ikx}, $k = 0, \pm 1, \ldots, \pm N$; $x \in \mathbf{R}$

$C_{h,t}^{(s)}$ espace des fonctions φ 2π-périodiques en x, s fois continûment dérivables par rapport à x, $t \in \mathbf{R}$, telles que

$$\sup_{0<h<1} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\partial^k \varphi(x, t; h)}{\partial x^k} \right|^2 dx \leqslant C_k < \infty, \qquad k = 0, 1, \ldots, s$$

$\mathscr{S}$ espace des symboles d'une μ-structure sur une algèbre

$C_{\mathscr{L}}^{\infty}(\mathbf{R}^n \times M^m)$ espace des symboles d'une μ-structure sur un module $\mathscr{L}$

$O_{\mathscr{L}}(|x|^{-N})$ fonction de classe $C^{\infty}_{\mathscr{L}}(\mathbf{R}^n \times M^m)$ pour laquelle

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^{\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\gamma} O_{\mathscr{L}}(|x|^{-N})\right| \leqslant C_{\nu',\,\gamma}|x|^{-N+2|\nu|}, \quad |\nu|, |\gamma| = 0, 1, 2, \ldots$$

$O_D(h^k)$ fonction dérivable sur $\mathbf{R}^n$ telle que

$$\left|e^{-D(x)/h}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\gamma} O_D(h^k)\right| \leqslant C_{k,\,\gamma} h^{k-|\gamma|/2} \quad \text{pour} \quad k \geqslant \frac{|\gamma|}{2}$$

$t \downarrow \tau$ t tend vers $\tau < t$

$t \uparrow \tau$ t tend vers $\tau > t$

AVANT-PROPOS

Les méthodes opératorielles sont des méthodes qui permettent de ramener des équations différentielles à des équations algébriques. D'où l'intérêt particulier qu'elles présentent pour les mathématiciens appliqués.

Cet ouvrage est consacré à une méthode opératorielle assez générale qui englobe de nombreuses méthodes opératorielles connues et qui permet de résoudre d'un même point de vue aussi bien les problèmes classiques d'équations différentielles aux dérivées partielles que des problèmes nouveaux de physique mathématique, y compris des problèmes faisant intervenir les équations non linéaires aux dérivées partielles.

Nous passerons à l'exposition de cette méthode générale après avoir préalablement étudié le calcul opératoriel (essentiellement les opérateurs autoadjoints) inspiré par la méthode de Heaviside.

Le théorème fondamental relève de la théorie des opérateurs et sera prouvé au dernier chapitre bien que son énoncé figure dans l'Introduction. Ce théorème peut déboucher, en particulier, sur les théorèmes d'existence et d'unicité des solutions des équations hyperboliques, elliptiques et paraboliques à coefficients variables et ramener ces dernières à des équations intégrales du deuxième ordre à noyaux différentiables, c'est-à-dire fournir une solution réelle de ces équations. On entend par là qu'en dégageant la partie non différentiable (ou rapidement oscillante) de la solution, on peut ramener *ipso facto* le problème à un problème facilement résoluble sur ordinateur. La comparaison de la partie rapidement oscillante avec la solution exacte, conduite à l'aide de l'expérience numérique pour la dimension un dans le § 8 de l'Introduction, met en évidence leur bonne coïncidence. Mais l'ordinateur est impuissant à réaliser cette expérience même en dimension deux à cause du grand nombre d'opérations. Dans ce cas le seul recours est de trouver une représentation asymptotique convenable et de ramener le problème primitif à une équation intégrale. Donc la solution approchée construite dans le théorème fondamental est dans un certain sens le complément naturel de l'ordinateur: ensemble ils donnent la solution numérique.

Cet ouvrage doit en principe être accessible aux étudiants de fin du second cycle des facultés de mathématiques et de physique et de mathématiques appliquées en ce sens qu'il n'implique que les connaissances

d'Analyse classique. Les notions de groupe, d'anneaux, d'algèbre, les éléments d'analyse fonctionnelle (chapitre I), la théorie des distributions et des espaces de Sobolev (chapitre II), la théorie des équations différentielles linéaires et des équations aux différences (§§ 1, 2, 3 de l'Introduction) et des équations différentielles non linéaires (§ 8 chapitre I), la théorie des équations non linéaires du premier ordre aux dérivées partielles (chapitre VI) sont développés dans la mesure nécessaire à l'appréhension de cet ouvrage.

La lecture de ces passages n'est pas superflue même pour ceux qui sont familiers avec ces notions dans la mesure où leur exposé rompt parfois avec la tradition et est appelé à servir de référence. Le lecteur qui aura digéré cet ouvrage sera à même de promouvoir ses propres recherches en théorie des équations différentielles linéaires et non linéaires et des équations différentielles-fonctionnelles aux dérivées partielles. D'autre part, l'analyse des problèmes abordés peut servir de tremplin à l'étude sous un certain angle de la théorie des représentations, de la topologie et de la théorie des faisceaux. S'agissant des applications des méthodes décrites à la physique, elles ne sont visiblement pas épuisées par les exemples exhibés dans cet ouvrage. On les retrouve aussi dans la représentation asymptotique des solutions dans la théorie de bande du solide, la collision des molécules, la théorie des résonateurs laser, les équations d'une réaction en chaîne en chimie, les problèmes de réfraction et de diffraction, la déduction d'équations intégrales de type Lippmann-Schwinger et Faddéev, le calcul des corrections quasi classiques des équations de Thomas-Fermi, des corrections des équations du plasma électronique, les équations de Hartree en optique électronique, ainsi que dans une foule d'autres problèmes de physique mathématique moderne.

Cet ouvrage est conçu pour toucher le plus grand nombre possible de lecteurs. Sa lecture peut être abordée de deux manières. Le lecteur qui voudrait éviter les fines estimations et les passages à la limite et maîtriser les techniques asymptotiques peut sauter la partie consacrée à l'analyse fonctionnelle. La conception de cet ouvrage permet d'assimiler le calcul opératoriel en passant directement à l'étude des méthodes de réduction des problèmes à une équation intégrale et de mise en évidence de la partie non différentiable de la solution (chap. V).

Le lecteur désireux d'étudier les méthodes opératorielles progressivement et en profondeur devrait commencer par le chapitre I et n'attaquer l'Introduction qu'après le chapitre IV.

Mais le moyen le plus efficace de posséder cette matière est de commencer par l'Introduction et de lire successivement chaque chapitre.

Nous tenons à avertir le lecteur que ces procédés ne sont pas simples dans la mesure où nous développons un nouveau calcul opératoriel: *le calcul des opérateurs ordonnés*.

Cet ouvrage a son origine dans les leçons lues par l'auteur durant trois ans à la faculté de mathématiques appliquées de l'Institut de construction de machines électroniques de Moscou aux élèves de troisième, quatrième et

cinquième années, ainsi qu'aux élèves de cinquième année de la faculté de physique de l'Université d'Etat de Moscou.

L'expérience acquise dans la lecture de ce cours a montré contre toute attente que le calcul opératoriel, s'il était accompagné de la résolution de quelques exercices, s'assimilait plus aisément même que les problèmes relevant de la traditionnelle analyse fonctionnelle, les estimations fines, les espaces fonctionnels et les passages aux limites.

Si l'on établit un parallèle entre l'Introduction (colonne de droite) et un cours hypothétique de calcul différentiel (colonne de gauche), on obtient le schéma suivant.

§§ 1, 2, 3. Anneau des polynômes.	§§ 1, 2, 3. Méthode de Heaviside. Calcul des opérateurs à coefficients constants.
§§ 4, 5. Règles de dérivation formelle des polynômes. Formules de dérivation des polynômes: formules de dérivation du produit, d'une fonction composée, développement en série de Taylor.	§§ 4, 5. Règles du nouveau calcul opératoriel sur l'exemple de séries entières formelles d'opérateurs ordonnés. Formules de commutation des séries. Formules pour une fonction composée. Développement en série de Newton.
§ 6. Système d'axiomes. Formules de dérivation de fonctions quelconques sous forme de théorèmes.	§ 6. Système d'axiomes. Calcul opératoriel de fonctions quelconques d'opérateurs ordonnés sous forme de théorèmes.
§ 7. Exemple simple.	§ 7. Exemple simple.
§ 8. Application des formules de dérivation à la déduction d'une nouvelle solution d'un problème classique de physique.	§ 8. Application du calcul opératoriel à l'obtention de nouveaux effets physiques lors de l'étude du problème classique de déduction de l'équation des ondes à partir des équations des oscillations du réseau cristallin.
§ 9. Equation différentielle élémentaire. Notion fondamentale de polynôme caractéristique. Interprétation physique des conditions initiales. Théorème fondamental d'existence. Formule d'intégration dans un cas particulier.	§ 9. Problème fondamental. Notion fondamentale de caractéristiques pour une fonction d'un ensemble ordonné d'opérateurs. Interprétation physique des conditions d'absorption. Théorème fondamental et formule explicite de la solution du problème fondamental dans un cas particulier (la formule générale est exhibée dans le dernier chapitre).

Le chapitre I est consacré à l'analyse fonctionnelle traditionnelle, de plus on développe progressivement le concept de «complétion» par des

limites de même que dans la théorie de Cantor les nombres réels sont les complétés de suites de nombres rationnels. Ceci nous permet de nous passer totalement de la théorie de la mesure (notamment de la mesure de Lebesgue). La théorie des fonctions est bâtie sous cet angle au chapitre II et cette approche rejoint celle des physiciens qui conçoivent la fonction de Dirac comme la limite de fonctions en cloche.

Le chapitre III traite du calcul des fonctions d'un paramètre. On y introduit les notions d'opérateurs générateur et régulier qui généralisent celles des opérateurs hermitien et normal. Pour les opérateurs réguliers on prouve un théorème mettant en évidence la communauté de leurs propriétés dans le cas d'un spectre discret: la régularité d'un opérateur est une condition nécessaire et suffisante de complétude de ses éléments propres et associés. On en déduit ensuite le calcul classique des opérateurs hermitiens.

Au chapitre IV, on étudie en détail le calcul des fonctions de deux opérateurs ordonnés non commutables, leur spectre commun et leur décomposition spectrale. On se penche ensuite sur les fonctions de plusieurs opérateurs réguliers pour lesquelles on établit les formules déduites axiomatiquement dans l'Introduction. Ce faisant, on construit le calcul des opérateurs non commutables sur une base fonctionnelle.

Au chapitre V, on développe le T-produit des opérateurs hypoelliptiques et sa décomposition spectrale. La suite de l'ouvrage est consacrée au développement de la théorie des opérateurs canoniques et à son application à la démonstration du théorème fondamental.

Le chapitre VI mérite qu'on s'y arrête. Il est nécessaire pour parachever la construction de l'opérateur canonique complexe, mais n'est en aucune façon lié à la technique des opérateurs ordonnés. Sa lecture peut être entamée d'entrée de jeu. Ce chapitre est consacré à la résolution d'équations généralisant celles de Hamilton-Jacobi. On y introduit la notion de variété lagrangienne à germe complexe pour interpréter géométriquement les solutions de ces équations.

On pourrait proposer l'analogie suivante. Le jet d'une pierre dans une mare fait apparaître des ondes qui se propagent en cercles. La réflexion de ces ondes donne naissance à un phénomène qu'il est très difficile d'interpréter géométriquement. De même l'équation de Hamilton-Jacobi (une solution particulière de cette équation donnera précisément ces cercles) admet une solution simple et dérivable pour les t inférieurs à un certain t_1. Pour $t > t_1$ on assiste à une superposition des ondes réfléchies plusieurs fois. Pour comprendre les fonctions à plusieurs déterminations, il faut procéder à une uniformisation du genre de celle effectuée à l'aide des feuilles de Riemann pour les fonctions analytiques présentant des points de branchement. Or justement la construction d'un objet dans l'espace des phases d'une variété lagrangienne à germe complexe permet de «démêler» les solutions à plusieurs déterminations des équations de type Hamilton-Jacobi (avec absorption). La notion d'«indice» – d'un nombre entier permet en quelque sorte de numéroter ces solutions (feuilles) sur une variété lagrangienne à germe complexe.

Par ailleurs, les indices des chemins fermés sur une variété lagrangienne à germe complexe sont une importante caractéristique de cet objet (sa classe caractéristique).

Au chapitre VII, on construit l'opérateur canonique complexe et on prouve le théorème fondamental.

Les recherches effectuées ont été inspirées par la remarque suivante de R. Feynman *): les opérateurs deviennent commutables si l'on indique leur ordre d'action.

La théorie des variétés lagrangiennes à germe complexe a vu le jour après les travaux de J. Leray sur le problème de Cauchy.

Cet ouvrage n'aurait jamais vu le jour sans le dévouement de mes élèves qui ont recopié les cours et préparé le manuscrit. Les chapitres I à IV ont été rédigés avec le concours de V. Doubnov et E. Vorobiev, les chapitres V à VII, de V. Danilov et M. Karassev, le chapitre VII, de V. Bélavkine et A. Tchébotariev. Les calculs du §4, chap. VI, ont été réalisés par A. Proudkovski. Les remarques judicieuses de A. Kirillov, les consultations de A. Samarski, les discussions avec D. Anossov et V. Koutcherenko et les conseils de P. Mossolov et E. Gorine sur le manuscrit m'ont été d'une très grande utilité. A. Davtian a assumé l'ingrate tâche de préparer cet ouvrage à la traduction en français.

A toutes ces personnes je voudrais exprimer ma profonde gratitude.

V. Maslov

*) Dans l'article Operational calculus relating to quantum electrodynamics. Phys. Rev., 84, 1951.

INTRODUCTION AU CALCUL OPÉRATORIEL

§ 1. Résolution des équations différentielles ordinaires par la méthode opératorielle de Heaviside

Désignons par $C^\infty(\mathbf{R})$ (ou simplement C^∞) l'ensemble des fonctions indéfiniment différentiables $\varphi(x)$, $x\in]-\infty, \infty[$. Nous définissons sur C^∞ une *opération* (un *opérateur*) *de dérivation* d/dx désignée par D:

$$D\varphi(x)=\frac{d}{dx}\varphi(x)=\varphi'(x).$$

Il est évident que pour tout polynôme $P_n(x)$ est défini un opérateur $P_n(D): C^\infty \to C^\infty$ de la forme

$$P_n(D)=\sum_{i=0}^{n} a_i D^i, \qquad a_i D^0 = a_i,$$

où a_i, $i=0, 1, \ldots, n$, sont des nombres complexes. Autrement dit,

$$P_n(D)\,\varphi(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi^{(i)}(x), \qquad \varphi^{(0)}=\varphi.$$

Notons $K_1[D]$ l'ensemble des opérateurs de la forme $P_n(D)$; pour tout couple d'éléments de $K_1[D]$ sont définis la somme et le produit de ces éléments:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i D^i + \sum_{i=0}^{n} b_i D^i = \sum_{i=0}^{n} (a_i+b_i) D^i.$$

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i D^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m} b_j D^j\right) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_i b_j D^{i+j}.$$

Appelons $K_1[x]$ l'ensemble des polynômes sur le corps des complexes:

$$P_n \in K_1[x], \qquad P_n(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i.$$

A chaque polynôme $P_n \in K_1[x]$ on peut associer biunivoquement un opérateur $P_n(D)\in K_1[D]$, $P_n(D)=a_0+a_1 D+\ldots+a_n D^n$. (Pour prouver la biunivocité, il suffit de montrer que si $\sum_{n=0}^{N} a_n f^{(n)}(x)\equiv 0$ pour tous les

$f \in C^\infty$, alors $a_n \equiv 0$. Ceci est évident.) Le polynôme $P(x)$ associé à l'opérateur $P(D)$ sera appelé *symbole de l'opérateur* $P(D)$. Cette correspondance envoie la somme et le produit de deux polynômes dans la somme et le produit des opérateurs correspondants. On dira alors que $K_1[x]$ et $K_1[D]$ sont *isomorphes*.

Le théorème fondamental de l'algèbre nous dit que tout polynôme $P_n(x) \in K_1[x]$ peut être mis sous la forme

$$P_n(x) = a_n \prod_{i=1}^{m} (x-\alpha_i)^{k_i}, \qquad \sum_{i=1}^{m} k_i = n, \tag{1.1}$$

où α_i sont ses racines complexes, k_i les multiplicités respectives de ces racines. Les ensembles $K_1[x]$ et $K_1[D]$ étant isomorphes, tout opérateur $P_n(D)$ est justiciable de la représentation

$$P_n(D) = a_n \prod_{i=1}^{m} (D-\alpha_i)^{k_i}, \tag{1.2}$$

où α_i est l'opération (l'opérateur) de multiplication par la constante α_i.

Intégrons maintenant une équation différentielle ordinaire à coefficients constants:

$$P_n(D)\, y(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(x) = f(x), \qquad f \in C^\infty. \tag{1.3}$$

Supposons pour simplifier que toutes les racines α_i du polynôme $P_n(x)$ sont simples. L'équation (1.3) peut alors être mise sous la forme:

$$\prod_{i=1}^{n} (D-\alpha_i)\, y(x) = f(x)/a_n.$$

Pour intégrer l'équation (1.3) nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 1.1. *Soit* $P_n(D) \in K_1[D]$, $f \in C^\infty$. *Alors*

$$P_n(D)\, e^{\alpha x} f(x) = e^{\alpha x} P_n(D+\alpha) f(x). \tag{1.4}$$

Prouvons ce lemme par récurrence. Calculons $De^{\alpha x} f(x)$:

$$De^{\alpha x} f(x) = \alpha e^{\alpha x} f(x) + e^{\alpha x} f'(x) = e^{\alpha x}(\alpha f(x) + f'(x)) = e^{\alpha x}(D+\alpha) f(x).$$

Supposons maintenant que la formule (1.4) est vraie pour l'opérateur D^{n-1} et montrons qu'elle l'est pour l'opérateur D^n. On a $D^n e^{\alpha x} f(x) = D[D^{n-1} e^{\alpha x} f(x)] = DF(x)$, où $F(x) = D^{n-1} e^{\alpha x} f(x)$. D'après l'hypothèse de récurrence, $D^{n-1} e^{\alpha x} f(x) = e^{\alpha x}(D+\alpha)^{n-1} f(x)$. On a par ailleurs

$$\begin{aligned} DF(x) &= De^{\alpha x}[(D+\alpha)^{n-1} f(x)] = \\ &= \alpha e^{\alpha x}[(D+\alpha)^{n-1} f(x)] + e^{\alpha x} D[(D+\alpha)^{n-1} f(x)] = \\ &= e^{\alpha x}(D+\alpha)^n f(x). \end{aligned}$$

Donc, pour tout entier m

$$D^m e^{\alpha x} f(x) = e^{\alpha x} (D+\alpha)^m f(x). \tag{1.5}$$

L'égalité (1.5) entraîne immédiatement (1.4). C.Q.F.D.

Considérons maintenant l'équation

$$(D-\alpha)\, y(x) = f(x), \quad f \in C^\infty. \tag{1.6}$$

En appliquant le lemme, on obtient

$$(D-\alpha)\, y(x) = (D-\alpha)\, e^{\alpha x} e^{-\alpha x}\, y(x) = e^{\alpha x} D e^{-\alpha x}\, y(x).$$

Donc, l'équation (1.6) équivaut à l'équation

$$D e^{-\alpha x}\, y(x) = f(x) e^{-\alpha x}. \tag{1 6'}$$

On sait que la solution générale de l'équation $Dy(x) = f(x)$ est $y(x) = \int f(x)\, dx + C$, où C est une constante. Posons

$$\int f(x)\, dx + C = \frac{1}{D} f.(x). \tag{1.7}$$

A noter que $1/D$ envoie un élément $f \in C^\infty$ dans une classe tout entière de fonctions $\frac{1}{D} f \subset C^\infty$; si $y_0 \in \frac{1}{D} f$, alors $z \in \frac{1}{D} f$ si et seulement si $z - y_0 = \text{const}$.

La solution de l'équation (1.6) (et (1.6')) peut maintenant être mise sous la forme

$$y = e^{\alpha x} \frac{1}{D} e^{-\alpha x} f(x). \tag{1.8}$$

Revenons à l'équation (1.3). On a

$$P_n(D)\, y(x) = a_n \prod_{i=1}^{n} (D-\alpha_i)\, y(x) = a_n (D-\alpha_1) \prod_{i=2}^{n} (D-\alpha_i)\, y(x) =$$

$$= \alpha_n e^{\alpha_1 x} D e^{-\alpha_1 x} \prod_{i=2}^{n} (D-\alpha_i)\, y(x) = \ldots$$

$$\ldots = a_n e^{\alpha_1 x} D e^{-\alpha_1 x} \ldots e^{\alpha_n x} D e^{-\alpha_n x}\, y(x) = f(x).$$

En appliquant successivement (1.8), on obtient la formule

$$y = e^{\alpha_n x} \frac{1}{D} e^{-\alpha_n x} \ldots e^{\alpha_1 x} \frac{1}{D} e^{-\alpha_1 x} \frac{f(x)}{a_n} \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{P_n(D)} f(x). \tag{1.9}$$

Nous avons obtenu une formule exprimant la solution de l'équation (1.3) en fonction des intégrales du second membre. Donc, l'existence de la solution est acquise. On s'assure immédiatement que la réponse ne dépend pas de l'ordre de numérotation des racines $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ du polynôme $P_n(x)$.

Dans la forme d'écriture adoptée, on voit que la solution générale de l'équation (1.3) définie par (1.9) dépend au plus de n constantes (en fait, exactement de n constantes).

La formule (1.9) définit une application d'un élément $f \in C^\infty$ dans une classe de fonctions. Si l'équation $P_n(x)=0$ admet des racines simples $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, la différence de deux éléments de cette classe est de la forme $c_1 e^{\alpha_1 x}+c_2 e^{\alpha_2 x}+\ldots+c_n e^{\alpha_n x}$, où $c_1, \ldots, c_n$ sont des constantes. La formule (1.9) est valable, de par la manière dont elle a été établie, pour le cas de racines multiples: la différence de deux éléments est alors de la forme

$$P_1(x)\, e^{\alpha_1 x}+P_2(x)\, e^{\alpha_2 x}+\ldots+P_m(x)\, e^{\alpha_m x},$$

où $P_1, P_2, \ldots, P_m$ sont des polynômes convenables.

On désignera par $1/P_n(D)$ l'application (ou l'opérateur) obtenue.

Montrons que pour que l'équation (1.3) admette une solution unique, il suffit de se donner les conditions initiales:

$$y(0)=c_0, \ \ldots, \ y^{(n-1)}(0)=c_{n-1}. \tag{1.10}$$

A cet effet, il suffit de montrer que le problème

$$P_n(D)\, y(x)=0, \tag{1.11}$$

$$y(0)=0, \ \ldots, \ y^{(n-1)}(0)=0 \tag{1.12}$$

admet une seule solution $y(x)\equiv 0$. On remarquera que le problème $(D-\alpha)\, y(x)=0$, $y(0)=0$ admet une seule solution $y(x)\equiv 0$. Transformons maintenant l'équation (1.11):

$$P_n(D)\, y(x)=\prod_i (D-\alpha_i)^{k_i} y(x)=(D-\alpha_1)\, W(x)=0.$$

Il est évident que $W(x)$ est combinaison linéaire des dérivées de la fonction $y(x)$ d'ordre $\leqslant n-1$. Donc, en vertu de la condition (1.12), $W(0)=0$ et, par suite, $W(x)\equiv 0$. Il est clair qu'en poursuivant cette procédure, on obtient $y(x)\equiv 0$.

Exhibons encore une méthode de calcul de la classe des fonctions $\dfrac{1}{P_n(D)} f$ utilisant un prolongement de l'application $K_1[x] \to K_1[D]$ au corps des fonctions rationnelles de x.

Soit $R(x)=P(x)/Q(x)$, où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes. Associons à la fonction $R(x)$ l'application (l'opérateur) $R(D)$ qui envoie $f \in C^\infty$ dans la classe des fonctions $P(D)\dfrac{1}{Q(D)} f \subset C^\infty$. La fonction $R(x)$ sera appelée *symbole de l'application* (de l'opérateur) $R(D)$. Vérifions que l'application $R(D)$ ne dépend pas du procédé de représentation de son symbole $R(x)$ par la fraction $P(x)/Q(x)$. En effet, soient $\overline{P}(x)=P(x)\, S(x)$,

$\overline{Q}(x)=Q(x)\,S(x)$, où $S(x)$ est un polynôme. Montrons que pour tout $f\in C^{\infty}$, on a l'égalité

$$P(D)\frac{1}{Q(D)}f=\overline{P}(D)\frac{1}{\overline{Q}(D)}f. \tag{1.13}$$

Soit $y\in P(D)\dfrac{1}{Q(D)}f$. Alors $y(x)$ est de la forme $y(x)=P(D)\,z(x)$, où $z(x)$ est solution de l'équation $Q(D)\,z(x)=f(x)$. Désignons par $u(x)$ une solution quelconque de l'équation $S(D)\,u(x)=z(x)$. Alors $Q(D)\,u(x)=$ $=Q(D)\,S(D)\,u(x)=Q(D)\,z(x)=f(x)$, de sorte que $u\in\dfrac{1}{\overline{Q}(D)}f$. On a par ailleurs $y(x)=P(D)\,z(x)=P(D)\,S(D)\,u(x)=\overline{P}(D)\,u(x)$. Donc

$$y\in\overline{P}(D)\frac{1}{\overline{Q}(D)}f.$$

Réciproquement, soit $y\in\overline{P}(D)\dfrac{1}{\overline{Q}(D)}f$. Alors $y(x)=\overline{P}(D)\,u(x)$, où $u(x)$ est solution de l'équation $Q(D)\,u(x)=f(x)$. Posons $z(x)=S(D)\,u(x)$. Alors $z(x)$ est solution de l'équation $Q(D)\,z(x)=f(x)$, et $y(x)=$ $=P(D)\,z(x)\in P(D)\dfrac{1}{Q(D)}f(x)$; donc, $y\in P(D)\dfrac{1}{Q(D)}f$. C.Q.F.D.

Désignons l'ensemble des opérateurs $R(D)$ par $F[D]$. Munissons l'ensemble $F[D]$ de l'addition induite par l'opération correspondante sur le corps $F[x]$ ($F[x]$ est le corps des fonctions rationnelles). Posons par définition $R(D)=R_1(D)+R_2(D)$ si et seulement si $R(x)=R_1(x)+R_2(x)$. On a alors le lemme suivant:

Lemme 1.2. *Soient $R_1(x)$ et $R_2(x)$ des éléments du corps $F[x]$, $R(x)=R_1(x)+R_2(x)$. Pour qu'une fonction y appartienne à la classe $R(D)f$, il est nécessaire qu'elle se représente sous la forme $y(x)=y_1(x)+y_2(x)$, où $y_1\in R_1(D)f$, $y_2\in R_2(D)f$.*

Démonstration. Soient $R_1(x)=P_1(x)/Q_1(x)$, $R_2(x)=P_2(x)/Q_2(x)$, où $P_1(x)$, $P_2(x)$, $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ sont des polynômes. Alors $R(x)=R_1(x)+R_2(x)=P(x)/Q(x)$, où $P(x)=P_1(x)\,Q_2(x)+Q_1(x)\,P_2(x)$, $Q(x)=Q_1(x)\,Q_2(x)$.

Désignons la classe des fonctions $y(x)$ par $R_1(D)f(x)+R_2(D)f(x)$. Montrons que $R(D)f\subset R_1(D)f+R_2(D)f$. Soit $y(x)\in R(D)f(x)$. Alors $y(x)=[P_1(D)\,Q_2(D)+Q_1(D)\,P_2(D)]\,z(x)$, où $z(x)$ est solution de l'équation

$$Q_1(D)\,Q_2(D)\,z(x)=f(x). \tag{1.14}$$

Posons $P_1(D)\,Q_2(D)\,z(x)=y_1(x)$, $P_2(D)\,Q_1(D)\,z(x)=y_2(x)$. La fonction

$u_1(x)=Q_2(D)\,z(x)$ est solution de l'équation $Q_1(D)\,u_1(x)=f(x)$, et la fonction $u_2(x)=Q_1(D)\,z(x)$, de l'équation $Q_2(D)\,u_2(x)=f(x)$. Donc

$$y_1(x)\in R_1(D)\,f(x), \qquad y_2(x)\in R_2(D)\,f(x),$$

C.Q.F.D.

Exhibons maintenant une méthode de calcul de $1/P_n(D)$ à l'aide de la correspondance $R(x)\to R(D)$. Décomposons à cet effet le symbole $1/P_n(x)$ en fractions élémentaires:

$$\frac{1}{P_n(x)}=\sum_{i=1}^{m}\frac{a_i}{(x-\alpha_i)^{k_i}}, \qquad \sum_{i=1}^{m}k_i=n,$$

où α_i sont les racines complexes de multiplicité k_i du polynôme $P_n(x)$; a_i des polynômes complexes. Du lemme 1.2 il s'ensuit que

$$\frac{1}{P_n(D)}f\subset\sum_{i=1}^{m}\frac{a_i}{(D-\alpha_i)^{k_i}}f.$$

Cela signifie que toute solution $y(x)$ de l'équation (1.3) se représente sous la forme

$$y(x)=\sum_{i=1}^{m}a_i(D)\,e^{\alpha_i x}\underbrace{\frac{1}{D}\cdots\frac{1}{D}}_{k_i}e^{-\alpha_i x}f(x), \tag{1.15}$$

ce qui résulte immédiatement de (1.6), (1.6′) et (1.8). Dans le cas particulier où les racines sont simples, (1.15) devient

$$y(x)=\sum_{i=0}^{n}\left[a_i e^{\alpha_i x}\int_0^x e^{-\alpha_i p}f(p)\,dp+C_i e^{\alpha_i x}\right]. \tag{1.15′}$$

On s'assure*) immédiatement que la solution générale de l'équation (1.3) contient exactement n constantes. De là il s'ensuit que (1.15) est la solution générale $\left(\text{c'est-à-dire un élément de la classe } \frac{1}{P(D)}f\right)$ de l'équation (1.3).

On peut se servir aussi de la formule (1.9) pour trouver une solution de l'équation homogène.

Exemple. Trouver la solution générale de l'équation

$$(D-\alpha_1)(D-\alpha_2)\,y(x)=0, \qquad \alpha_1\neq\alpha_2.$$

*) Ceci résulte immédiatement du fait que toute solution de l'équation (1.3) se représente par la somme d'une solution de cette équation et d'une solution de l'équation homogène. Par ailleurs, tout terme de la décomposition $1/P_n(D)$ en fractions élémentaires, appliqué à la fonction identiquement nulle, est solution de l'équation homogène $P_n(D)\,y=0$, puisque $P_n(D)$ peut être mis sous la forme $P_k(D)(D-\alpha_k)^{\beta_k}$, où $(D-\alpha_k)^{\beta_k}$ est le dénominateur de ce terme.

La formule (1.9) nous donne

$$y(x)=e^{\alpha_2 x}\frac{1}{D}e^{-\alpha_2 x}e^{\alpha_1 x}\frac{1}{D}e^{-\alpha_1 x}0=$$

$$=e^{\alpha_2 x}\frac{1}{D}e^{-\alpha_2 x}e^{\alpha_1 x}C_1=e^{\alpha_2 x}\frac{1}{D}e^{(\alpha_1-\alpha_2)x}C_1=$$

$$=e^{\alpha_2 x}C_1\int e^{(\alpha_1-\alpha_2)x}\,dx+C_2e^{\alpha_2 x}=C_1'e^{\alpha_1 x}+C_2e^{\alpha_2 x}$$

Illustrons le cas des racines multiples par un exemple.

Exemple. Trouver la solution générale de l'équation

$$(D-\alpha)^3\,y(x)=0.$$

L'égalité (1.9) entraîne

$$y(x)=e^{\alpha x}\frac{1}{D}e^{-\alpha x}e^{\alpha x}\frac{1}{D}e^{-\alpha x}e^{\alpha x}\frac{1}{D}e^{-\alpha x}0=e^{\alpha x}\frac{1}{D}\frac{1}{D}\frac{1}{D}0=e^{\alpha x}(C_0+C_1x+C_2x^2).$$

Remarque. Considérons maintenant l'équation

$$P_n(D)\,y(x)=P_k(x),\qquad P_n(0)\neq 0, \tag{1.16}$$

où $P_k(x)$ est un polynôme de degré k. Désignons par $P_{n,s}(x)$ la somme des $s+1$ premiers termes du développement de Taylor en $x=0$ de la fonction $1/P_n(x)$. L'égalité

$$P_n(x)\left[P_{n,s}(x)+\sum_{k=s+1}^{\infty}\left(\frac{1}{P_n(x)}\right)^{(k)}_{x=0}\frac{x^k}{k!}\right]=1$$

entraîne immédiatement

$$P_n(x)\,P_{n,s}(x)=1+x^{s+1}P_{n-1}(x), \tag{1.17}$$

où $P_{n-1}(x)$ est un polynôme de degré $\leqslant n-1$.

Montrons que

$$y(x)=P_{n,s}(D)\,P_k(x) \tag{1.18}$$

est solution de l'équation (1.16) pour $s\geqslant k$. En effet, grâce à (1.17) on obtient

$$P_n(D)\,\bar{y}(x)=P_n(D)\,P_{n,s}(D)\,P_k(x)=(1+P_{n-1}(D)\,D^{s+1})\,P_k(x)=P_k(x)+P_{n-1}(D)\,D^{s+1}P_k(x).$$

Or le dernier terme est nul pour $s\geqslant k$. Donc, la formule (1.18) nous donne pour tout $s\geqslant k$ une solution de l'équation (1.16), et de plus toute solution de l'équation (1.16) est définie par la formule

$$y(x)=P_{n,s}(D)\,P_k(x)+\varphi(x),\ \text{où}\ \varphi\in\frac{1}{P_n(D)}0.$$

§ 2. Equations aux différences

Considérons l'*opérateur de translation* et désignons-le par e^{hD}:

$$e^{hD}f(x)\overset{\text{déf}}{=}f(x+h),$$

où h est un réel.

Cette définition est justifiée par le raisonnement euristique suivant: soit $f(x)$ une fonction analytique dans un $2h$-voisinage d'un point x, $x\in]-\infty, \infty[$. Alors

$$f(x+h)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{h^k}{k!}f^{(k)}(x).$$

Par ailleurs, en développant formellement e^{hD} en série entière, on obtient

$$e^{hD}f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{h^k D^k}{k!}f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{h^k}{k!}f^{(k)}(x)=f(x+h).$$

Donc, le développement taylorien de la fonction $f(x+h)$ est le développement en série formelle de l'exponentielle e^{hD}.

Considérons l'équation

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y(x+kh)=f(x), \quad f\in C_0^{\infty}, \tag{2.1}$$

où C_0^{∞} est l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support borné sur $\mathbf{R}$ (c'est-à-dire à support compact). Mettons cette équation sous la forme

$$P_n(e^{hD})\,y(x)=f(x),$$

où

$$P_n(e^{hD})=\sum_{k=0}^{n} a_k e^{khD}.$$

Supposons pour simplifier que les racines du polynôme $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ sont toutes distinctes. On a alors

$$\frac{1}{P_n(x)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{x-\alpha_i}, \tag{2.2}$$

où A_i sont des constantes.

Si $y(x)$ est solution de l'équation

$$(e^{hD}-\alpha)\,y(x)=f(x), \tag{2.3}$$

elle est solution de l'équation

$$(e^{hD}-\alpha)\,e^{\frac{x}{h}\ln\alpha}e^{-\frac{x}{h}\ln\alpha}y(x)=f(x).$$

Il est aisé de vérifier que

$$(e^{hD}-\alpha)\,y(x)=\alpha e^{\frac{x}{h}\ln\alpha}(e^{hD}-1)\,e^{-\frac{x}{h}\ln\alpha}y(x).$$

Donc, (2.3) peut être mise sous la forme

$$(e^{hD}-1)\,e^{-\frac{x}{h}\ln\alpha}y(x)=\frac{1}{\alpha}e^{-\frac{x}{h}\ln\alpha}f(x).$$

Remarquons maintenant que la série $-\sum_{k=0}^{\infty}e^{khD}$ est la série entière formelle de $(e^{hD}-1)^{-1}$. Il est immédiat de s'assurer que

$$e^{-\frac{x}{h}\ln\alpha}y(x)=-\frac{1}{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}e^{khD}e^{-\frac{x}{h}\ln\alpha}f(x)+y_1(x),$$

$$y(x)=-\frac{1}{\alpha}e^{\frac{x}{h}\ln\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}f(x+kh)\,e^{-\frac{x+kh}{h}\ln\alpha}+y_1(x)\,e^{\frac{x}{h}\ln\alpha},$$

où $y_1(x)$ est solution de l'équation homogène $(e^{hD}-1)\,y_1=0$; $y_1(x+h)=y_1(x)$. Donc, $y_1(x)$ est une fonction périodique de période h. Exactement comme dans le paragraphe précédent, on établit que la solution générale de l'équation (2.1) se représente sous la forme

$$y(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{e^{hD}-\alpha_i}f(x). \tag{2.4}$$

Pour la fonction $y(x)$ définie par (2.4), posons

$$y(x)\overset{\text{déf}}{=}\frac{1}{P_n(e^{hD})}f(x).$$

Le problème est donc ramené à l'équation (2.3).

Exercice. On demande une solution particulière de l'équation différentielle aux différences

$$y''(x)+y(x+1)=x^k e^{\alpha x},$$

où α satisfait la relation $\alpha=ie^{\alpha/2}$.

§ 3. Intégration des systèmes d'équations différentielles par la méthode de Heaviside

Tout système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants peut être mis sous la forme

$$B(D)\,Y(x)=F(x), \tag{3.1}$$

où $Y(x)=(y_1(x),\ \ldots,\ y_n(x))$, $F(x)=(f_1(x),\ \ldots,\ f_n(x))$ sont des fonctions vectorielles, $B(D)$ des $n\times n$-matrices dont les éléments sont les opérateurs étudiés au § 1.

Il est immédiat de voir que les opérateurs $B(D)$ forment une algèbre*) (non commutative) qui sera désignée par $M[D]$. Notons $M[x]$ l'algèbre des matrices dont les éléments sont des polynômes $P(x)=\sum_{i=0}^{m} a_i x^i$. Il est évident que l'isomorphisme $P(x)\to P(D)$ des algèbres $K_1[x]$ et $K_1[D]$, défini au § 1, peut être prolongé en un isomorphisme des algèbres $M[x]$ et $M[D]$.

Soient

$$B\in M[x], \qquad B(x)=\|P^{ij}(x)\|.$$

Désignons par $A_{ij}(x)$ les cofacteurs de la matrice $B(x)$ et considérons la matrice $A\in M[x]$, $A(x)=\|A_{ij}\|^t=\|A_{ji}\|$. Du cours d'algèbre linéaire on sait que

$$A(x)B(x)=E\Delta(x), \tag{3.2}$$

où E est la matrice unité, et $\Delta(x)=\det B(x)$. L'analogue de (3.2) pour les opérateurs est

$$A(D)B(D)=E\Delta(D). \tag{3.3}$$

Grâce à (3.3), le système (3.1) se ramène à la forme

$$A(D)B(D)Y(x)=A(D)F(x).$$

Posons $A(D)F(x)=G(x)$. Alors

$$E\Delta(D)Y(x)=G(x), \tag{3.4}$$

ou

$$\Delta(D)y_i(x)=g_i(x), \qquad i=1, \ldots, n. \tag{3.4'}$$

Nous avons déjà étudié de telles équations et nous savons que leurs solutions sont

$$y_i(x)=\frac{1}{\Delta(D)}g_i(x), \qquad i=1, \ldots, n. \tag{3.5}$$

Des raisonnements précédents il s'ensuit que si une fonction vectorielle $Y(x)$ est solution du système (3.1), ses composantes, les fonctions $y_i(x)$, sont solutions des équations (3.4'). A noter toutefois que si $y_i(x)$ est la solution générale des équations (3.4'), la fonction $Y(x)=(y_1(x), \ldots, y_n(x))^t$ n'est généralement pas solution du système (3.1). Pour qu'elle le soit, il faut imposer des conditions aux constantes d'intégration figurant dans les solutions des équations (3.5). Si

$$z_i(x)=\frac{1}{\Delta(D)}f_i(x),$$

*) Cf. § 1 chap. 1.

alors

$$Y(x)=A(D)\,Z(x),$$

où $Z(x)=(z_1(x),\ \ldots,\ z_n(x))$ est visiblement solution du système (3.1):

$$B(D)\,Y(x)=B(D)\,A(D)\,Z(x)=E\Delta(D)\,Z(x)=F(x).$$

Il est immédiat de voir qu'on a obtenu la solution générale du système (3.1).

Exemple. Intégrer le système d'équations

$$Dy_1(x)+y_1(x)+Dy_2(x)=0,$$
$$D^2y_1(x)-y_1(x)+D^2y_2(x)+y_2(x)=0.$$

Mettons ce système sous la forme

$$(D+1)\,y_1(x)+Dy_2(x)=0,$$
$$(D^2-1)\,y_1(x)+(D^2+1)\,y_2(x)=0.$$

Il est aisé de voir que dans ce cas $\Delta(D)=(D+1)^2$. La solution est donc de la forme

$$y_1(x)=ae^{-x}+bxe^{-x},$$
$$y_2(x)=ce^{-x}+dxe^{-x}.$$

En portant ces fonctions dans la première équation et en simplifiant par e^{-x}, on obtient

$$b-c-dx+d=0,$$

c'est-à-dire que $d=0$, $b=c$. En portant $y_1(x)$ et $y_2(x)$ dans la deuxième équation, on obtient des conditions identiques sur les coefficients. On a en définitive

$$y_1(x)=ae^{-x}+bxe^{-x},$$
$$y_2(x)=be^{-x}.$$

* * *

On constate donc que la méthode opératorielle de Heaviside permet de ramener un système d'équations différentielles ordinaires et d'équations différentielles-fonctionnelles à un problème d'algèbre linéaire dont les méthodes sont bien élaborées et largement répandues. Mais même si elles ne l'étaient pas, il serait logique de ramener le problème à un problème d'algèbre et d'étudier ce dernier. Cette voie serait la plus payante.

Si les coefficients sont variables, la situation se complique notablement, car le problème d'algèbre auquel conduit la méthode opératorielle exposée plus bas n'a pas encore été étudié, de sorte que par méthode opératorielle on entend dans la suite non seulement la réduction du problème différentiel à un problème d'algèbre, mais aussi la méthode de résolution de ce dernier.

§ 4. Algèbre des séries entières convergentes d'opérateurs non commutables

Le calcul opératoriel de Heaviside permet d'intégrer des équations différentielles linéaires à coefficients constants. Soit l'équation à coefficients variables:

$$\sum_{j=0}^{n} a_j(x)\frac{d^j y}{dx^j} = f(x).$$

Si l'on désigne encore par D l'opérateur de dérivation, cette équation se met sous la forme

$$P(x, D)\, y(x) = f(x),$$

où P est un polynôme en le deuxième argument:

$$P(x, p) = \sum_{j=0}^{n} a_j(x)\, p^j.$$

La non-commutativité des opérateurs de dérivation et de multiplication par x est une source de grosses difficultés. Ceci ressort de l'exemple élémentaire suivant. Soit $P(x, p) = xp$; comment comprendre alors $P(x, D)$ si la substitution de x et de D dans des ordres différents nous donne des résultats différents:

$$xDy(x) = xy'(x), \qquad Dxy(x) = (xy)' = y(x) + xy'(x) \quad ?$$

Il est évident que la notation $P(x, D) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum a_i(x) D^i$, où $P(x, \xi) = \sum a_i(x)\xi^i$ n'a pas de sens si l'on ne sous-entend pas que l'opérateur D agit le premier. Si donc l'on indique l'ordre d'action des opérateurs x et D, on définit sans ambiguïté l'opérateur

$$P\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ x, & D \end{pmatrix} = \sum a_i(x) D^i.$$

La généralisation naturelle de la notation d'un polynôme de D dans la méthode de Heaviside nous conduit à définir des polynômes d'opérateurs ordonnés.

Pour les coefficients constants, nous avons établi des règles d'addition et de multiplication pour les polynômes de D. On a vu que ces règles étaient confondues avec les «règles» habituelles pour les polynômes.

Dans ce paragraphe, nous introduirons des règles analogues pour les polynômes d'opérateurs ordonnés. Ces règles nous conduiront à de nouvelles notions algébriques qui seront axiomatisées plus bas.

Nous étudierons immédiatement les polynômes d'ordre infini, plus exactement les séries entières d'opérateurs. Nous avons vu sur l'exemple de la méthode de Heaviside que parfois (cf. par exemple § 2) la solution pouvait être représentée par une série entière convergente. Le lecteur non

initié à la notion d'opérateur borné peut comprendre par opérateur une matrice ordinaire.

Par ailleurs, nous avons vu aux §§ 1 à 3 que la notion de polynômes de D ne suffit pas en général pour intégrer des équations différentielles. Donc, ici aussi nous devrons généraliser les règles obtenues au cas de fonctions plus générales d'opérateurs ordonnés (§ 6).

Soit Op une algèbre unitaire non commutative dont les éléments A, B, C,... seront appelés *opérateurs*, et soit $\mathscr{A}$ l'algèbre des séries entières formelles des variables x, y, z,... (ces variables sont en nombre infini, mais chaque élément de l'algèbre $\mathscr{A}$ est une série entière qui n'en contient qu'un nombre fini).

Désignons par $\mathscr{S}$ l'ensemble des séries entières formelles des éléments de l'algèbre Op. Ces séries se définissent comme les séries entières formelles de variables permutables avec les changements naturels dûs au fait que deux monômes, par exemple A^2B et ABA, dont l'ordre des facteurs est différent sont supposés différents. L'ensemble $\mathscr{S}$ est muni naturellement de la multiplication; explicitons-la sur l'exemple du produit de deux monômes:

$$2A^2BC \cdot 3CABA = 6A^2BC^2ABA.$$

Cette multiplication n'est pas commutative sur $\mathscr{S}$.

Convenons de désigner les nombres par les lettres a, b, c. Pour que les formules soient plus suggestives, nous exhiberons les définitions ou les règles du calcul opératoriel, par exemple, seulement pour le cas de trois opérateurs non permutables; la généralisation à un nombre quelconque d'opérateurs sera évidente.

Nous introduirons quelques notations et définirons ensuite les opérations sur les séries entières formelles des opérateurs de l'algèbre Op. Ces opérations dépendront du procédé qui a servi à ordonner les éléments de Op.

Coiffons les opérateurs A, B, C de numéros qui indiqueront leur ordre d'action. Ainsi

$$\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, \overset{3}{C}$$

signifiera que l'opérateur A agit le premier, l'opérateur B, le second, l'opérateur C, le troisième. Considérons l'application suivante μ de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{S}$: si

$$f(x, y, z) = \sum_{i,j,k=0}^{\infty} a_{ijk} x^i y^j z^k,$$

alors

$$\mu : f(x, y, z) \to f\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, \overset{3}{C}\right) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{i,j,k=0}^{\infty} a_{ijk} C^k B^j A^i.$$

Désignons par $\mathfrak{A}\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, \overset{3}{C}\right)$ l'image de $\mathscr{A}$ par l'application μ. Les opéra-

tions algébriques de $\mathscr{A}$ induisent par l'application μ des opérations algébriques sur $\mathfrak{A}\binom{1\ 2\ 3}{A,\ B,\ C}$ qui font de cette dernière une algèbre de toute évidence commutative.

Remarque. L'inclusion $\mathfrak{A}\binom{1\ 2\ 3}{A,\ B,\ C} \subset \mathscr{S}$ induit sur $\mathfrak{A}\binom{1\ 2\ 3}{A,\ B,\ C}$ une multiplication qui n'est pas confondue avec la multiplication définie plus haut sur $\mathfrak{A}\binom{1\ 2\ 3}{A,\ B,\ C}$. Contrairement à la multiplication sur $\mathfrak{A}\binom{1\ 2\ 3}{A,\ B,\ C}$, la multiplication sur $\mathscr{S}$ n'est pas commutative.

Exemple.

$$\binom{1\ 2}{A+B}^2 = \overset{1}{A}^2 + 2\overset{1\ 2}{AB} + \overset{2}{B}^2 = A^2 + 2BA + B^2.$$

A noter que bien que $\overset{1\ 2}{A+B} = A+B$, l'élément $\binom{1\ 2}{A+B}^2$ de l'algèbre $\mathfrak{A}\binom{1\ 2}{A,\ B}$ n'est pas confondu en général avec $(A+B)^2$:

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq \binom{1\ 2}{A+B}^2.$$

Jusqu'ici A, B, C étaient des symboles formels. Tenons maintenant compte de l'existence de *relations* dans Op: deux polynômes différents contenant des éléments de Op peuvent être égaux en tant qu'opérateurs. On dira qu'ils sont équivalents et on les reliera par le signe $\sim$. Supposons maintenant que Op est une algèbre normée et soit A' la sous-algèbre des séries entières convergentes de A.

Si

$$f\binom{1\ 2\ 3\ 4}{A,\ B,\ C,\ D} \sim f\binom{1\ 3\ 2\ 4}{A,\ B,\ C,\ D},$$

on désignera par $f\binom{1\ 2\ 2\ 3}{A,\ B,\ C,\ D}$ chacune des deux séries équivalentes.

Exemple: $\binom{1\ 1}{A+B}^2 C$ désigne $\overset{1\ 3}{A}\overset{2\ 3}{C} + \overset{2\ 3}{B}\overset{1\ 3}{C}$ ou $\overset{2\ 3}{A}\overset{1\ 3}{C} + \overset{1\ 3}{B}\overset{2\ 3}{C}$.

L'application μ possède les propriétés suivantes:

1) $f\binom{1\ 2\ 3}{A,\ B,\ C} \sim f\binom{n_1\ n_2\ n_3}{A,\ B,\ C}$, si $n_1 < n_2 < n_3$ *).

2) Si $B=0$, alors

$$f\binom{1\ 3}{A,\ C}^2 B \sim 0, \qquad \sum a_{kj} C^k B A^j \sim 0.$$

*) La notation $f\binom{n_1\ n_2\ n_3}{A,\ B,\ C}$ se comprend comme suit. Si $f(x, y, z) = \sum\limits_{i,j,k} a_{ijk} x^i y^j z^k$, alors

$$f\binom{n_1\ n_2\ n_3}{A,\ B,\ C} \overset{\text{déf}}{=} \sum_{i,j,k} C^k 1 \ldots 1 B^j 1 \ldots 1 A^i 1 \ldots 1,$$

où les unités occupent dans chaque monôme toutes les places à l'exception des n_1-ième, n_2-ième et n_3-ième à droite.

3) Si A et B commutent, alors

$$f\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, \overset{3}{C}\right) \sim f\left(\overset{2}{A}, \overset{1}{B}, \overset{3}{C}\right)$$

donc, chacune de ces séries peut être désignée par $f\left(\overset{1}{A}, \overset{1}{B}, \overset{2}{C}\right)$. Cette notation ne donne pas lieu à une contradiction si $B = A$:

$$f\left(\overset{1}{A}, \overset{1}{A}, \overset{2}{C}\right) = g\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{C}\right),$$

où $g(x, z) = f(x, x, z)$.

Soit

$$f(x, y, z) = \sum_{i,j,k=0}^{\infty} a_{ijk} x^i y^j z^k.$$

Nous pouvons remplacer x et z par les opérateurs $\overset{1}{A}$ et $\overset{3}{B}$ respectivement et laisser y à titre de variable formelle:

$$f\left(\overset{1}{A}, y, \overset{3}{B}\right) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{i,j,k=0}^{\infty} a_{ijk} B^k y^j A^i.$$

Considérons l'opération de substitution de l'*expression opératorielle* agissant en second à y dans $f\left(\overset{1}{A}, y, \overset{3}{B}\right)$. Soit $\varphi\left(\overset{1}{C}, \overset{2}{D}, \ldots, \overset{k}{E}\right)$ un élément de $\mathfrak{A}\left(\overset{1}{C}, \overset{2}{D}, \ldots, \overset{k}{E}\right)$, où certains opérateurs peuvent être confondus entre eux ainsi qu'avec A ou B. Posons par définition

$$f\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{[\![}\varphi\left(\overset{1}{C}, \overset{2}{D}, \ldots, \overset{k}{E}\right)\overset{2}{]\!]}, \overset{3}{B}\right) = \sum_{i,j,k=0}^{\infty} a_{ijk} B^k H^j A^i,$$

où H est un élément de $\mathscr{S}'$ égal à $\varphi\left(\overset{1}{C}, \overset{2}{D}, \ldots, \overset{k}{E}\right)$, H^j est la puissance j-ième de H au sens de la multiplication (non commutative) de $\mathscr{S}'$. En d'autres termes, les indices chapeautant les opérateurs de l'expression entre crochets ne définissent pas l'ordre d'action des opérateurs extérieurs à ce crochet (et inversement). Pour cette raison, ce crochet sera dit *crochet autonome*.

On définit de façon analogue l'opération de substitution d'une expression opératorielle agissant en premier, en troisième, en quatrième, etc.

Exemples. 1) Soit e^x une série entière convergente:

$$e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}.$$

Alors

$$\overset{2}{[\![}e^B\overset{2}{]\!]}\overset{1}{[\![}e^A\overset{1}{]\!]} = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^j A^k}{j!\,k!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!\,(n-k)!} B^k A^{n-k} \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\overset{1}{A} + \overset{2}{B}\right)^n}{n!} = e^{\overset{1}{A} + \overset{2}{B}}.$$

2) Développons le produit

$$T=e^{B^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^nB^nA^n}{n!}e^{A^2}$$

en série entière de binômes homogènes de A et de B à l'aide de la méthode opératorielle. On a

$$T=e^{B^2}[\![e^{\overset{2}{2}\overset{1}{BA}}]\!]\,e^{A^2}=\overset{3}{[\![}e^{B^2}]\!]\,\overset{2}{[\![}e^{\overset{1}{A}(\overset{2}{2B}+\overset{1}{A})}]\!]=\overset{4}{[\![}e^{B^2}]\!]\,e^{\overset{3}{2}\overset{2}{BA}\overset{1}{}}\,[\![e^{A^2}]\!]=e^{\overset{4}{B^2}+\overset{3}{2}\overset{2}{BA}+\overset{1}{A^2}}=$$

$$=e^{\overset{2}{B^2}+\overset{2}{2}\overset{1}{BA}+\overset{1}{A^2}}=e^{(\overset{1}{A}+\overset{2}{B})^2}=\sum\frac{(\overset{1}{A}+\overset{2}{B})^{2n}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}C_{2n}^iB^iA^{2n-i},$$

où C_{2n}^i est le nombre de combinaisons de $2n$ éléments i à i.

3) $[\![\overset{1}{A}+\overset{2}{B}]\!]^2=(\overset{1}{A}+\overset{2}{B})(\overset{3}{A}+\overset{4}{B})=A^2+AB+BA+B^2.$

4) $\overset{1}{A}\overset{2}{[\![}(A+B)]\!]^2\,\overset{3}{C}=\overset{1}{A}(\overset{1}{A}+\overset{2}{B})(\overset{3}{A}+\overset{4}{B})\,\overset{5}{C}.$

Introduisons enfin le symbole (l'opération) d'*exclusion du crochet autonome* (l'opération «prime»). Soit

$$f(x,\,y,\,z)=\sum_{i,j,k}a_{ijk}x^iy^jz^k.$$

Alors, par exemple, par

$$f(\overset{1}{A},\overset{3}{[\![}\varphi(\overset{2'}{B},\overset{1}{C},\overset{2}{D})]\!],\overset{4}{E}) \tag{4.1}$$

on comprendra une série entière convergente de $\mathscr{S}'$ déduite par la procédure suivante. Considérons tout d'abord $f(\overset{1}{A},\overset{2}{[\![}\varphi(\overset{3}{B_1},\overset{1}{C},\overset{2}{D})]\!],\overset{3}{E})$, où B_1 est un opérateur qui est supposé ne commuter à aucun des opérateurs A, C, D, E. Désignons par S l'élément $\varphi(\overset{3}{B_1},\overset{1}{C},\overset{2}{D})\in\mathscr{S}'$. Alors

$$f(\overset{1}{A},\overset{2}{[\![}\varphi(\overset{3}{B_1},\overset{1}{C},\overset{2}{D})]\!],\overset{3}{E})=\sum_{i,j,k}a_{ijk}E^kS^jA^i.$$

Dans chaque terme de la dernière somme, déplaçons maintenant l'opérateur B_1 (qui figure dans S^j) à droite de façon qu'il agisse immédiate-

ment après A^i. Désignons la série entière convergente ainsi obtenue par

$$f\left(\overset{1}{A}, \overset{3}{[\![}\varphi\left(\overset{2'}{B_1}, \overset{1}{C}, \overset{2}{D}\right)\overset{3}{]\!]}, \overset{4}{E}\right).$$

Pour déterminer la série (4.1), il reste seulement à remplacer B_1 par B.

Exemple.

$$\overset{2}{[\![}\overset{1'}{A+BC^2}\overset{2}{]\!]} = \left(\overset{2}{A}+\overset{1\,3}{BC}\right)\left(\overset{4}{A}+\overset{1\,5}{BC}\right).$$

Considérons un exemple où la seule introduction de l'application μ permet d'établir une formule utile. Prenons pour Op l'ensemble des homomorphismes de l'espace vectoriel C_0^∞ et posons

$$X\varphi(\xi)=\xi\varphi(\xi), \qquad P\varphi(\xi)=-id\varphi(\xi)/d\xi, \qquad \varphi\in C_0^\infty.$$

Soient par ailleurs A un opérateur de Op; $f(x,y)$, $S(x,y)$ et $g(x,y)$ des polynômes

$$f(x,y)=\sum_{j,l=0}^{m} a_{jl}x^j y^l, \qquad g(x,y)=\sum_{j,l=0}^{m} c_{jl}x^j y^l;$$

$$e^{iS(X,y)} \overset{\text{déf}}{=} e^{iS(\xi,y)}, \qquad S(x,y)\in C^\infty.$$

Alors

$$\left[\!\left[f\left(\overset{2}{X}, \overset{1}{P}\right)\right]\!\right]\left[\!\left[e^{iS\left(\overset{2}{X},y\right)}g\left(\overset{2}{X}, \overset{1}{A}\right)\right]\!\right]=\sum_{j,l=0}^{m} a_{j,l}\overset{4}{X^j}\overset{3}{[\![}\overset{2}{P^l}e^{iS\left(\overset{1}{X},y\right)}\overset{3}{]\!]}\,g\left(\overset{2}{X}, \overset{1}{A}\right).$$

De là, grâce à l'identité

$$\overset{2}{P^l}e^{iS\left(\overset{1}{X},y\right)}=e^{iS\left(\overset{2}{X},y\right)}\left[\overset{1}{P}+\frac{\partial S}{\partial X}(X,y)\right]^l. \tag{4.2}$$

on obtient

$$\left[\!\left[f\left(\overset{2}{X}, \overset{1}{P}\right)\right]\!\right]\left[\!\left[e^{iS\left(\overset{2}{X},y\right)}g\left(\overset{2}{X}, \overset{1}{A}\right)\right]\!\right]=$$

$$=\sum_{j,l=0}^{m} a_{j,l}\overset{4}{X^j}e^{iS\left(\overset{4}{X},y\right)}\left[\overset{3}{P}+\frac{\partial S}{\partial X}(X,y)\right]^l g\left(\overset{2}{X}, \overset{1}{A}\right)=$$

$$=e^{iS\left(\overset{4}{X},y\right)}f\left(\overset{4}{X}, \left[\overset{3}{P}+\frac{\partial S}{\partial X}(X,y)\right]\right)g\left(\overset{2}{X}, \overset{1}{A}\right).$$

(La formule (4.2) pour les opérateurs P et X peut être établie de façon analogue à (1.4).) Nous avons ainsi prouvé le

Théorème 4.1. *Soient X, P les opérateurs introduits ci-dessus; alors*

$$[\![f(\overset{2}{X}, \overset{1}{P})]\!]\,[\![e^{iS(\overset{2}{X},y)} g(\overset{2}{X}, \overset{1}{P})]\!] \sim$$

$$\sim e^{iS(\overset{4}{X},y)} f\Big(\overset{4}{X}, \overset{3}{[\![} P+\frac{\partial S}{\partial X}(X, y)\Big]\!]\Big) g(\overset{2}{X}, \overset{1}{P}). \quad (4.3)$$

Exercice. Substituons formellement $\overset{1'}{P}$ à y dans (4.2):

$$\overset{3}{P}{}^{s} e^{iS(\overset{2}{X},\overset{1}{P})} \sim e^{iS(\overset{4}{X},\overset{1}{P})} \overset{2}{[\![} P+\frac{\partial S}{\partial X}(X, \overset{1'}{P})]\!]^{s}. \quad (4.4)$$

En appliquant formellement les règles et les notations relatives à l'application μ, on déduit de (4.4) une formule analogue à (4.3).

L'opérateur $f(\overset{2}{X}, \overset{1}{P})$ de la formule (4.3) s'appelle *hamiltonien*. La formule (4.3) sera dite *formule de commutation du hamiltonien à l'exponentielle*.

Théorème 4.2. *Si* $f(\overset{1}{A}, \overset{2}{C_1}, \ldots, \overset{n+1}{C^n}, \overset{n+2}{B}) \sim 0$, *alors*

$$\varphi(\overset{1}{A}, \overset{n+2}{B})\, f(\overset{1}{A}, \overset{2}{C_1}, \ldots, \overset{n+1}{C_n}, \overset{n+2}{B}) \sim 0$$

pour tout $\varphi(x, y)$.

Démonstration.

$$\varphi(\overset{1}{A}, \overset{n+2}{B})\, f(\overset{1}{A}, \overset{2}{C_1}, \ldots, \overset{n+1}{C_n}, \overset{n+2}{B}) \sim$$

$$\sim \varphi(\overset{1}{A}, \overset{n+4}{B})\, f(\overset{2}{A}, \overset{3}{C_1}, \ldots, \overset{n+2}{C_n}, \overset{n+3}{B}) \sim$$

$$\sim \varphi(\overset{1}{A}, \overset{3}{B})\, \overset{2}{[\![} f(\overset{1}{A}, \overset{2}{C_1}, \ldots, \overset{n+1}{C_n}, \overset{n+2}{B})]\!] \sim 0.$$

Corollaire. *La relation*

$$[\![f(\overset{2}{X}, \overset{1}{P})]\!]\,[\![e^{iS(\overset{2}{X})} g(\overset{2}{X}, \overset{1}{A})]\!] \sim 0$$

est équivalente à la relation

$$f(\overset{4}{X}, \overset{3}{[\![} P+S'(X)]\!])\, g(\overset{2}{X}, \overset{1}{A}) \sim 0.$$

On démontre ceci en se servant du théorème 4.2, de la formule de commutation du hamiltonien à l'exponentielle et de la relation évidente

$$e^{-iS(\overset{4}{X})} e^{iS(\overset{4}{X})} f(\overset{4}{X}, \overset{3}{[\![} P+S'(X)]\!])\, g(\overset{2}{X}, \overset{1}{A}) \sim f(\overset{4}{X}, \overset{3}{[\![} P+S'(X)]\!])\, g(\overset{2}{X}, \overset{1}{A})$$

Exhibons maintenant deux relations qui sont très importantes en théorie des équations différentielles.

Remarquons préalablement qu'en calcul des opérateurs non permutables les dérivées aux différences jouent un grand rôle, car elles remplacent en quelque sorte les dérivées classiques en Analyse. Exhibons les dérivées aux différences que nous utiliserons ultérieurement.

Soit $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une fonction de n variables. L'opérateur d dérivation aux différences δ_1 transforme cette fonction en la fonction à $n+1$ variables suivante:

$$\delta_1 f(x_1', x_1'', x_2, \ldots, x_n) \overset{\text{déf}}{=} \frac{f(x_1', x_2, \ldots, x_n) - f(x_1'', x_2, \ldots, x_n)}{x_1' - x_1''},$$

dans laquelle le premier argument se «dédouble». L'opérateur de dérivation aux différences δ_j par rapport au j-ième argument se définit de façon analogue. Si l'opérateur δ_j est appliqué plusieurs fois, il agit sur n'importe lequel des j-ièmes arguments qui se sont dédoublés lors des dérivations précédentes (on laisse au lecteur le soin de s'assurer que le résultat sera le même quel que soit le j-ième argument choisi).

Exemples. Si f est une fonction d'une seule variable x, alors

$$\delta f(x', x'') = \frac{f(x') - f(x'')}{x' - x''},$$

$$\delta^2 f(x', x'' \; x''') =$$

$$= \frac{f(x')}{(x'-x'')(x'-x''')} + \frac{f(x'')}{(x''-x')(x''-x''')} + \frac{f(x''')}{(x'''-x')(x'''-x'')};$$

si $f(x, y)$ est une fonction de deux variables, alors

$$\delta_1 \delta_2 f(x', x'', y', y'') = \frac{f(x', y') - f(x', y'') + f(x'', y'') - f(x'', y')}{(x''-x')(y''-y')}$$

Au lieu de δ_1 et δ_2 on se servira des notations $\delta/\delta x$ et $\delta/\delta y$.

Théorème 4.3. *On a la formule suivante de permutation des arguments*

$$[\![f\binom{2}{A}\binom{1}{B}]\!] - [\![f\binom{1}{A}\binom{2}{B}]\!] \sim \left[A, \overset{3}{B} \right] \delta_1 \delta_2 f\binom{1}{A}\binom{5}{A}\binom{2}{B}\binom{4}{B},$$

où $\left[A, \overset{3}{B}\right] = \overset{3}{[\![AB - BA]\!]}$ *est le commutateur des opérateurs* A *et* B, *et* $\delta_1 \delta_2 f$ *la dérivée seconde aux différences mixte de la fonction* f.

Démonstration. Des propriétés de l'application μ il s'ensuit que

$$\overset{3}{[\![}AB-BA\overset{3}{]\!]}\frac{f\binom{1\ 2}{A,\ B}-f\binom{1\ 4}{A,\ B}+f\binom{5\ 4}{A,\ B}-f\binom{5\ 2}{A,\ B}}{\binom{1\ 5}{A-A}\binom{2\ 4}{B-B}}\sim$$

$$\sim\binom{3\ 2\ \ 4\ 3}{AB-BA}\frac{f\binom{1\ 2}{A,\ B}-f\binom{1\ 4}{A,\ B}+f\binom{5\ 4}{A,\ B}-f\binom{5\ 2}{A,\ B}}{\binom{1\ 5}{A-A}\binom{2\ 4}{B-B}}\sim$$

$$\sim\overset{3}{A}\frac{f\binom{1\ 2}{A,\ B}-f\binom{5\ 2}{A,\ B}}{\underset{1}{A}-\underset{5}{A}}-\overset{3}{A}\frac{f\binom{1\ 4}{A,\ B}-f\binom{5\ 4}{A,\ B}}{\underset{1}{A}-\underset{5}{A}}\sim$$

$$\sim\overset{3}{A}\frac{f\binom{1\ 2}{A,\ B}-f\binom{3\ 2}{A,\ B}}{\underset{1}{A}-\underset{3}{A}}-\overset{1}{A}\frac{f\binom{1\ 2}{A,\ B}-f\binom{3\ 2}{A,\ B}}{\underset{1}{A}-\underset{3}{A}}\sim$$

$$\sim\frac{\overset{3}{A}-\overset{1}{A}}{\underset{1}{A}-\underset{3}{A}}\left[f\binom{1\ 2}{A,\ B}-f\binom{3\ 2}{A,\ B}\right]\sim\overset{2}{[\![}f\binom{2\ 1}{A,\ B}\overset{2}{]\!]}-\overset{2}{[\![}f\binom{1\ 2}{A,\ B}\overset{2}{]\!]}.$$

Remarque. On obtient des formules analogues en permutant deux quelconques des opérateurs. Par exemple:

$$f\binom{1\ 2\ 4}{A,\ B,\ C}-f\binom{3\ 2\ 4}{A,\ B,\ C}\sim\left[\overset{3}{B},\ A\right]\delta_1\delta_2 f\binom{1\ 5\ 2\ 4\ 6}{A,\ A,\ B,\ B,\ C}$$

Théorème 4.4. *On a la formule*

$$\overset{2}{[\![}f\left(A+\overset{1'}{B}\overset{2}{C}\right)\overset{2}{]\!]}\sim\overset{2}{[\![}f\left(\overset{1}{A}+\overset{2\ 1'}{B}C\right)\overset{2}{]\!]}+$$

$$+\overset{2}{[\![}\overset{1}{C}\left[A,\ \overset{4}{B}\right]\delta^2 f\left(\overset{2}{A}+\overset{6\ 1}{B}C,\ \overset{1''}{A}+BC\right],\ \overset{5}{[\![}A+\overset{1'}{B}C\overset{5}{]\!]}\right)\overset{2}{]\!]}$$

Démonstration. Il suffit de montrer que

$$f(A+B)\sim\overset{2}{[\![}f\binom{1\ 2}{A+B}\overset{2}{]\!]}+\overset{2}{[\![}\left[\overset{3}{A},\ B\right]\delta^2 f\binom{1\ 5\ 2\ 4}{A+B,\ A+B,\ A+B}\overset{2}{]\!]}$$

On a la relation $f(z)\sim\underset{1}{f}(\underset{1}{x}+\underset{3}{y})+(\underset{2}{z}-x-y)\,\delta f(x+y,\ z)$. En remplaçant x, y et z respectivement par A, B et $A+B$, on obtient

$$f(A+B)\sim\overset{2}{[\![}f\binom{1\ 2}{A+B}\overset{2}{]\!]}+\overset{2}{[\![}\left(\overset{2}{A}+B-\overset{1}{A}-\overset{3}{B}\right)\delta f\binom{1\ 3\ 2}{A+B,\ A+B}\overset{2}{]\!]}$$

Le théorème 4.3 et la remarque nous donnent maintenant

$$f(A+B)\sim\left[\!\left[f\left(\overset{1}{A}+\overset{2}{B}\right)\right]\!\right]+\left[\!\left[\left(\overset{2}{A}+B-\overset{3}{B}\right)\delta f\left(\overset{1}{A}+\overset{3}{B},\ \overset{2}{A}+B\right)\right]\!\right]-$$

$$-\left[\!\left[\overset{1}{A}\delta f\left(\overset{1}{A}+\overset{3}{B},\ \overset{2}{A}+B\right)\right]\!\right]\sim\left[\!\left[f\left(\overset{1}{A}+\overset{2}{B}\right)\right]\!\right]+$$

$$+\left[\!\left[\left(\overset{2}{A}+B-\overset{3}{B}\right)\delta f\left(\overset{1}{A}+\overset{3}{B},\ \overset{2}{A}+B\right)\right]\!\right]-\left[\!\left[\overset{3}{A}\delta f\left(\overset{1}{A}+\overset{4}{B},\ \overset{2}{A}+B\right)\right]\!\right]+$$

$$+\left[\!\left[\left[\overset{3}{A},\ A+\overset{4}{B}\right]\delta^2 f\left(\overset{2}{A}+B,\ \overset{4}{A}+B,\ \overset{1}{A}+\overset{5}{B}\right)\right]\!\right].$$

Nous avons utilisé le fait que la dérivée aux différences mixte par rapport aux deux premiers arguments de la fonction

$$g(x,\ y,\ z,\ v)=x\delta f(z+v,\ y)=x\frac{f(z+v)-f(y)}{z+v-y}$$

est égale à

$$\delta_1\delta_2 g(x_1,\ x_2;\ y_1,\ y_2;\ z,\ v)=$$

$$=\frac{\left[\dfrac{f(z+v)-f(y_1)}{z+v-y_1}-\dfrac{f(z+v)-f(y_2)}{z+v-y_1}\right](x_1-x_2)}{(x_1-x_2)(y_1-y_2)}=$$

$$=\delta^2 f(y_1,\ y_2,\ z+v).$$

Pour achever la démonstration, il reste à remarquer que $[A,\ A+B]\sim$ $\sim[A,\ B]$ et que

$$\left[\!\left[\left(\overset{2}{A}+B-\overset{3}{B}\right)\delta f\left(\overset{1}{A}+\overset{3}{B},\ \overset{2}{A}+B\right)\right]\!\right]-\left[\!\left[\overset{3}{A}\delta f\left(\overset{1}{A}+\overset{4}{B},\ A+B\right)\right]\!\right]=$$

$$=\left(\overset{4}{A}+B-\overset{5}{B}\right)\delta f\left(\overset{1}{A}+\overset{5}{B},\ \overset{2}{A}+B\right)-\overset{3}{A}\delta f\left(\overset{1}{A}+\overset{5}{B},\ \overset{2}{A}+B\right)=$$

$$=\left(\overset{4}{A}+B-\overset{3}{A}-\overset{5}{B}\right)\delta f\left(\overset{1}{A}+\overset{5}{B},\ \overset{2}{A}+B\right)\sim 0$$

en vertu du théorème 4.2 (ou, plus exactement, en vertu de sa généralisation évidente). C.Q.F.D.

Le corollaire suivant est utile.

Corollaire. *On a la décomposition*

$$f(A+B)=f\left(\overset{1}{A}+\overset{2}{B}\right)+\frac{1}{2}\left[A,\ \overset{2}{B}\right]f''\left(\overset{1}{A}+\overset{3}{B}\right)+R_2 \qquad (4.5)$$

où le reste R_2 est défini par la formule

$$R_2=\left[A,\ \overset{2}{[A,\ B]}\right]\delta^3 f\left(\overset{1}{A}+\overset{4}{B},\ \overset{1}{A}+\overset{4}{B},\ \overset{1}{A}+\overset{4}{B},\ \overset{3}{A}+\overset{4}{B}\right)+$$

$$+\left[\overset{3}{[A,\ B]},\ B\right],\delta^3 f\left(\overset{1}{A}+\overset{2}{B},\ \overset{1}{A}+\overset{4}{B},\ \overset{1}{A}+\overset{6}{B},\ \overset{5}{A}+\overset{6}{B}\right)+$$

$$+\left[\overset{3}{A},\ B\right]\left[\overset{6}{A},\ B\right]\delta^4 f\left(\overset{1}{A}+\overset{5}{B},\ \overset{1}{A}+\overset{8}{B},\ \overset{2}{A}+B,\ \overset{1}{A}+B,\ \overset{7}{A}+B\right)+$$
$$+\left[\overset{3}{A},\ B\right]\left[\overset{6}{A},\ B\right]\delta^4 f\left(\overset{1}{A}+\overset{2}{B},\ \overset{1}{A}+\overset{8}{B},\ \overset{4}{A}+\overset{8}{B},\ \overset{5}{A}+B,\ \overset{7}{A}+B\right)+$$
$$+\left[\overset{2}{A},\ B\right]\left[\overset{5}{A},\ B\right]\delta^4 f\left(\overset{1}{A}+\overset{4}{B},\ \overset{1}{A}+\overset{6}{B},\ \overset{1}{A}+\overset{8}{B},\ \overset{3}{A}+\overset{8}{B},\ \overset{7}{A}+\overset{8}{B}\right). \quad (4.6)$$

Il est aisé d'écrire le terme suivant de la décomposition (4.5):

$$f(A+B)=f\left(\overset{1}{A}+\overset{2}{B}\right)+\frac{1}{2}\left[A,\ \overset{2}{B}\right]f''\left(\overset{1}{A}+\overset{3}{B}\right)+$$
$$+\frac{1}{6}\left(\left[A,\ \overset{2}{[A,B]}\right]+\left[[A,B],\ \overset{2}{B}\right]\right)f'''\left(\overset{1}{A}+\overset{3}{B}\right)+$$
$$+\frac{1}{8}\left[A,\ \overset{2}{B}\right]^2 f^{(4)}\left(\overset{1}{A}+\overset{3}{B}\right)+R_3, \quad (4.7)$$

où le reste R_3 s'exprime en fonction des commutateurs du troisième ordre comme dans (4.6).

Théorème 4.5. *On a la formule*

$$f\left(\overset{2}{C},\ \overset{1}{A}+B\right)=f\left(\overset{2}{C},\ \overset{1}{A}\right)+\overset{2}{B}\frac{\delta f}{\delta x_2}\left(\overset{4}{C},\ \overset{1}{A},\ \overset{3}{A}\right)+\overset{2\,4}{BB}\frac{\delta^2 f}{\delta x_2^2}\left(\overset{6}{C},\ \overset{1}{A},\ \overset{3}{A},\ \overset{5}{A}+B\right).$$

Démonstration. On a l'identité

$$\varphi(x_1, x_2, x_3)=\varphi(x_1, x_2, y_3)+(x_3-y_3)\frac{\delta\varphi}{\delta x_3}(x_1, x_2; x_3, y_3).$$

Faisons la substitution $x_1\to\overset{6}{C}_1$, $x_2\to\overset{1}{C}_2$, $x_3\to\overset{5}{A}+B$, $y_3\to\overset{3}{A}$. Alors, pour tout $T\in\mathrm{Op}$, on a

$$\overset{2}{T}\varphi\left(\overset{6}{C}_1,\ \overset{1}{C}_2,\ \overset{5}{A}+B\right)=$$
$$=\overset{2}{T}\varphi\left(\overset{6}{C}_1,\ \overset{1}{C}_2,\ \overset{3}{A}\right)+\overset{2}{T}\frac{\delta\varphi}{\delta x_3}\left(\overset{6}{C}_1,\ \overset{1}{C}_2;\ \overset{3}{A},\ \overset{5}{A}+B\right)\left(\overset{5}{A}+B-\overset{3}{A}\right)=$$
$$=\overset{2}{T}\varphi\left(\overset{6}{C}_1,\ \overset{1}{C}_2,\ \overset{3}{A}\right)+\overset{2\,4}{TB}\frac{\delta\varphi}{\delta x_3}\left(\overset{6}{C}_1,\ \overset{1}{C}_2;\ \overset{3}{A},\ \overset{5}{A}+B\right). \quad (4.8)$$

Si, en particulier, φ ne dépend pas du second argument, la fonction $\varphi(x_1, y_2, x_2)$ est équivalente à $f(x_1, x_2)$ et $C_1\sim C$, $T\sim 1$, on déduit de (4.8) que

$$f\left(\overset{2}{C},\ \overset{1}{A}+B\right)=f\left(\overset{2}{C},\ \overset{1}{A}\right)+\overset{2}{B}\frac{\delta f}{\delta x_2}\left(\overset{6}{C};\ \overset{1}{A},\ \overset{5}{A}+B\right).$$

Appliquons encore la formule (4.8) au dernier terme dans le cas où

$$\varphi(x_1, x_2, x_3)=\frac{\delta f}{\delta x_2}(x_1, x_2, x_3), \quad T\sim B, \quad C_1\sim C, \quad C_2\sim A.$$

On obtient alors immédiatement la décomposition cherchée à partir de (4.8). C.Q.F.D.

§ 5. Spectre d'un couple d'opérateurs ordonnés

Arrêtons-nous tout d'abord sur les spectres de matrices. Soit A une matrice. Désignons par K l'ensemble des polynômes P à coefficients dans $\mathbf{C}$ tels que $P(A)=0$ (0 représente la matrice nulle).

Définition. On appellera *spectre* $\sigma(A)\subset\mathbf{C}$ *de la matrice* A l'intersection des ensembles des zéros des polynômes de K: $(z\in\sigma)\Leftrightarrow(P(z)=0$ pour tout $P\in K)$.

Soit $k_P(\lambda)$ la multiplicité d'un zéro λ du polynôme $P(z)\in K$. On appelle *multiplicité d'un point* λ *du spectre* le nombre $\inf_{P\in K} k_P(\lambda)$.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ les valeurs propres de la matrice A, et $Q(z)=\prod_1^s (z-\lambda_j)^{k_j}$, son polynôme caractéristique.

Du cours d'Algèbre linéaire on sait que $Q(A)=0$. On en déduit que le spectre d'une matrice est confondu avec l'ensemble de ses valeurs propres et les points λ_j sont de multiplicité k_j. Posons $s=3$ pour simplifier. Pour tout polynôme $P(z)$, on a

$$P(z)=\sum_{i=0}^{k_1-1}\frac{1}{i!}P^{(i)}(\lambda_1)(z-\lambda_1)^i+(z-\lambda_1)^{k_1}P_1(z),$$

où $P_1(z)$ est un polynôme dont les coefficients dépendent de λ_1. De façon analogue

$$P_1(z)=\sum_{i=0}^{k_2-1}\frac{1}{i!}P_1^{(i)}(\lambda_2)(z-\lambda_2)^i+(z-\lambda_2)^{k_2}P_2(z),$$

$$P_2(z)=\sum_{i=0}^{k_3-1}\frac{1}{i!}P_2^{(i)}(\lambda_3)(z-\lambda_3)^i+(z-\lambda_3)^{k_3}P_3(z),$$

où $P_2(z)$ et $P_3(z)$ sont des polynômes; les coefficients de P_2 dépendent de λ_1 et de λ_2; comme $(A-\lambda_1)^{k_1}(A-\lambda_2)^{k_2}(A-\lambda_3)^{k_3}=0$, il vient

$$P(A)=\sum_{i=0}^{k_1-1}\frac{1}{i!}P^{(i)}(\lambda_1)(A-\lambda_1)^i+$$

$$+(A-\lambda_1)^{k_1}\sum_{i=0}^{k_2-1}\frac{1}{i!}P_1^{(i)}(\lambda_2)(A-\lambda_2)^i+$$

$$+(A-\lambda_1)^{k_1}(A-\lambda_2)^{k_2}\sum_{i=0}^{k_3-1}\frac{1}{i!}P_2^{(i)}(\lambda_2)(A-\lambda_3)^i. \quad (5.1)$$

On constate que $P(A)$ est égal à un polynôme de degré $k_1+k_2+k_3-1$ et que la matrice $P(A)$ ne dépend que des valeurs du polynôme et d'un nombre fini de ses dérivées aux points du spectre. La formule (5.1) sera appelée *décomposition spectrale de l'opérateur* $P(A)$.

Soient A et B des éléments de l'algèbre (des opérateurs). Considérons l'ensemble K des polynômes $P(z_1, z_2)$ à coefficients dans $\mathbf{C}$, tels que $P\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}\right)=0$.

Généralisons la définition du spectre et de la décomposition spectrale aux ensembles ordonnés d'opérateurs. Nous nous bornerons au spectre d'un couple d'opérateurs $\overset{1}{A}, \overset{2}{B}$.

Définition. On appelle *spectre* $\sigma\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}\right)\subset\mathbf{C}^2$ *d'un couple ordonné* $\overset{1}{A}, \overset{2}{B}$ l'intersection des ensembles de tous les zéros des polynômes de K: $\left(z_1, z_2\in\sigma\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}\right)\right)\Leftrightarrow(P(z_1, z_2)=0)$ pour tout $P(z_1, z_2)\in K$.

A noter que d'après le théorème 4.2, si $Q(z_1, z_2)\in K$, alors $Q(z_1, z_2)P(z_1, z_2)\in K$, où $P(z_1, z_2)$ est un polynôme quelconque.

Soient A, B, C des éléments de l'algèbre (des opérateurs). Considérons l'ensemble $\mathscr{P}(z_1, z_2)$ des polynômes $P(z_1, z_2)$ à coefficients dans $\mathbf{C}$, tels que

$$\overset{2}{C}P\left(\overset{1}{A}, \overset{3}{B}\right)=0.$$

Définition. On appelle *spectre* $\sigma_C\left(\overset{1}{A}, \overset{3}{B}\right)\subset\mathbf{C}^2$ *du couple* $\overset{1}{A}, \overset{3}{B}$ *relativement à* $\overset{2}{C}$ l'intersection des ensembles de tous les zéros des polynômes de $\mathscr{P}(z_1, z_2)$:

$$\left(z_1, z_2\in\sigma_C\left(\overset{1}{A}, \overset{3}{B}\right)\right)\Leftrightarrow(P(z_1, z_2)=0)$$

pour tous $P(z_1, z_2)\in\mathscr{P}(z_1, z_2)$.

A noter que si $Q(z_1, z_2)\in\mathscr{P}(z_1, z_2)$, alors $Q(z_1, z_2)P(z_1, z_2)\in\mathscr{P}(z_1, z_2)$, où $P(z_1, z_2)$ est un polynôme quelconque.

Traitons maintenant l'exemple important de la décomposition spectrale d'une fonction de la forme $\overset{2}{C}f\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}\right)$. Considérons à cet effet la formule

(4.3) de commutation du hamiltonien à l'exponentielle. Posons dans cette formule $X=x$, $P=-i\partial/\partial x$; $S(X, P)=S(x)$; $g(X, P)=g(x)$. On obtient alors au second membre l'expression

$$e^{iS\binom{4}{x}} f\left(\overset{4}{x}, \overset{3}{[\![} P+\partial S/\partial x \overset{3}{]\!]}\right) g\left(\overset{2}{x}\right) = e^{iS(x)} \overset{1}{[\![} f\left(\overset{2}{x}, \overset{1}{[\![} P+\partial S/\partial x \overset{1}{]\!]}\right) \overset{1}{]\!]}\, g(x).$$

Le théorème 4.5 nous dit que

$$f\left(\overset{2}{x}, \overset{1}{[\![} P+\partial S/\partial x \overset{1}{]\!]}\right) g(x) =$$

$$= f(x, \partial S/\partial x)\, g(x) + \overset{2}{P} \frac{f\left(\overset{4}{x}, \overset{1}{\partial S/\partial x}\right) - f\left(\overset{4}{x}, \overset{3}{\partial S/\partial x}\right)}{\overset{1}{\partial S/\partial x} - \overset{3}{\partial S/\partial x}}\, g(x) +$$

$$+ \overset{2\,4}{P P}\, (\delta^2 f/\delta p^2)\left(\overset{6}{x}; \overset{1}{\partial S/\partial x}, \overset{3}{\partial S/\partial x}, \overset{5}{[\![} P+\partial S/\partial x \overset{5}{]\!]}\right) g(x).$$

Calculons le terme médian du second membre. Utilisons à cet effet l'égalité évidente

$$i\frac{\partial}{\partial \overset{2}{x}}\left(\overset{1}{x} - \overset{3}{x}\right)^2 \varphi(x) = i\left\{\frac{\partial}{\partial x} x^2\varphi(x) - 2x\frac{\partial}{\partial x} x\varphi(x) + x^2\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x)\right\} = 0.$$

Donc, le spectre de $\left(\overset{1}{x}, \overset{3}{x}\right)$ relativement à $ih\partial/\partial \overset{2}{x}$ est situé sur la bissectrice de l'angle de coordonnées dans le plan $\mathbf{R}^2$. D'après le théorème 4.2 on a

$$i\frac{\partial}{\partial \overset{2}{x}}\left(\overset{1}{x} - \overset{3}{x}\right)^n = 0 \text{ pour } n \geqslant 2.$$

De là il s'ensuit que pour toute série finie $P(x, y)$, on a la *décomposition spectrale*

$$i\frac{\partial}{\partial \overset{2}{x}} P\left(\overset{1}{x}, \overset{3}{x}\right) \sim iP\left(\overset{3}{x}, \overset{3}{x}\right) \frac{\partial}{\partial \overset{2}{x}} + i\frac{\partial}{\partial \overset{2}{x}} P'_x\left(\overset{3}{x}, \overset{3}{x}\right)\left(\overset{1}{x} - \overset{3}{x}\right) \sim \cdot$$

$$\sim iP(x, x)\frac{\partial}{\partial x} - i\left[P'_x(x, x)\, x\frac{\partial}{\partial x} - P'_x(x, x)\frac{\partial}{\partial x} x\right] \sim$$

$$\sim iP(x, x)\frac{\partial}{\partial x} + iP'_x(x, x).$$

Donc

$$\overset{2}{P} \frac{f\left(\overset{4}{x}, \overset{1}{\partial S/\partial x}\right) - f\left(\overset{4}{x}, \overset{3}{\partial S/\partial x}\right)}{\overset{1}{\partial S/\partial x} - \overset{3}{\partial S/\partial x}}\, \varphi(x) \sim$$

$$\sim -i\left[\left.\frac{\partial f}{\partial p}\right|_{p=\frac{\partial S}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\right|_{p=\frac{\partial S}{\partial p}} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\right] \varphi(x).$$

Un opérateur P tel que

$$P\varphi = \left.\frac{\partial f}{\partial p}\right|_{p=\frac{\partial S}{\partial x}} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\right|_{p=\frac{\partial S}{\partial x}} \varphi,$$

s'appelle *opérateur de transport* (pour le hamiltonien $f(p, x)$ et pour la fonction donnée $S(x)$).

A signaler que dans les décompositions spectrales nous n'avons pas fait usage de la seule notion de spectre. Il nous est important de connaître aussi le nombre de termes à retenir dans la série de Taylor. Dans le cas d'une matrice, ce nombre était lié à la notion de multiplicité du spectre. Dans l'exemple traité, il est naturel d'admettre que la multiplicité du spectre situé sur la bissectrice de l'angle de coordonnées est égale à deux. Le problème de la multiplicité du spectre (c'est-à-dire du nombre de termes de la série de Taylor) est assez compliqué dans le cas général. Dans les chapitres III et IV, il se ramène à l'étude des propriétés de l'espace de Banach médian $B_{\text{méd}}$, mais nous entrons dans le domaine de l'Analyse harmonique où cette question a fait l'objet d'un examen approfondi.

Pour bien comprendre l'orientation de l'étude des propriétés des opérateurs dans les chapitres III et IV, établissons quelques analogies entre l'exemple exhibé ci-dessus et la décomposition spectrale des matrices.

1. Les fonctions sur lesquelles «agit» l'opérateur $\overset{1}{x}$ doivent être dérivables, car l'opérateur $\partial/\partial x$ agit en second. Dans l'espace des fonctions dérivables, l'opérateur de multiplication par e^{ixt} «croît comme la puissance un de t», puisque

$$\left|\frac{d}{dx}(e^{ixt}g(x))\right| + |e^{ixt}g(x)| \leqslant (1+|t|)\max(|g'|+|g|).$$

2. La matrice A dont la longueur maximale des chaînes d'éléments adjoints est égale à 1 vérifie la condition

$$|e^{iAt}g| \leqslant (1+|t|)|g|,$$

où g est un vecteur et $|g|$ son module.

3. La décomposition spectrale de la série convergente est limitée à deux termes dans les deux cas. Nous verrons au chapitre IV qu'il existe un lien profond entre l'estimation de la croissance de l'opérateur e^{iAt} et le nombre de termes de la décomposition spectrale.

Remarque. Les deux propriétés suivantes des matrices seront importantes dans la suite:

1) Toute matrice A peut être représentée par la somme

$$A = A_1 + iA_2, \tag{5.2}$$

où A_1 commute à A_2; A_2 et A_1 possèdent un spectre réel.

2) Le spectre d'une matrice peut être défini comme suit. Soit K l'ensemble des polynômes $P(x, y)$ tels que $P(A_1, A_2)=0$. Appelons *spectre* $\sigma(A)$ *de la matrice* A l'intersection des ensembles des zéros des polynômes de K: $x, y \in \sigma(A) \Leftrightarrow P(x, y)=0$ pour tous $P(x, y) \in K$. Les valeurs propres de A seront dans ce cas égales à $x+iy$, où $x, y \in \sigma(A)$.

Cette interprétation du spectre d'une matrice nous permet de ne considérer que les racines réelles des polynômes de deux variables. A la vérité, pour mettre A sous la forme (5.2), il faut connaître sa «décomposition spectrale», mais vu que notre objectif est l'étude du spectre non pas d'un mais de plusieurs opérateurs non permutables, nous aurons présent à l'esprit (tout au moins dans le cas des matrices) que chacun de ces opérateurs peut être représenté sous la forme d'une fonction d'opérateurs permutables à spectre réel. La classe de ces opérateurs sera étudiée plus en détail au chapitre III.

§ 6. Algèbres munies de μ-structures

Le calcul développé ne peut encore être appliqué à l'intégration des équations différentielles à coefficients variables. On se propose d'introduire axiomatiquement les êtres algébriques qui apparaissent quand on étudie les opérateurs sur les séries convergentes d'opérateurs ordonnés.

On commencera par les axiomes les plus simples puis on formulera les axiomes plus compliqués μ_4 et μ_6. On en déduira de nombreux théorèmes et on les illustrera ensuite sur un exemple simple au § 7.

Au § 8 on traitera en détail le problème classique de déduction de l'équation des ondes et on montrera sur cet exemple la puissance de la méthode opératorielle et son adéquation aux phénomènes mathématiques et physiques qui émergent au passage du système d'équations des oscillations d'un réseau à l'équation des ondes.

Pour élaborer l'analogue du calcul opératoriel pour les séries entières convergentes, il est plus commode d'adopter le point de vue axiomatique, c'est-à-dire de postuler les points forts, de les appliquer à la démonstration des formules fondamentales et ensuite de vérifier ces postulats pour les opérateurs utilisés pour l'intégration des équations différentielles. Cette abstraction est très utile pour la manipulation des opérateurs ordonnés. On se servira des notions élémentaires fondamentales de structures algébriques.

Soit $\mathscr{A}$ une algèbre unitaire, en général non commutative, sur le corps $\mathbf{R}$. Les éléments de $\mathscr{A}$ seront appelés *opérateurs*.

Soit $\mathscr{S}^\infty$ l'ensemble de toutes les fonctions $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^k$ (k quelconque), indéfiniment dérivables croissant avec leurs dérivées pas plus vite que $|x|^l$ à l'infini (le nombre l est propre à chaque fonction f). Les fonctions de $\mathscr{S}^\infty$ seront appelées *symboles*; un symbole dépendant de k variables sera dit *k-uple*.

On dira qu'*une algèbre $\mathscr{A}$ est munie d'une μ-structure* si pour tout sous-ensemble fini d'opérateurs $A_1, \ldots, A_k$ d'un ensemble $M \subset \mathscr{A}$ et toute collection d'indices $n_1, \ldots, n_k$ (vérifiant la condition $n_i \neq n_j$ si A_i et A_j ne commutent pas) est définie l'opération

$$\mu : (x_1 \to A_1, \ldots, x_k \to A_k),$$

qui à tout symbole $f(x_1, \ldots, x_k)$ associe un opérateur $A \in \mathscr{A}$ noté

$$A = \left[\!\left[f\binom{n_1}{A_1}, \ldots, \binom{n_k}{A_k} \right]\!\right]^{*}),$$

et qui satisfait les axiomes suivants :

μ_1) **Axiome d'homogénéité** : si $\alpha \in \mathbf{R}$, alors

$$\left[\!\left[\alpha f\binom{n_1}{A_1}, \ldots, \binom{n_k}{A_k} \right]\!\right] = \alpha \left[\!\left[f\binom{n_1}{A_1}, \ldots, \binom{n_k}{A_k} \right]\!\right];$$

*) On omettra le crochet [[ ]] si aucune confusion n'est à craindre.

et en particulier, si $f(x_1, \ldots, x_k)=0$, alors

$$[\![f(\overset{n_1}{A_1}, \ldots, \overset{n_k}{A_k})]\!] = 0.$$

μ_2) **Axiome d'écartement des indices**: soient $n_1, \ldots, n_k$ et $m_1, \ldots, m_k$ deux familles d'indices telles que $(n_i < n_j) \Rightarrow (m_i < m_j)$ pour $i \neq j$; alors

$$[\![f(\overset{n_1}{A_1}, \ldots, \overset{n_k}{A_k})]\!] = [\![f(\overset{m_1}{A_1}, \ldots, \overset{m_k}{A_k})]\!],$$

et de plus, si $n_i = n_j$ et $A_i = A_j = A$, alors

$$[\![f(\overset{n_1}{A_1}, \ldots, \overset{n_i}{A_i}, \quad , \overset{n_j}{A_j}, \ldots, \overset{n_k}{A_k})]\!] = [\![g(\overset{n_1}{A_1}, \ldots, \overset{n_i}{A_i}, \ldots, \overset{n_k}{A_k})]\!],$$

où

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_k) = [f(x_1, x_2, \ldots, x_k)]_{x_j = x_i}.$$

Exemple. Soient $A, B \in M$. Alors

$$4 \sin \overset{1}{A} \cos \overset{2}{A} \sin \overset{3}{B} \cos \overset{4}{B} = \sin 2\overset{1}{A} \sin 2\overset{2}{B}.$$

μ_3) **Axiome de correspondance**: l'application μ envoie le symbole identiquement égal à 1 dans l'opérateur unité et $[\![\overset{1}{A}]\!] = A$.

μ_4) **Axiome de la somme**: si $n_i \neq m_j$ quels que soient i et j, alors

$$[\![f(\overset{n_1}{A_1}, \ldots, \overset{n_k}{A_k}) + g(\overset{m_1}{B_1}, \ldots, \overset{m_l}{B_l})]\!] =$$

$$= [\![f(\overset{n_1}{A_1}, \ldots, \overset{n_k}{A_k})]\!] + [\![g(\overset{m_1}{B_1}, \ldots, \overset{m_l}{B_l})]\!], \quad B_i \in M.$$

μ_5) **Axiome du produit**: si $m_i < n_j$ pour tous i, j, alors

$$[\![f(\overset{n_1}{A_1}, \ldots, \overset{n_k}{A_k})\, g(\overset{m_1}{B_1}, \ldots, \overset{m_l}{B_l})]\!] = [\![f(\overset{n_1}{A_1}, \ldots, \overset{n_k}{A_k})]\!]\, [\![g(\overset{m_1}{B_1}, \ldots, \overset{m_l}{B_l})]\!]$$

Exemple. Dans l'exemple précédent

$$\sin 2\overset{1}{A} \sin 2\overset{2}{B} = [\![\sin 2B]\!]\, [\![\sin 2A]\!].$$

μ_6) **Axiome du zéro**: si

$$[\![f(\overset{n_1}{A_1}, \ldots, \overset{n_k}{A_k})]\!] = 0$$

et $p_1, \ldots, p_l, r_1, \ldots, r_m$ des numéros tels que $p_i < n_j$, $r_i > n_j$ pour tous i, j, alors pour tout symbole $g(x_1, \ldots, x_{l+m})$ et tous opérateurs $B_1, \ldots, B_l$, $C_1, \ldots, C_m$, $C_i \in M$,

$$[\![f(\overset{n_1}{A_1}, \ldots, \overset{n_k}{A_k})\, g(\overset{p_1}{B_1}, \ldots, \overset{p_l}{B_l}, \overset{r_1}{C_1}, \ldots, \overset{r_m}{C_m})]\!] = 0.$$

Des axiomes précédents, il s'ensuit que l'axiome de la somme est en fait satisfait pour tous n_i et m_j. Plus exactement, on a le théorème suivant.

Théorème 6.1 (premier théorème de la somme). *Pour tous n_i et m_j, on a la relation*

$$\left[\!\left[f\binom{n_1}{A_1}, \ldots, \binom{n_k}{A_k} + g\binom{m_1}{B_1}, \ldots, \binom{m_l}{B_l} \right]\!\right] = \left[\!\left[f\binom{n_1}{A_1}, \ldots, \binom{n_k}{A_k} \right]\!\right] + \left[\!\left[g\binom{m_1}{B_1}, \ldots, \binom{m_l}{B_l} \right]\!\right].$$

Démonstration. Supposons pour fixer les idées que $n_s \leqslant m_s \leqslant n_{s+1} \leqslant m_s + 1$ pour tous s. (A noter que si $n_s = m_s$, c'est que B_s et A_s commutent par définition de la μ-structure.)

Considérons la somme

$$\left[\!\left[f\binom{n_1}{A_1}, \ldots, \binom{n_k}{A_k} + g\binom{m_1}{B_1}, \ldots, \binom{m_l}{B_l} \right]\!\right] \tag{6.1}$$

D'après l'axiome d'écartement, cette somme est égale à

$$\left[\!\left[f\binom{n'_1}{A_1}, \ldots, \binom{n'_k}{A_k} + g\binom{m'_1}{B_1}, \ldots, \binom{m'_l}{B_l} \right]\!\right] \tag{6.2}$$

pour tous n'_i et m'_j tels que $m'_{i+1} > n'_{i+1} > m'_i > n_i$. Par ailleurs, pour chaque terme de cette somme, on a

$$\begin{aligned} f\binom{n_1}{A_1} \ldots \binom{n_k}{A_k} &= f\binom{n'_1}{A_1}, \ldots, \binom{n'_k}{A_k}, \\ g\binom{m_1}{B_1} \ldots \binom{m_l}{B_l} &= g\binom{m'_1}{B_1}, \ldots, \binom{m'_l}{B_l}. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Puisque $n'_i \neq m'_j$ quels que soient i et j, la somme (6.2) est égale d'après l'axiome de la somme à

$$\left[\!\left[f\binom{n'_1}{A_1}, \ldots, \binom{n'_k}{A_k} \right]\!\right] + \left[\!\left[g\binom{m'_1}{B_1}, \ldots, \binom{m'_l}{B_l} \right]\!\right] \tag{6.4}$$

La proposition du théorème résulte de là et de (6.3).

Théorème 6.2 (deuxième théorème de la somme).

$$\left[\!\left[\binom{n_i}{A_i + B_i} f\binom{n_1}{A_1}, \ldots, \binom{n_{i-1}}{A_{i-1}}, \binom{n_{i+1}}{A_{i+1}}, \ldots, \binom{n_k}{A_k} \right]\!\right] = \left[\!\left[\binom{n_i}{A_i} f\binom{n_1}{A_1}, \ldots, \binom{n_{i-1}}{A_{i-1}}, \binom{n_{i+1}}{A_{i+1}}, \ldots, \binom{n_k}{A_k} \right]\!\right] + \left[\!\left[\binom{n_i}{B_i} f\binom{n_i}{A_1}, \ldots, \binom{n_{i-1}}{A_{i-1}}, \binom{n_{i+1}}{A_{i+1}}, \ldots, \binom{n_k}{A_k} \right]\!\right]$$

$$\left(\binom{n_i}{A_i + B_i} \overset{\text{déf}}{=} \left[\!\left[\binom{n_i}{A_i + B_i} \right]\!\right] . \right)$$

Démonstration. D'après l'axiome μ_2, on peut sans nuire à la généralité admettre que $|n_j - n_i| > 2$ pour $j \neq i$. Alors

$$\left[\!\left[\binom{n_i}{A_i + B_i} f\binom{n_1}{A_1}, \ldots, \binom{n_{i-1}}{A_{i-1}}, \binom{n_{i+1}}{A_{i+1}}, \ldots, \binom{n_k}{A_k} \right]\!\right] - \left[\!\left[\binom{n_i}{A_i} f\binom{n_1}{A_1}, \ldots, \binom{n_{i-1}}{A_{i-1}}, \binom{n_{i+1}}{A_{i+1}}, \ldots, \binom{n_k}{A_k} \right]\!\right] -$$

$$-[\![{}^{n_i}_{B_i} f({}^{n_1}_{A_1}, \ldots, {}^{n_{i-1}}_{A_{i-1}}, {}^{n_{i+1}}_{A_{i+1}}, \ldots, {}^{n_k}_{A_k})]\!] =$$

$$=[\![({}^{n_i}_{A_i+B_i} - {}^{n_i+1}_{A_i} - {}^{n_i+2}_{B_i}) f({}^{n_1}_{A_1}, \ldots, {}^{n_{i-1}}_{A_{i-1}}, {}^{n_{i+1}}_{A_{i+1}}, \ldots, {}^{n_k}_{A_k})]\!].$$

Les axiomes de la somme, d'écartement et de correspondance nous donnent

$$[\![({}^{n_i}_{A_i+B_i}) - {}^{n_i+1}_{A_i} - {}^{n_i+2}_{B_i}]\!] = [\![{}^{n_i}_{A_i+B_i}]\!] - [\![{}^{n_i+1}_{A_i}]\!] - [\![{}^{n_i+2}_{B_i}]\!] =$$

$$= [\![{}^{1}_{A_i+B_i}]\!] - [\![{}^{1}_{A_i}]\!] - [\![{}^{1}_{B_i}]\!] = A_i + B_i - A_i - B_i = 0.$$

En appliquant l'axiome du zéro on obtient ce qu'on voulait.

Théorème 6.3 (théorème du produit). *Soient* $n_1, \ldots, n_k, p_1, \ldots, p_l, r_1, \ldots, r_m$ *des numéros tels que* $p_i < n_j$, $r_i > n_j$ *pour tous* i, j *et soit* $[\![f({}^{n_1}_{A_1}, \ldots, {}^{n_k}_{A_k})]\!] = F$. *Alors, pour tout symbole* $g(x_1, \ldots, x_l, y_1, \ldots, y_m)$, *on a la relation*

$$[\![f({}^{n_1}_{A_1}, \ldots, {}^{n_k}_{A_k})\, g({}^{p_1}_{B_1}, \ldots, {}^{p_l}_{B_l}, {}^{r_1}_{C_1}, \ldots, {}^{r_m}_{C_m})]\!] =$$

$$= [\![{}^{n_1}_{Fg}({}^{p_1}_{B_1}, \ldots, {}^{p_l}_{B_l}, {}^{r_1}_{C_1}, \ldots, {}^{r_m}_{C_m})]\!]$$

Démonstration. D'après μ_2, on peut sans nuire à la généralité admettre qu'il existe un numéro n différent de $n_1, \ldots, n_k$ et tel que $p_i < n < r_j$ pour tous i, j. Alors, l'axiome μ_1 et le théorème 6.1 nous donnent

$$[\![f({}^{n_1}_{A_1}, \ldots, {}^{n_k}_{A_k})\, g({}^{p_1}_{B_1}, \ldots, {}^{p_l}_{B_l}, {}^{r_1}_{C_1}, \ldots, {}^{r_m}_{C_m})]\!] -$$

$$-[\![{}^{n_1}_{Fg}({}^{p_1}_{B_1}, \ldots, {}^{p_l}_{B_l}, {}^{r_1}_{C_1}, \ldots, {}^{r_m}_{C_m})]\!] =$$

$$= [\![(f({}^{n_1}_{A_1}, \ldots, {}^{n_k}_{A_k}) - {}^{n}_{F})\, g({}^{p_1}_{B_1}, \ldots, {}^{p_l}_{B_l}, {}^{r_1}_{C_1}, \ldots, {}^{r_m}_{C_m})]\!].$$

Pour achever la démonstration il suffit de se référer à μ_6.

Théorème 6.4 (formule de changement des indices). *Si* $n_i = n_j - 1$ *et* $|n_l - n_i| > 2$ *pour* $l \neq i, j$, *on a la relation*

$$[\![f({}^{n_1}_{A_1}, \ldots, {}^{n_{i-1}}_{A_{i-1}}, {}^{n_i}_{A_i}, {}^{n_{i+1}}_{A_{i+1}}, \ldots, {}^{n_{j-1}}_{A_{j-1}}, \ldots, {}^{n_j}_{A_j}, {}^{n_{j+1}}_{A_{j+1}}, \ldots, {}^{n_k}_{A_k})]\!] -$$

$$-[\![f({}^{n_1}_{A_1}, \ldots, {}^{n_{i-1}}_{A_{i-1}}, {}^{n_j}_{A_i}, {}^{n_{i+1}}_{A_{i+1}}, \ldots, {}^{n_{j-1}}_{A_{j-1}}, {}^{n_i}_{A_j}, {}^{n_{j+1}}_{A_{j+1}}, \ldots, {}^{n_k}_{A_k})]\!] =$$

$$= [\![[\![A_j, {}^{n_i}_{A_i}]\!] \frac{\delta^2 f}{\delta x_i \delta x_j} ({}^{n_1}_{A_1}, \ldots, {}^{n_{i-1}}_{A_{i-1}}, {}^{n_i-1}_{A_i}, {}^{n_i+1}_{A_i}, \ldots$$

$$\ldots, {}^{n_{j-1}}_{A_{j-1}}, {}^{n_i-2}_{A_j}, {}^{n_i+1}_{A_j}, {}^{n_j+1}_{A_{j+1}}, \ldots, {}^{n_k}_{A_k})]\!], \qquad (6.5)$$

où $[A_j, A_i] = A_j A_i - A_i A_j$ *est le commutateur des opérateurs* A_j *et* A_i.

Démonstration. Prouvons ce théorème dans un cas élémentaire. Posons $A_1 = A$ et $A_2 = B$. La formule (6.5) devient alors

$$[\![f(\overset{2}{A}, \overset{1}{B})]\!] - [\![f(\overset{1}{A}, \overset{2}{B})]\!] =$$

$$\left[\!\!\left[\left[\overset{3}{A}, B \right] \frac{f(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}) - f(\overset{1}{A}, \overset{4}{B}) + f(\overset{5}{A}, \overset{4}{B}) - f(\overset{5}{A}, \overset{2}{B})}{(\overset{1}{A} - \overset{5}{A})(\overset{2}{B} - \overset{4}{B})} \right]\!\!\right]$$

Utilisons les axiomes μ_1, μ_2, μ_4 et le théorème 6.3 et mettons le second membre sous la forme

$$\left[\!\!\left[(\overset{3}{A}\overset{2}{B} - \overset{4}{B}\overset{3}{A}) \frac{f(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}) - f(\overset{1}{A}, \overset{4}{B}) + f(\overset{5}{A}, \overset{4}{B}) - f(\overset{5}{A}, \overset{2}{B})}{(\overset{1}{A} - \overset{5}{A})(\overset{2}{B} - \overset{4}{B})} \right]\!\!\right] =$$

$$= \left[\!\!\left[\overset{3}{A} \frac{f(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}) - f(\overset{1}{A}, \overset{4}{B}) + f(\overset{5}{A}, \overset{4}{B}) - f(\overset{5}{A}, \overset{2}{B})}{\overset{1}{A} - \overset{5}{A}} \right]\!\!\right] =$$

$$= \left[\!\!\left[\overset{3}{A} \frac{f(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}) - f(\overset{5}{A}, \overset{2}{B})}{\overset{1}{A} - \overset{5}{A}} \right]\!\!\right] + \left[\!\!\left[\overset{3}{A} \frac{f(\overset{5}{A}, \overset{4}{B}) - f(\overset{1}{A}, \overset{4}{B})}{\overset{1}{A} - \overset{5}{A}} \right]\!\!\right] =$$

$$= \left[\!\!\left[\overset{5}{A} \frac{f(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}) - f(\overset{5}{A}, \overset{2}{B})}{\overset{1}{A} - \overset{5}{A}} \right]\!\!\right] + \left[\!\!\left[\overset{1}{A} \frac{f(\overset{5}{A}, \overset{2}{B}) - f(\overset{1}{A}, \overset{2}{B})}{\overset{1}{A} - \overset{5}{A}} \right]\!\!\right] =$$

$$= \left[\!\!\left[(\overset{5}{A} - \overset{1}{A}) \frac{f(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}) - f(\overset{5}{A}, \overset{2}{B})}{\overset{1}{A} - \overset{5}{A}} \right]\!\!\right] = [\![-f(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}) + f(\overset{5}{A}, \overset{2}{B})]\!] =$$

$$= [\![f(\overset{2}{A}, \overset{1}{B})]\!] - [\![f(\overset{1}{A}, \overset{2}{B})]\!].$$

C.Q.F.D. Cette démonstration est valable *in extenso* pour le cas général.

Exhibons une formule de calcul des opérateurs dont les symboles sont des fonctions composées.

Théorème 6.5 (*K*-formule). *Soient f un* 1*-uple, g un* 2*-uple, A, B des opérateurs de M tels que* $[A, B] \in M$ *et* $\left[g(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}) \right] \in M$. *Alors*

$$f([\![g(\overset{1}{A}, \overset{2}{B})]\!]) = [\![f(g(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}))]\!] + [\![\left[\overset{5}{A}, B \right] \frac{\delta g}{\delta x_1}(\overset{3}{A}, \overset{7}{A}; \overset{9}{B}) \times$$

$$\times \frac{\delta g}{\delta x_2}(\overset{3}{A}, \overset{4}{B}, \overset{6}{B}) \frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(g(\overset{1}{A}, \overset{9}{B}), \overset{2}{[\![} g(\overset{1}{A}, \overset{2}{B})]\!], \overset{8}{[\![} g(\overset{1}{A}, \overset{2}{B})]\!])]\!]. \quad (6.6)$$

Une généralisation naturelle de la formule (6.6) est

$$\left[\!\left[f\left(\overset{1}{C_1}, \overset{2}{C_2}, \ldots, \overset{k}{C_k}, \overset{k+1}{\left[\!\left[g\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}\right)\right]\!\right]}, \overset{k+2}{C_{k+1}}, \overset{k+3}{C_{k+2}}, \ldots, \overset{s+1}{C_s}\right)\right]\!\right] =$$

$$= \left[\!\left[f\left(\overset{1}{C_1}, \overset{2}{C_2}, \ldots, \overset{k}{C_k}, g\left(\overset{k+1}{A}, \overset{k+2}{B}\right), \overset{k+3}{C_{k+1}}, \ldots, \overset{s+2}{C_s}\right)\right]\!\right] +$$

$$+ \left[\!\left[\left[\overset{k+5}{A}, B\right] \frac{\delta g}{\delta x_1}\left(\overset{k+3}{A}, \overset{k+7}{A}, \overset{k+9}{B}\right) \frac{\delta g}{\delta x_2}\left(\overset{k+3}{A}, \overset{k+4}{B}, \overset{k+6}{B}\right) \frac{d^2 f}{\delta x_{k+1}^2} \times\right.\right.$$

$$\left.\left. \times\left(\overset{1}{C_1}, \overset{2}{C_2}, \ldots, \overset{k}{C_k}, g\left(\overset{k+1}{A}, \overset{k+9}{B}\right), \overset{k+2}{\left[\!\left[g\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}\right)\right]\!\right]}, \overset{k+8}{\left[\!\left[g\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}\right)\right]\!\right]}, \overset{k+10}{C_{k+1}} \ldots \overset{s+9}{C_s}\right)\right]\!\right] . \quad (6.7)$$

La formule (6.6) et sa généralisation (6.7) seront appelées *K-formules*.

Démonstration du théorème 6.5. On a l'identité:

$$f(z) = f(g(x_1, x_2)) + (z - g(x_1, x_2)) \frac{\delta f}{\delta x}(g(x_1, x_2); z).$$

En appliquant aux deux membres l'opération $\mu: \left(\overset{2}{z} \to g, \overset{1}{x_1} \to A, \overset{3}{x_2} \to B\right)$ où $g = \left[\!\left[g\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}\right)\right]\!\right]$, et en utilisant le premier théorème de la somme on obtient:

$$\left[\!\left[f(g)\right]\!\right] = \left[\!\left[f\left(g\left(\overset{1}{A}, \overset{3}{B}\right)\right)\right]\!\right] + \left[\!\left[\left(\overset{2}{g} - g\left(\overset{1}{A}, \overset{3}{B}\right)\right) \frac{\delta f}{\delta x}\left(g\left(\overset{1}{A}, \overset{3}{B}\right), \overset{2}{g}\right)\right]\!\right].$$

En appliquant l'axiome μ_2 et en permutant les indices de $\overset{2}{A}$ et $\overset{3}{g}$ conformément au théorème 6.4, on trouve

$$\left[\!\left[f(g)\right]\!\right] = \left[\!\left[f\left(g\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}\right)\right)\right]\!\right] + \left[\!\left[\left(\overset{4}{g} - g\left(\overset{2}{A}, \overset{5}{B}\right)\right) \frac{\delta f}{\delta x}\left(g\left(\overset{1}{A}, \overset{5}{B}\right), \overset{3}{g}\right)\right]\!\right] =$$

$$= \left[\!\left[f\left(g\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}\right)\right)\right]\!\right] + \left[\!\left[\overset{4}{g} \frac{\delta f}{\delta x}\left(g\left(\overset{1}{A}, \overset{5}{B}\right), \overset{2}{g}\right) - g\left(\overset{3}{A}, \overset{5}{B}\right) \frac{\delta f}{\delta x}\left(g\left(\overset{1}{A}, \overset{5}{B}\right), \overset{2}{g}\right)\right]\!\right] +$$

$$+ \left[\!\left[\left[A, \overset{4}{g}\right] \frac{\delta g}{\delta x_1}\left(\overset{3}{A}, \overset{5}{A}, \overset{7}{B}\right) \frac{\delta^2 f}{\delta x^2}\left(g\left(\overset{1}{A}, \overset{7}{B}\right), \overset{2}{g}, \overset{6}{g}\right)\right]\!\right].$$

L'axiome μ_2 et le théorème 6.3 nous donnent

$$\left[\!\left[\overset{4}{g} \frac{\delta f}{\delta x}\left(g\left(\overset{1}{A}, \overset{5}{B}\right), \overset{2}{g}\right)\right]\!\right] = \left[\!\left[g\left(\overset{3}{A}, \overset{4}{B}\right) \frac{\delta f}{\delta x}\left(g\left(\overset{1}{A}, \overset{5}{B}\right), \overset{2}{g}\right)\right]\!\right].$$

En utilisant cette formule et en appliquant encore les théorèmes 6.3 et 6.4, on trouve

$$[\![f(g)]\!] = [\![f\left(g\left(\overset{1}{A},\ \overset{2}{B}\right)\right)]\!] + \left[\!\left[\left(g\left(\overset{3}{A},\ \overset{4}{B}\right) - g\left(\overset{3}{A},\ \overset{4}{B}\right)\right) \frac{\delta f}{\delta x}\left(g\left(\overset{1}{A},\ \overset{5}{B}\right),\ \overset{2}{g}\right)\right]\!\right] +$$

$$+ \left[\!\left[\left[\overset{5}{A},\ \overset{5}{B}\right] \frac{\delta g}{\delta x_1}\left(\overset{3}{A},\ \overset{7}{A},\ \overset{9}{B}\right) \frac{\delta g}{\delta x_2}\left(\overset{3}{A},\ \overset{4}{B},\ \overset{6}{B}\right) \frac{\delta^2 f}{\delta x^2}\left(g\left(\overset{1}{A},\ \overset{9}{B}\right),\ \overset{2}{g},\ \overset{8}{g}\right)\right]\!\right].$$

Comme $g(x_1, x_2) - g(x_1, x_2) = 0$, pour achever la démonstration il reste à se référer à l'axiome μ_1.

Théorème 6.6 (développement en série de Newton). *Soient* A, $(A+B)$, $B \in M$, f *un* 1*-uple. Alors*

$$[\![f(A+B)]\!] = [\![f(A)]\!] + \sum_{k=1}^{m-1} \left[\!\left[\overset{2}{B} \ldots \overset{2k}{B} \frac{\delta^k f}{\delta x^k}\left(\overset{1}{A},\ \ldots,\ \overset{2k+1}{A}\right)\right]\!\right] +$$

$$+ \left[\!\left[\overset{2}{B} \ldots \overset{2m}{B} \frac{\delta^m f}{\delta x^m}\left(\overset{1}{A}, \overset{3}{A},\ \ldots,\ \overset{2m-1}{A}, \overset{2m+1}{A+B}\right)\right]\!\right]. \qquad (6.8)$$

La remarque relative aux deux théorèmes précédents est valable aussi pour celui-ci. Nous laissons au lecteur le soin de formuler ce théorème sous la forme générale.

Démonstration. Etablissons d'abord la formule

$$[\![\overset{2}{T_1} \ldots \overset{2r}{T_r}\, \varphi\left(\overset{1}{A_1},\ \ldots,\ \overset{2r-1}{A_r},\ \overset{2r+1}{A+B}\right)]\!] =$$

$$= [\![\overset{2}{T_1} \ldots \overset{2r}{T_r}\, \varphi\left(\overset{1}{A_1},\ \ldots,\ \overset{2r-1}{A_r},\ \overset{2r+1}{A}\right)]\!] +$$

$$+ \left[\!\left[\overset{2}{T_1} \ldots \overset{2r}{T_r}\, \overset{2r+2}{B}\, \frac{\delta\varphi}{\delta x_{r+1}}\left(\overset{1}{A_1},\ \ldots,\ \overset{2r-1}{A_r},\ \overset{2r+1}{A},\ \overset{2r+3}{A+B}\right)\right]\!\right], \qquad (6.9)$$

où $B, A_1, \ldots, A_r, A, A+B, T_1, \ldots, T_r \in M$, φ est un $(r+1)$-uple. Pour simplifier on omettra $T_1, \ldots, T_r$; $A_1, \ldots, A_r$, c'est-à-dire qu'on prouvera que

$$[\![f(A+B)]\!] - [\![f(A)]\!] = \left[\!\left[\overset{2}{B} \frac{\delta f}{\delta x}\left(\overset{1}{A},\ \overset{3}{A+B}\right)\right]\!\right]. \qquad (6.10)$$

La formule générale (6.9) s'établit comme la formule (6.10) mais avec des calculs plus laborieux.

On a l'identité

$$f(x_2) - f(x_1) - (x_2 - x_1) \frac{\delta f}{\delta x}(x_2, x_1) = 0.$$

Appliquons l'opération $\mu : (x_2 \to \overset{2}{A+B},\ x_1 \to \overset{1}{A})$; l'axiome μ_1 nous dit que

$$\left[\!\left[f\left(\overset{2}{A+B}\right) - f\left(\overset{1}{A}\right) - \left(\overset{2}{A+B} - \overset{1}{A}\right) \frac{\delta f}{\delta x}\left(\overset{2}{A+B},\ \overset{1}{A}\right)\right]\!\right] = 0.$$

De là il vient en vertu des axiomes μ_1, μ_2 et du théorème 6.2 :

$$[\![f(A+B)]\!]-[\![f(A)]\!]=$$

$$=\left[\!\!\left[\left(\overset{3}{A}+B\right)\frac{\delta f}{\delta x}\left(\overset{3}{A}+B,\ \overset{1}{A}\right)-\overset{1}{A}\,\frac{\delta f}{\delta x}\left(\overset{3}{A}+B,\ \overset{1}{A}\right)\right]\!\!\right]=$$

$$=\left[\!\!\left[\left(\overset{2}{A}+B\right)\frac{\delta f}{\delta x}\left(\overset{3}{A}+B,\ \overset{1}{A}\right)\right]\!\!\right]-\left[\!\!\left[\overset{2}{A}\,\frac{\delta f}{\delta x}\left(\overset{3}{A}+B,\ \overset{1}{A}\right)\right]\!\!\right].$$

En appliquant encore le théorème 6.2, on est conduit à l'égalité

$$[\![f(A+B)]\!]-[\![f(A)]\!]=\left[\!\!\left[\overset{2}{B}\,\frac{\delta f}{\delta x}\left(\overset{3}{A}+B,\ \overset{1}{A}\right)\right]\!\!\right].$$

Ce qui prouve la formule (6.9). En l'appliquant au dernier terme du second membre de (6.8), on obtient par récurrence le développement annoncé.

C.Q.F.D.

Passons maintenant à la définition du spectre d'un couple d'opérateurs dans une algèbre à μ-structure comme nous l'avons fait pour les séries entières convergentes d'opérateurs ordonnés.

Définition. Soient A, $B\in M$. Désignons par K l'ensemble de tous les symboles $f(x_1, x_2)$ que l'opération $\mu\colon\left(\overset{1}{x_1}\to A,\ \overset{2}{x_2}\to B\right)$ transforme en 0 :

$$(f(x_1, x_2)\in K)\Leftrightarrow\left([\![f\left(\overset{1}{A},\ \overset{2}{B}\right)]\!]=0\right).$$

On appellera *spectre* σ *d'un couple* $\overset{1}{A}$, $\overset{2}{B}$ l'intersection des ensembles des zéros de toutes les fonctions de K :

$$((x_1, x_2)\in\sigma)\Leftrightarrow(f(x_1, x_2)=0,\quad \forall f\in K).$$

Théorème 6.7. *L'ensemble K est un idéal dans l'algèbre des 2-uples.*

Démonstration. Soit $f(x_1, x_2)\in K$; montrons que $g(x_1, x_2)f(x_1, x_2)\in K$ pour tout $g\in\mathscr{S}^\infty(\mathbf{R}^n)$. Il nous faut donc prouver que si $[\![f\left(\overset{1}{A},\ \overset{2}{B}\right)]\!]=0$, alors $[\![g\left(\overset{1}{A},\ \overset{2}{B}\right)f\left(\overset{1}{A},\ \overset{2}{B}\right)]\!]=0$. L'axiome d'écartement des indices nous donne

$$[\![g\left(\overset{1}{A},\ \overset{2}{B}\right)f\left(\overset{1}{A},\ \overset{2}{B}\right)]\!]=[\![g\left(\overset{1}{A},\ \overset{4}{B}\right)f\left(\overset{2}{A},\ \overset{3}{B}\right)]\!],\qquad(6.11)$$

et de plus le second membre de (6.11) est nul en vertu de l'axiome du zéro, puisque $[\![f\left(\overset{2}{A},\ \overset{3}{B}\right)]\!]=[\![f\left(\overset{1}{A},\ \overset{2}{B}\right)]\!]=0$ en vertu de l'axiome d'écartement des indices. C.Q.F.D.

De nombreux corollaires (classiques) peuvent être déduits de ce fait

fondamental. Arrêtons-nous sur les deux plus importants. Renforçons préalablement l'axiome μ_4.

μ_4') Si $\{f_j(x_1, \ldots, x_k)\}$ est une suite de symboles telle qu'au voisinage de tout point fixe $(x_1^0, \ldots, x_k^0)$ seul un nombre fini de termes de la série $\sum_{j=1}^{\infty} \{f_j(x_1, \ldots, x_k)\}$ sont différents de 0 et seul un nombre fini d'opérateurs $\left[\!\left[f_j \binom{n_1}{A_1}, \ldots, \binom{n_k}{A_k} \right]\!\right]$ sont différents de l'opérateur nul, alors

$$\left[\!\left[\left(\sum_{j=1}^{\infty} f_j \right) \binom{n_1}{A_1}, \ldots, \binom{n_k}{A_k} \right]\!\right] = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\!\left[f_j \binom{n_1}{A_1}, \ldots, \binom{n_k}{A_k} \right]\!\right].$$

Théorème 6.8. *Si l'axiome μ_4' est satisfait, le spectre de tout couple d'opérateurs de M n'est pas vide.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde en supposant que $\sigma = \varnothing$. Pour tout point fixe $(x_1^0, x_2^0) \in \mathbf{R}^2$, on peut exhiber une fonction $f(x_1, x_2) \in K$ strictement positive dans un voisinage U de (x_1^0, x_2^0). Tout ensemble compact dans $\mathbf{R}^2$ admet un recouvrement fini de tels voisinages; donc, il existe une fonction de K strictement positive sur cet ensemble. Recouvrons le plan $\mathbf{R}^2$ de carrés q_{ij}:

$$q_{ij} = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : -\varepsilon + i \leqslant x_1 \leqslant i + 1 + \varepsilon, j - \varepsilon \leqslant x_2 \leqslant j + 1 + \varepsilon\},$$

$i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \varepsilon > 0$ est un nombre fixe.

Pour chaque carré q_{ij} considérons une fonction $f_{ij}(x_1, x_2) \in K$ strictement positive sur q_{ij}. Soit par ailleurs $\varphi(x)$, $x \in \mathbf{R}$, une fonction positive indéfiniment différentiable telle que $\varphi(x) = 1$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $\varphi(x) = 0$ pour $x < -\varepsilon/2$ et pour $x > 1 + \varepsilon/2$. Alors, la fonction

$$f(x_1, x_2) = \sum_{i, j = -\infty}^{\infty} f_{ij}(x_1, x_2)\, \varphi(x_1 - i)\, \varphi(x_2 - j)$$

est partout strictement positive et $f_{ij}(x_1, x_2)/f(x_1, x_2) \in K$ en vertu du théorème 6.7. Comme $\sum f_{ij}(x_1, x_2)/f(x_1, x_2) = 1$, on obtient d'après μ_3 et μ_4'

$$0 = \left[\!\left[\sum \frac{1}{f\binom{1}{A}, \binom{2}{B}}\, f_{ij} \binom{1}{A}, \binom{2}{B} \right]\!\right] = \left[\!\left[1 \binom{1}{A}, \binom{2}{B} \right]\!\right] = 1,$$

où $1(x_1, x_2)$ est une fonction identiquement égale à un et le 1 du second membre est l'opérateur unité. Cette contradiction prouve le théorème.

Définition. Le complémentaire du spectre σ sera appelé *ensemble résolvant du couple* $\binom{1}{A}, \binom{2}{B}$ et noté $\rho\binom{1}{A}, \binom{2}{B}$.

Exhibons maintenant un critère qui nous servira à déterminer le spectre uniquement à l'aide de fonctions monodimensionnelles (c'est-à-dire ordinaires) d'opérateurs A et B.

Théorème 6.9. *Pour qu'un point (λ, μ) appartienne à $\rho\binom{1}{A}, \binom{2}{B}$, il est nécessaire et suffisant qu'il existe des nombres $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ et des fonctions*

à support borné $p_\lambda^\varepsilon(x_1)$ *et* $p_\mu^\delta(x_2)$ *strictement positives pour* $x_1=\lambda$ *et* $x_2=\mu$, *et nulles pour* $|x_1-\lambda|>\varepsilon$ *et* $|x_2-\mu|>\delta$ *respectivement telles que* $p_\mu^\delta(B)\,p_\lambda^\varepsilon(A)=0$.

Démonstration. Suffisance. L'axiome μ_5 entraîne

$$p_\mu^\delta(B)\,p_\lambda^\varepsilon(A)=\left[\!\left[p_\mu^\delta\binom{2}{B}\,p_\lambda^\varepsilon\binom{1}{A}\right]\!\right].$$

Donc, $p_\mu^\delta(x_2)\,p_\lambda^\varepsilon(x_1)\in K$ par hypothèse, et cette fonction n'est pas nulle au point (λ, μ). Donc, $(\lambda, \mu)\notin\sigma$ par définition du spectre. Ceci prouve la suffisance.

Nécessité. Supposons que $(\lambda, \mu)\in\rho\binom{1\ 2}{A, B}$; il existe alors une fonction $\varphi\in K$ strictement positive au point (λ, μ), donc strictement positive dans son $(2\varepsilon, 2\delta)$-voisinage. Soient p_λ, p_μ des fonctions de $\mathscr{S}^\infty(\mathbf{R})$ nulles respectivement à l'extérieur de l'ε-voisinage de λ et du δ-voisinage de μ.

Comme $\varphi(A, B)=0$, on a

$$\left[\!\left[\varphi\binom{1\ 2}{A, B}\,p_\mu\binom{2}{B}\,p_\lambda\binom{1}{A}\right]\!\right]=p_\mu(B)\left[\!\left[\varphi,\binom{1\ 2}{A, B}\right]\!\right]p_\lambda(A)=0.$$

Soit $\psi(x_1, x_2)\in\mathscr{S}^\infty(\mathbf{R}^2)$ une fonction positive, égale à 0 dans le (ε, δ)-voisinage de (λ, μ) et à $1-\varphi(x_1, x_2)$ à l'extérieur du $(2\varepsilon, 2\delta)$-voisinage de (λ, μ). Il est évident que

$$[\psi(x_1, x_2)+\varphi(x_1, x_2)]\,p_\mu(x_2)\,p_\lambda(x_1)=\varphi(x_1, x_2)\,p_\mu(x_1)\,p_\lambda(x_2)$$

et

$$[\psi(x_1, x_2)+\varphi(x_1, x_2)]^{-1}\in\mathscr{S}^\infty(\mathbf{R}^2).$$

Donc,

$$\left[\!\left[\left[\binom{1\ 2}{A, B}+\varphi\binom{1\ 2}{A, B}\right]p_\mu\binom{2}{B}\,p_\lambda\binom{1}{A}\right]\!\right]=0,$$

et en vertu des axiomes μ_2 et μ_6

$$\left[\!\left[\left[\psi\binom{1\ 2}{A, B}+\varphi\binom{1\ 2}{A, B}\right]^{-1}\left[\varphi\binom{1\ 2}{A, B}+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\psi\binom{1\ 2}{A, B}\right]p_\mu\binom{2}{B}\,p_\lambda\binom{1}{A}\right]\!\right]=0,$$

d'où

$$\left[\!\left[p_\mu\binom{2}{B}\,p_\lambda\binom{1}{A}\right]\!\right]=0,$$

et enfin $p_\mu(B)\,p_\lambda(A)=0$ d'après l'axiome μ_5. C.Q.F.D.

Définissons maintenant de façon analogue le spectre $\sigma(A)$ et l'ensemble résolvant $\rho(A)$ d'un seul opérateur A. Il est évident que le spectre d'un seul opérateur sera justiciable des mêmes théorèmes. Le théorème (6.9) entraîne immédiatement le

Théorème 6.10. *On a l'inclusion*

$$\sigma\binom{1\ \ 2}{A,\ B} \subset \sigma(A) \times \sigma(B).$$

Des résultats plus consistants sur le spectre seront acquis aux chapitres III et IV. Nous ne pourrons établir ces résultats qu'après avoir introduit la notion d'algèbre normée et étudié ses propriétés.

Remarque. Soit $\mathscr{A}$ une algèbre topologique et supposons que l'ensemble des symboles est muni aussi d'une topologie pour laquelle l'ensemble des fonctions d'un nombre fixe d'arguments $x_1, \ldots, x_n$ est une algèbre topologique. Dans ce cas on peut introduire la notion d'*algèbre topologique à* μ*-structure*, mais il faut remplacer l'axiome μ_6 par le suivant.

T_1) Pour tous $A_1, \ldots, A_k, B_1, \ldots, B_l, C_1, \ldots, C_m \in M$, tous numéros $n_1, \ldots, n_k, p_1, \ldots, p_l, r_1, \ldots, r_m$ vérifiant les conditions de l'axiome μ_6 et tout $(l+m)$-uple g, la relation

$$\left[\!\left[f_n\binom{n_1}{A_1, \ldots, A_k}\right]\!\right] \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty,$$

entraîne

$$\left[\!\left[f_n\binom{n_1}{A_1, \ldots, A_k}\, g\binom{p_1}{B_1, \ldots, B_l}\binom{r_1}{C_1, \ldots, C_m}\right]\!\right] \to 0.$$

De plus, il faut adjoindre l'axiome:

T_2) Si une suite de symboles $f_n(x_1, \ldots, x_n)$ converge vers 0, alors il en est de même de la suite

$$\left[\!\left[f_n\binom{n_1}{A_1, \ldots, A_k}\right]\!\right].$$

De nombreux théorèmes relatifs au spectre du chapitre IV peuvent être généralisés sans difficultés à une algèbre topologique à μ-structure.

Cette axiomatique ne renferme pas l'opération « prime » mentionnée au § 4. Construisons axiomatiquement une structure généralisant la μ-structure.

Soit $f(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+l})$ un symbole. En traitant $x_1, \ldots, x_k$ comme des paramètres et en appliquant l'opération

$$\mu\colon \left(x_{k+1} \to \overset{n_1}{A_1}, \ldots, x_{k+l} \to \overset{n_l}{A_l}\right),$$

on obtient l'opérateur

$$\left[\!\left[f\left(x_1, \ldots, x_k, \overset{n_1}{A_1}, \ldots, \overset{n_l}{A_l}\right)\right]\!\right] \overset{\text{déf}}{=} \mathscr{F}(x_1, \ldots, x_k),$$

qui dépend des paramètres $x_1, \ldots, x_k$, c'est-à-dire une application de $\mathbf{R}^k$ dans $\mathscr{A}$.

Pour simplifier on se bornera au cas $k=1$; nous laissons au lecteur le soin de la généralisation évidente au cas $k>1$. Soient $g(x_1, x_2)$ un symbo-

le, A un opérateur. Considérons le couple ordonné $\overset{2}{\mathscr{F}}(x_1)$ et $\overset{1}{A}$. L'opération μ se généralise à ce cas. Plus exactement, l'opération

$$\mu: \left(x_1 \to \overset{1}{A},\ x_2 \to \overset{2}{\mathscr{F}}(x_1)\right)$$

associe à une fonction $g(x_1, x_2)$ un opérateur qui sera désigné par

$$\left[\!\left[g\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{\mathscr{F}}\left(\overset{1}{A}\right)\right)\right]\!\right] \sim \left[\!\left[g\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{\left[\!\left[f\left(\overset{1'}{A}, \overset{n_1}{A_1}, \ldots, \overset{n_l}{A_l}\right)\right]\!\right]}\right)\right]\!\right].$$

De façon analogue, si g est un $2k$-uple, l'opération

$$\mu: \left(x_1 \to \overset{1}{A},\ x_2 \to \overset{2}{F}(x_1),\ \ldots,\ x_{2k-1} \to \overset{k}{B},\ x_{2k} \to \overset{2k}{H}(x_{2k-1})\right),$$

où

$$F(x_1) = \left[\!\left[f\left(x_1, \overset{m_1}{A_1}, \ldots, \overset{m_l}{A_l}\right)\right]\!\right], \ \ldots, \ G(x_{2k-1}) = \left[\!\left[h\left(x_{2k-1}, \overset{n_1}{B_1}, \ldots, \overset{n_p}{B_{n_p}}\right)\right]\!\right],$$

lui associe l'opérateur

$$\left[\!\left[g\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{F}\left(\overset{1}{A}\right), \ldots, \overset{2k-1}{B}, \quad \overset{2k}{G}\left(\overset{2k-1}{B}\right)\right)\right]\!\right].$$

Pour éviter les expressions encombrantes, on formulera les axiomes μ_1 à μ_5 uniquement pour les 2-uples et l'axiome μ_6 pour un 4-uple.

La généralisation des énoncés au cas de $2k$-uples arbitraires est évidente.

μ_1) **Axiome d'homogénéité**: si $\alpha \in \mathbf{R}$, alors

$$\left[\!\left[\alpha g\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{\mathscr{F}}\left(\overset{1}{A}\right)\right)\right]\!\right] = \alpha \left[\!\left[g\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{\mathscr{F}}\left(\overset{1}{A}\right)\right)\right]\!\right].$$

μ_2) **Axiome d'écartement**:

$$\left[\!\left[g\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{\mathscr{F}}\left(\overset{1}{A}\right)\right)\right]\!\right] = \left[\!\left[g\left(\overset{n_1}{A}, \overset{n_2}{\mathscr{F}}\left(\overset{n_1}{A}\right)\right)\right]\!\right],$$

où $n_1 > n_2$ si $\mathscr{F}(x)$ et A ne commutent pas, et n_1 et n_2 sont quelconques si $\mathscr{F}(x)$ et A commutent (pour tout x).

μ_3) **Axiome de correspondance**:

$$\left[\!\left[\overset{2}{\left[\!\left[g\left(\overset{1'}{A}, f\left(\overset{1'}{A}, \overset{n_1}{A_1}, \ldots, \overset{n_l}{A_l}\right)\right)\right]\!\right]}\right]\!\right] = \left[\!\left[g\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{\left[\!\left[f\left(\overset{1'}{A}, \overset{n_1}{A}, \ldots, \overset{n_l}{A^l}\right)\right]\!\right]}\right)\right]\!\right].$$

μ_4) **Axiome de la somme**:

$$\left[\!\left[g\left(\overset{n_1}{A}, \overset{n_2}{\mathscr{F}}\left(\overset{n_1}{A}\right)\right) + f\left(\overset{m_1}{B}, \overset{m_2}{\Phi}\left(\overset{m_1}{B}\right)\right)\right]\!\right] =$$

$$= \left[\!\left[g\left(\overset{n_1}{A}, \overset{n_2}{\mathscr{F}}\left(\overset{n_1}{A}\right)\right)\right]\!\right] + \left[\!\left[f\left(\overset{m_1}{B}, \overset{m_2}{\Phi}\left(\overset{m_1}{B}\right)\right)\right]\!\right].$$

μ_5) **Axiome du produit**: si $m_i < n_j$ pour tous i, j, alors

$$[\![g\left(A, \overset{n_2}{\mathscr{F}}\left(A\right)\right) f\left(B, \overset{m_2}{\Phi}\left(B\right)\right)]\!] = [\![g\left(A, \overset{n_2}{\mathscr{F}}\left(A\right)\right)]\!] \, [\![f\left(B, \overset{m_2}{\Phi}\left(B\right)\right)]\!].$$

μ_6) **Axiome du zéro**: si $[\![g\left(A, \overset{n_2}{\mathscr{F}}\left(A\right)\right)]\!] = 0$, $p_i > n_i$, $r_j < n_j$, $i, j = 1, 2$, alors

$$[\![f\left(B, \overset{p_2}{\Phi}\left(B\right), C, \overset{r_2}{\Psi}\left(C\right)\right) g\left(A, \overset{n_2}{\mathscr{F}}\left(A\right)\right)]\!] = 0.$$

Exemple de μ-structure. Soit $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ l'espace vectoriel des fonctions $f(x_1, \ldots, x_n)$ indéfiniment différentiables sur $\mathbf{R}^n$ et nulles à l'extérieur d'une boule (qui diffère avec chaque fonction) de $\mathbf{R}^n$. Soient D_j et $\hat{x}_j$ des opérateurs dans $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ définis par les formules

$$D_j f(x) = -i\partial f(x)/\partial x_j, \qquad \hat{x}_j f(x) = x_j f(x).$$

On désignera aussi D_j par $-i\partial/\partial x_j$ et $\hat{x}_j$ par x_j; on se servira de la dernière notation dans les cas où l'opérateur x_j ne risquera pas d'être confondu avec la variable indépendante x_j.

Soit $P(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n)$ un polynôme. Considérons l'opérateur différentiel $P\left(\overset{2}{x_1}, \ldots, \overset{2}{x_n}; \overset{1}{D_1}, \ldots, \overset{1}{D_n}\right)$. La transformation de Fourier nous permet de mettre cet opérateur sous une forme simple. La transformée de Fourier de la fonction $f(x_1, \ldots, x_n)$ est

$$\tilde{f}(p) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-ip\cdot x} f(x)\, dx,$$

où $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $p = (p_1, \ldots, p_n)$, $p \cdot x = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$. On a la formule d'inversion

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^n} e^{ip\cdot x} \tilde{f}(p)\, dp.$$

Il est immédiat de voir que $\widetilde{D_j f(x)} = p_j \tilde{f}(p)$. Ceci entraîne la formule

$$P\left(\overset{2}{x_1}, \ldots, \overset{2}{x_n}, \overset{1}{D_1}, \ldots, \overset{1}{D_n}\right) f(x) \overset{\text{déf}}{=} P\left(\overset{2}{x}, \overset{1}{D}\right) f(x) =$$

$$= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{ip\cdot x} P(x, p)\, dp \int_{\mathbf{R}^n} e^{-ip\cdot\xi} f(\xi)\, d\xi. \qquad (6.15)$$

Le second membre de la formule (6.15) reste en vigueur si l'on remplace le polynôme par une fonction continue ne croissant pas très vite pour $|p| \to \infty$ (par exemple, pas plus vite qu'une puissance de $|p|$). Nous sommes conduits à la définition suivante.

Définition. On appelle *opérateur pseudo-différentiel de symbole* $H(x, p)$ un opérateur $H\left(\begin{matrix}2 & 1\\ x, & D\end{matrix}\right)$ dont l'action est définie par la formule *)

$$H\left(\begin{matrix}2 & 1\\ x, & D\end{matrix}\right) f(x) \stackrel{\text{déf}}{=} (2\pi)^{-n} \int\int_{\mathbf{R}^{2n}} e^{ip\cdot(x-\xi)} H(x, p) f(\xi)\, d\xi. \tag{6.16}$$

L'opérateur $H\left(\begin{matrix}1 & 2\\ x, & D\end{matrix}\right)$ se définit de façon analogue:

$$H\left(\begin{matrix}1 & 2\\ x, & D\end{matrix}\right) f(x) \stackrel{\text{déf}}{=} (2\pi)^{-n} \int\int_{\mathbf{R}^{2n}} e^{ip\cdot(x-\xi)} H(\xi, p) f(\xi)\, d\xi. \tag{6.17}$$

L'ensemble des opérateurs $H\left(\begin{matrix}2 & 1\\ x, & D\end{matrix}\right)$ est une algèbre commutative $\mathfrak{A}_{ps}\left(\begin{matrix}2 & 1\\ x, & D\end{matrix}\right)$. Donc,

$$H\left(\begin{matrix}2 & 1\\ x, & D\end{matrix}\right) L\left(\begin{matrix}2 & 1\\ x, & D\end{matrix}\right) f(x) = (2\pi)^{-n} \int\int_{\mathbf{R}^{2n}} e^{ip\cdot(x-\xi)} H(x, p) L(x, p) f(\xi)\, d\xi.$$

On définit de façon analogue les opérateurs $p = ih\,\partial/\partial x$ et x sur $f(x, h) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n) \times \mathscr{S}^\infty(\mathbf{R})$ et l'algèbre non commutative qu'ils engendrent.

Prenons maintenant pour M l'ensemble des opérateurs

$$A_k = ih\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial S_k}{\partial x}, \qquad B_k = x;$$

$k = 1, 2, \ldots$, $S_k = S_k(x)$ est un ensemble de fonctions appartenant à $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Remarque. L'opérateur vectoriel $A_k = ih\,\partial/\partial x + \partial S_k(x)/\partial x$ a pour composantes $A_k^j = ih\,\partial/\partial x_j + \partial S_k/\partial x_j$. Il est immédiat de voir que ces composantes commutent entre elles, donc l'opérateur vectoriel A_k peut être coiffé d'un numéro.

Définissons l'opération μ pour $\Phi(x) \in \mathscr{S}^\infty(\mathbf{R}^n)$. Soient $F_{x\to p} f(x) \stackrel{\text{déf}}{=}$ $\stackrel{\text{déf}}{=} h^{-n/2} \tilde{f}(p/h)$; $\mathscr{F}^*_{p\to x} g(p) \stackrel{\text{déf}}{=} h^{-n/2} \tilde{g}(-p/h)$. Considérons pour simplifier le cas de deux variables. Posons

$$\Phi\left(\begin{matrix}n_1 & m_1\\ A_1, & B_1\end{matrix}\right) \varphi(x) = \Phi\left(\begin{matrix}1 & 2\\ A_1, & B_1\end{matrix}\right) \varphi(x) \stackrel{\text{déf}}{=} e^{-\frac{i}{h}S_1(x)} \Phi\left(\begin{matrix}1 & 2\\ p, & x\end{matrix}\right) e^{\frac{i}{h}S_1(x)} \varphi(x)$$

pour $n_1 < m_1$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Vérifions maintenant la validité des axiomes μ_1 à μ_6.

Tous les axiomes hormis la deuxième partie de l'axiome d'écartement sont valables par définiton. Ladite deuxième partie résulte directement de la relation $F^*_{p\to x} F_{x\to p} = 1$. Pour la validité de μ_6 voir chapitre IV.

*) Cette formule définit $H\left(\begin{matrix}2 & 1\\ x, & D\end{matrix}\right)$ sur les distributions (cf. chap. IV).

A noter que la formule de commutation du hamiltonien à l'exponentielle est maintenant valable par définition. On définit de façon analogue une opération renfermant l'opération «prime».

Voici encore une généralisation de la μ-structure dans laquelle les symboles sont des fonctions définies sur un tore M^m (le produit de m cercles) à m dimensions.

Soient des fonctions indéfiniment différentiables sur M^m à valeurs dans $\mathscr{S}^\infty(\mathbf{R}^n)$. Désignons ces fonctions par $f(\alpha, x_1, \ldots, x_k)$, où $\alpha \in M^m$ sont des coordonnées angulaires sur le tore, $x_1, \ldots, x_k$ des variables réelles, l'indice k dépend de f.

Considérons encore l'algèbre $\mathscr{A}$ et un sous-ensemble M de $\mathscr{A}$. Soit par ailleurs M_m un sous-ensemble de M composé de m éléments de M commutant l'un à l'autre; $B=(B_1, \ldots, B_m)\subset M_m$. Pour toute collection finie $A_1, \ldots, A_k \in M$ d'opérateurs et toute collection de numéros $n_1, \ldots, n_{k+1}$ vérifiant la condition $n_i \neq n_j$ si A_i et A_j commutent, et la condition $n_i \neq n_{k+1}$ si A_i et $B_s \in M_m$ ne commutent pas, est définie l'opération $\mu\left(x_1 \to \overset{n_1}{A_1}, \ldots, x_k \to \overset{n_k}{A_k}, \alpha \to \overset{n_{k+1}}{B}\right)$, qui à tout symbole $f(x_1, \ldots, x_n, \alpha)$ associe un opérateur A de $\mathscr{A}$ noté

$$A=\left[\!\left[f\left(\overset{n_1}{A_1}, \ldots, \overset{n_k}{A_k}, \overset{n_{k+1}}{B}\right)\right]\!\right].$$

Cette opération qui satisfait tous les axiomes précédents (comme si $\alpha \in \mathbf{R}^m$) hormis l'axiome de correspondance dont la validité sera exigée uniquement par rapport à la variable x sera complétée par la condition suivante:

μ_3') Pour toute fonction $f(\alpha)$, $\alpha \in M^m$, réelle indéfiniment différentiable et pour la fonction périodique $f_*(x)$, $x \in \mathbf{R}^m$, qui lui correspond est réalisée la condition

$$\left[\!\left[f\left(\overset{n_k}{B}\right)\right]\!\right]=\left[\!\left[f_*\left(\overset{1}{B}\right)\right]\!\right].$$

Exercice. Considérons l'algèbre M engendrée par des éléments x et p tels que $[x, p]=ih$. Pour symbole $f(x_1, \alpha)$ prenons une fonction définie sur un cercle de rayon 1 à valeurs dans $\mathscr{S}^\infty$.

Définir une μ-structure avec l'axiome μ_3' en prenant pour M_1 un opérateur x tel que les éléments de $\mathscr{A}$ soient des opérateurs agissant sur des fonctions sur $\mathbf{R}$ et que soit réalisée l'égalité

$$f\left(\overset{1}{p}, \overset{2}{x}\right)\varphi(\alpha)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nh, \alpha)e^{in\alpha}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-iny}\varphi(y)\,dy.$$

La classe $\mathscr{S}^\infty$ joue un rôle important dans la définition d'une μ-structure. Nous verrons plus bas que la classe $\mathscr{S}^\infty$ est trop étroite pour les objectifs qu'on se fixe. Son extension dans l'axiomatique des μ-structures peut nous conduire à une algèbre contenant $i\dfrac{\partial}{\partial x}$ et x et qui ne peut être munie d'une μ-structure.

Illustrons ceci sur un exemple.

Supposons que la classe de symboles choisie contient des fonctions de la forme $f(x_1, x_2) = e^{\pm i x_1 x_2}$ et soient A et B des opérateurs de M tels que $[A, B] = -i$ $\left(\text{par exemple, } A = -i\frac{\partial}{\partial x},\ B = x\right)$. Mettons l'opérateur A^3 au premier rang en appliquant la formule de commutation (6.5) au premier membre de l'identité

$$e^{-i\binom{3}{A-A}^2_B} = 1.$$

On obtient l'égalité

$$1 = [\![e^{-i\binom{1}{A-A}^2_B}]\!] - [\![\psi\binom{1}{A}\binom{3}{A};\ \binom{2}{B};\ \binom{4}{A}]\!],$$

où le symbole de l'opérateur $\psi\binom{1}{A}\binom{3}{A};\ \binom{2}{B};\ \binom{4}{A}$ est de la forme

$$\psi(p_1, p_2;\ x;\ y) = i\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta}{\delta p}e^{-i(p-y)x} = \frac{(p_1 - y)e^{-i(p_1-y)x} - (p_2 - y)e^{-i(p_2-y)x}}{p_1 - p_2} =$$

$$= e^{-i(p_1-y)x} + (p_2 - y)\frac{e^{-i(p_1-y)x} - e^{-i(p_2-y)x}}{p_1 - p_2}$$

Grâce aux axiomes du zéro et de correspondance, on en déduit que

$$1 = [\![e^{-i\binom{1}{A-A}^2_B}]\!] - [\![e^{-i\binom{1}{A-A}^2_B}]\!] - \left[\!\!\left[\binom{3}{A-A}\frac{e^{-i\binom{1}{A-A}^2_B} - 1}{\binom{1}{A-A}\binom{3}{A}}\right]\!\!\right] = 0.$$

Donc, il n'existe pas de μ-structure pour les opérateurs $A, B \in M$ et pour la classe de symboles contenant les fonctions $e^{\pm i x_1 x_2}$.

C'est pourquoi il faut bien veiller à ne pas utiliser implicitement de μ-structure pour des symboles d'une classe plus large que $\mathscr{S}^\infty$ en établissant les formules, car cela risquerait de nous conduire parfois à des relations fausses pour les opérateurs dont les symboles appartiennent à $\mathscr{S}^\infty$ *).

Pour résoudre le problème de quasi-inversibilité il nous faudra modifier l'application μ introduite ci-dessus. Soient M^m un tore à m dimensions, $B = (B_1, \ldots, B_m)$ une collection d'opérateurs permutables de M. Désignons par M_m l'ensemble de toutes les collections de m opérateurs permutables, de sorte que $B \in M_m$. Supposons que $\mathscr{A}$ est contenue dans un espace vectoriel $\mathscr{L}$ qui est en outre un $\mathscr{A}$-module bilatère. Désignons par C^∞ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur $\mathbf{R}^n \times M^m$ telles que pour tous indices multiples l et s

$$\left|\frac{\partial^l}{\partial \alpha^l}\frac{\partial^s}{\partial x^s}\varphi(x, \alpha)\right| \leqslant C_{l,s}|x|^{2l+l_0} + \overline{C}_{l,s}.$$

*) Les problèmes relatifs à la définition de fonctions concrètes d'opérateurs ordonnés et du champ d'application des formules des μ-structures sont abordés au chapitre IV.

Si une fonction φ est justiciable de cette majoration, on écrira $|\varphi| = O_{\mathscr{L}}(|x|^{l_0})$. On dira que le $\mathscr{A}$-module $\mathscr{L}$ est muni de l'application μ si pour la séquence $\overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{n}{A}_n, \overset{n+1}{B}$ de $n+m$ opérateurs, où $B \in M_m$, est définie pour $x_1 \to \overset{1}{A}_1, \ldots, x_n \to \overset{n}{A}_n$, $\alpha \to \overset{n+1}{B}$ une application linéaire $\mu: C^{\infty}_{\mathscr{L}} \to \mathscr{L}$

$$\mu(\varphi) = \left[\varphi\left(\overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{n}{A}_n, \overset{n+1}{B}\right)\right] \in \mathscr{L}.$$

Attirons l'attention sur le fait que l'application μ n'est pas un homomorphisme d'algèbres, mais une application linéaire de l'algèbre des symboles dans l'algèbre des opérateurs. En outre, la multiplication de l'algèbre des opérateurs peut induire une multiplication non commutative sur l'algèbre des symboles. Soit $f \in C^{\infty}_{\mathscr{L}}$; alors le produit $A_j \left[\!\left[F\left(\overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{n}{A}_n\right)\right]\!\right]$ peut de nouveau être représenté par la fonction $\varphi_j\left(\overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{n}{A}_n\right)$ de sorte que

$$A_j \left[\!\left[F\left(\overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{n}{A}_n\right)\right]\!\right] = \varphi_j\left(\overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{n}{A}_n\right). \tag{6.18}$$

En désignant maintenant par L_j un opérateur linéaire tel que $L_j F = \varphi_j$, on peut munir l'algèbre des symboles de la loi de multiplication non commutative

$$(f * g)(y_1, \ldots, y_n) = f\left(\overset{1}{L}_1, \ldots, \overset{n}{L}_n\right) g(y_1, \ldots, y_n). \tag{6.19}$$

Si les relations de commutation des opérateurs A_j s'expriment simplement en fonction des opérateurs A_j, les opérateurs L_j se calculent de façon assez élémentaire et la loi de multiplication définie par la formule (6.19) existe. Considérons quelques exemples simples de telles relations de commutation. Les opérateurs L_j seront appelés *représentations ordonnées* des opérateurs A_j.

Exemple 1. Supposons que des opérateurs A et B vérifient la relation d'anticommutation $[A, B]_* = AB + BA = 1$. Supposons que A agit le premier, B le second: $f\left(\overset{2}{B}, \overset{1}{A}\right)$. Calculons la représentation ordonnée des opérateurs A et B. On a $B \cdot \left[\!\left[f\left(\overset{2}{B}, \overset{1}{A}\right)\right]\!\right] = \overset{2}{B} f\left(\overset{2}{B}, \overset{1}{A}\right)$. Donc $L_B = x$. Pour calculer L_A on se servira de l'égalité

$$\overset{3}{A}\left(\overset{2}{B} + \overset{4}{B}\right) = 1.$$

Un développement en «série» de Newton au point $x = -\overset{4}{B}$ nous donne

$$\left[\!\left[\overset{3}{A} f\left(\overset{2}{B}, \overset{1}{A}\right)\right]\!\right] = \overset{3}{A} f\left(-\overset{4}{B}, \overset{1}{A}\right) +$$

$$+ \overset{3}{A}\left(\overset{2}{B} + \overset{4}{B}\right)\left\{\left(\overset{2}{B} + \overset{4}{B}\right)^{-1}\left(f\left(\overset{2}{B}, \overset{1}{A}\right) - f\left(-\overset{4}{B}, \overset{2}{A}\right)\right)\right\} =$$

$$= \left[\left[{}^{1}_{A} f\left(-{}^{2}_{B}, {}^{1}_{A} \right) \right]\right] + \left[\left[{}^{3}_{A} \left({}^{2}_{B} + {}^{4}_{B} \right) \left({}^{1}_{B} + {}^{5}_{B} \right)^{-1} \left(f\left({}^{1}_{B}, {}^{0}_{A} \right) - f\left(-{}^{5}_{B}, {}^{0}_{A} \right) \right) \right]\right] =$$

$$= {}^{1}_{A} f\left(-{}^{2}_{B}, {}^{1}_{A} \right) + \left({}^{2}_{2B} \right)^{-1} \left(f\left({}^{2}_{B}, {}^{1}_{A} \right) - f\left(-{}^{2}_{B}, {}^{1}_{A} \right) \right).$$

Donc

$$L_A f(x, y) = y f(-x, y) + (2x)^{-1} (f(x, y) - f(-x, y)).$$

On remarquera que les représentations ordonnées L_A et L_B ne contiennent pas d'opérateurs différentiels.

Calculons le degré de l'opérateur L_A. Soit $\varphi(x, y)$ une fonction différentiable. Un calcul immédiat nous donne

$$L_A^2 \varphi(x, y) = y^2 \varphi(x, y).$$

Donc

$$L_A^{2k} = L_A^2 L_A^{2k-2} = \ldots = y^{2k}; \quad L_A^{2k+1} = y^{2k} L_A.$$

Comme $[L_A, y] = 0$, la dernière égalité peut être mise sous la forme

$$L_A^{2k+1} = y^{2k+1} (L_A / y).$$

Posons

$$f_+(x, y) = \frac{1}{2}[f(x, y) + f(x, -y)];$$

$$f_-(x, y) = \frac{1}{2}[f(x, y) - f(x, -y)].$$

Il est évident que

$$f\left({}^{2}_{x}, {}^{1}_{L_A} \right) = y^{-1} f_-(x, y) L_A; \quad f_+\left({}^{2}_{x}, {}^{1}_{L_A} \right) = f_+(x, y).$$

Donc, dans ce cas la loi de multiplication « * » devient

$$f * g(x, y) = y^{-1} f_-(x, y) L_A g(x, y) + f_+(x, y) g(x, y).$$

Posons $\chi(-x, y) = \chi_1(x, y)$ et mettons la dernière égalité sous la forme

$$f_+(x, y) \chi + y^{-1} f_-(x, y) (y\chi - (2x)^{-1} (\chi - \chi_1)) = 1. \tag{6.20}$$

En remplaçant x par $-x$, on obtient

$$f_+(-x, y) \chi_1 + y^{-1} f_-(-x, y) (y\chi - (2x)^{-1} (\chi - \chi_1)) = 1. \tag{6.21}$$

Le système (6.20), (6.21) de deux équations algébriques linéaires en χ et χ_1 admet une solution si $f(x, y) f(-x, -y) + f(-x, y) f(x, -y) + (2xy)^{-1} (f(x, y) f(-x, -y) - f(-x, y) f(x, y)) \neq 0$. Donc la fonction $\chi(x, y)$, solution du système (6.20), (6.21), est le symbole de l'opérateur réciproque de $f\left({}^{2}_{B}, {}^{1}_{A} \right)$, c'est-à-dire que

$$\left[\left[f\left({}^{2}_{B}, {}^{1}_{A} \right) \right]\right] \left[\left[\chi\left({}^{2}_{B}, {}^{1}_{A} \right) \right]\right] = (f * \chi)\left({}^{2}_{B}, {}^{1}_{A} \right) = 1\left({}^{2}_{B}, {}^{1}_{A} \right) = 1.$$

Exemple 2. Soient A, B des opérateurs tels que $BA-\alpha AB=ih$, où $\underset{2}{\alpha}$ et $\underset{1}{h}$ sont des constantes. Ordonnons ces opérateurs comme suit: $A\leftrightarrow x$, $B\leftrightarrow y$. Calculons leurs représentations ordonnées. Il est évident que $\underset{4}{L_A}=x$. Par ailleurs, le développement newtonien de f au point $x=\alpha A$ s'écrit

$$\overset{3}{B}f\left(\overset{2}{A},\ \overset{1}{B}\right)=\overset{3}{B}f\left(\overset{4}{\alpha A},\ \overset{1}{B}\right)+\overset{3}{B}\left(\overset{2}{A}-\overset{4}{\alpha A}\right)\ \frac{f\left(\overset{2}{A},\ \overset{1}{B}\right)-f\left(\overset{4}{\alpha A},\ \overset{2}{B}\right)}{A-\alpha A}=$$

$$=\overset{2}{B}f\left(\overset{3}{\alpha A},\ \overset{1}{B}\right)+ih\,\frac{f\left(\overset{2}{A},\ \overset{1}{B}\right)-f\left(\overset{2}{\alpha A},\ \overset{1}{B}\right)}{A\,(1-\alpha)}.$$

Introduisons l'opérateur I_α^x de dilatation le long de l'axe des x : $I_\alpha^x f(x, y)=f(\alpha x, y)$. Alors, en vertu de (6.22)

$$L_\beta=yI_\alpha^x+\frac{ih}{x\,(1-\alpha)}\,(1-I_\alpha^x). \tag{6.23}$$

On remarquera que $L_\beta\to y+ih\,\dfrac{\partial}{\partial x}$ pour $\alpha\to 1$. Considérons l'équation

$$\left[\!\left[f\left(\overset{2}{A},\ \overset{1}{B}\right)\right]\!\right]\left[\!\left[\chi\left(\overset{2}{A},\ \overset{1}{B}\right)\right]\!\right]=1.$$

En passant aux symboles, on obtient pour $\chi(x, y)$ l'équation

$$f\left(\overset{2}{x},\ \overset{1}{L_B}\right)\chi(x, y)=1. \tag{*}$$

Soit $\alpha=e^a$. Posons $g(\theta, y)=\chi(e^\theta, y)$. Pour cette classe de fonctions on a l'égalité $I_\alpha^x\chi(x, y)=g(\theta+a, y)$. Donc, l'équation (*) peut être mise sous la forme

$$f\left(e^\theta,\ ye^{a\frac{\partial}{\partial\theta}}+ihe^{-\theta}(1-\alpha)^{-1}(1-e^{a\frac{\partial}{\partial\theta}})\right)g(\theta, y)=1.$$

Cette équation est une équation aux différences sur un réseau de pas a et sa solution peut être obtenue sous une forme explicite.

Considérons maintenant l'équation de Schrödinger

$$\left[-\frac{h^2}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x)\right]\Psi-E\Psi=0,\qquad E=\text{const}.$$

Posons $B=ihe^{-x}\,\dfrac{\partial}{\partial x}$, $A=e^x$ et mettons cette équation sous la forme

$$\left[\frac{(AB)^2}{2}+V(\ln A)\right]\Psi-E\Psi=0,\qquad \Psi=\Psi(\ln A). \tag{6.24}$$

Il est évident que $[A, B]=-ih$.

Considérons maintenant la même équation (6.24) mais sous la condition que les opérateurs A et B satisfassent la *relation de commutation perturbée* $e^{a}AB-BA=-ih$ (où a peut être pris petit). En posant encore $A=e^{x}$, on obtient de ce qui précède

$$B=ih\,(1-e^{a})^{-1}\,(1-e^{a\frac{\partial}{\partial x}})+ye^{a\frac{\partial}{\partial x}}.$$

Exigeons que $B=ihe^{-x\frac{\partial}{\partial x}}$ lorsque $a\to 0$. De là il s'ensuit nécessairement que $y=0$. L'équation (6.24) peut être écrite comme une équation dans un espace discret ($x=ka$)

$$(h^{2}/2)\,(1-e^{a})^{-2}\,\{\Psi_{n-1}-2\Psi_{n}+\Psi_{n+1}\}+V((n-1)\,a)\,\Psi_{n-1}-E\Psi_{n-1}=0,$$
$$\Psi_{k}=\Psi\,(ka).$$

Exemple 3. Considérons maintenant des relations qui contiennent les exemples 1 et 2 comme cas particuliers:

$$BA-\alpha AB=hC;\quad CA-\beta AC=(1-\beta)A;\quad BC-\gamma CB=(1-\gamma)B. \tag{6.25}$$

Ces relations sont de *commutation* pour $\alpha=\beta=\gamma=1$ et d'*anticommutation* pour $\alpha=\beta=\gamma=-1$.

En construisant, comme dans les exemples 1 et 2, les représentations ordonnées L_A, L_B, L_C de A, B, C et en les portant dans (6.25), on s'assure que cette dernière sera satisfaite pour L_A, L_B, L_C à la seule condition que $\gamma=\beta^{-1}$. Nous glisserons sur ces calculs et construirons les représentations ordonnées en admettant au départ que $\gamma=\beta^{-1}$; l'équation (6.25) s'écrit alors

$$BA-\alpha AB=hC;\quad CA-\beta AC=(1-\beta)A;\quad \beta BC-CB=(\beta-1)B. \tag{6.26}$$

Supposons que $x\to\overset{3}{A}$, $y\to\overset{2}{B}$, $z\to\overset{3}{C}$. D'après (6.26), on a $\overset{4}{B}\left(\overset{3}{A}-\alpha\overset{5}{A}\right)=hC$, $\overset{4}{B}\left(\overset{3}{A}-\alpha\overset{5}{A}\right)\left(\overset{3}{A}-\beta\overset{5}{A}\right)=h(1-\beta)A$. Le développement newtonien de $\overset{4}{Bf}\left(\overset{3}{A},\overset{2}{B},\overset{1}{C}\right)$ au point $\alpha\overset{5}{A}$ nous donne

$$\overset{4}{Bf}\left(\overset{3}{A},\overset{2}{B},\overset{1}{C}\right)=$$
$$=\overset{4}{Bf}\left(\alpha\overset{5}{A},\overset{2}{B},\overset{1}{C}\right)+\overset{4}{B}\left(\overset{3}{A}-\alpha\overset{5}{A}\right)\frac{\delta f}{\delta x}\left(\overset{3}{A},\alpha\overset{5}{A};\overset{2}{B},\overset{1}{C}\right)=$$
$$=\overset{4}{Bf}\left(\alpha\overset{5}{A},\overset{2}{B},\overset{1}{C}\right)+hC\,\frac{\delta f}{\delta x}\left(\overset{3}{A},\alpha\overset{5}{A};\overset{2}{B},\overset{1}{C}\right).$$

Par ailleurs, en développant $\dfrac{\delta f}{\delta x}$ au point $\beta\overset{5}{A}$, on obtient

$$\overset{4}{C}\frac{\delta f}{\delta x}\left(\overset{3}{A},\alpha\overset{5}{A};\overset{2}{B},\overset{1}{C}\right)=\overset{4}{C}\frac{\delta f}{\delta x}\left(\beta\overset{5}{A},\alpha\overset{5}{A};\overset{2}{B},\overset{1}{C}\right)+$$

$$+\overset{4}{C}\left(\overset{3}{A}-\beta\overset{5}{A}\right)\left(\overset{3}{A}-\beta\overset{5}{A}\right)^{-1}\left[\frac{\delta f}{\delta x}\left(\overset{3}{A},\ \alpha\overset{5}{A};\ \overset{2}{B},\ \overset{1}{C}\right)-\frac{\delta f}{\delta x}\left(\beta\overset{5}{A},\ \alpha\overset{5}{A};\ \overset{2}{B},\ \overset{1}{C}\right)\right]=$$

$$=\left(\overset{3}{C}-1\right)\frac{\delta f}{\delta x}\left(\beta\overset{5}{A},\ \alpha\overset{5}{A};\ \overset{2}{B},\ \overset{1}{C}\right)+\frac{\delta f}{\delta x}\left(\overset{3}{A},\ \alpha\overset{3}{A};\ \overset{2}{B},\ \overset{1}{C}\right)$$

De (6.26) on déduit l'égalité $\left(\overset{3}{C}-1\right)\left(\overset{2}{B}-\beta\overset{4}{B}\right)=0$. On a en définitive

$$\overset{4}{B}f\left(\overset{3}{A},\ \overset{2}{B},\ \overset{1}{C}\right)=\overset{3}{B}f\left(\alpha\overset{5}{A},\ \beta,\ \overset{1}{C}\right)+h\frac{\delta f}{\delta x}\left(\overset{3}{A},\ \alpha\overset{3}{A};\ \overset{2}{B},\ \overset{1}{C}\right)+$$

$$+h\left(\overset{3}{C}-1\right)\frac{\delta f}{\delta x}\left(\beta\overset{3}{A},\ \alpha\overset{3}{A};\ \beta\overset{2}{B},\ \overset{1}{C}\right).$$

Considérons les opérateurs I_α^x et I_α^y de dilatation le long des axes des x et des y respectivement :

$$I_\alpha^x f(x, y, z)=f(\alpha x, y, z), \qquad I_\alpha^y f(x, y, z)=f(x, \alpha y, z).$$

L'opérateur L_B s'écrit alors

$$L_B=yI_\alpha^x+h\left((1-\alpha)x\right)^{-1}(1-I_\alpha^x)+h(z-1)\left((\beta-\alpha)x\right)^{-1}(I_\beta^x I_\beta^y-I_\alpha^x I_\beta^y).$$

De façon analogue

$$L_C=1+(z-1)I_\beta^x I_\beta^y.$$

En posant $\alpha=\beta=\gamma=-1$, on obtient les « relations de Jordan » suivantes

$$AB+BA=C; \qquad \frac{BC+CB}{2}=B; \qquad \frac{AC+CA}{2}=A. \tag{6.27}$$

On rappelle encore que dans les relations de commutation $[A, B]=1$ nous avons remplacé l'unité par un élément du contre : $[A, B]=C, [A, C]=$ $=[B, C]=0$, et avons obtenu une algèbre (les groupes de Heisenberg). L'analogie implique de changer l'unité dans la relation d'anticommutation $AB+BA=1$ par un élément du « centre de Jordan », c'est-à-dire par les relations (6.27). Dans ce cas, on obtient la représentation régulière (6.27) sous forme d'un système de quatre opérateurs différentiels du premier ordre :

$$L_B=yI_y+2hx^{-1}(1-I_x)+2h(z-1)I_xI_y\frac{\partial}{\partial y} \tag{6.28}$$

puisque les opérateurs d'inversion I_x et I_y peuvent être mis sous une forme matricielle.

Du fait que nous avons obtenu une représentation régulière d'une algèbre de Jordan complexe dont les générateurs vérifient les relations (6.27), il s'ensuit qu'il existe une algèbre associative d'éléments $\varphi\left(\overset{3}{A},\ \overset{2}{B},\ \overset{1}{C}\right)$, où $\varphi(x, y, z)$ sont des fonctions entières; cette algèbre peut être munie du produit de Jordan.

Exemple 4. Soient A, B, C des opérateurs vérifiant les relations d'anticommutation suivantes:

$$AB+BA=C, \quad BC+CB=A, \quad CA+AC=B. \tag{6.29}$$

Pour calculer les représentations ordonnées des opérateurs, on se servira des égalités:

$$\begin{gathered} \overset{2}{A}\left(\overset{1}{B}+\overset{3}{B}-1\right)\left(\overset{1}{B}+\overset{3}{B}+1\right)=0, \quad \overset{2}{B}\left(\overset{1}{C}+\overset{3}{C}-1\right)\left(\overset{1}{C}+\overset{3}{C}+1\right)=0 \\ \overset{2}{A}\left(\overset{1}{C}+\overset{3}{C}-1\right)\left(\overset{1}{C}+\overset{3}{C}+1\right)=0 \end{gathered} \tag{6.30}$$

qui résultent sans peine de (6.29). Déduisons par exemple la première égalité (6.30). De (6.29), il vient $\overset{2}{A}\left(\overset{1}{B}+\overset{3}{B}\right)=C$, $\overset{2}{C}\left(\overset{1}{B}+\overset{3}{B}\right)=A$. D'où $\overset{2}{A}\left(\overset{1}{B}+\overset{3}{B}\right)^2=A$ ou $\overset{2}{A}\left[\left(\overset{1}{B}+\overset{3}{B}\right)^2-1\right]=0$. La relation annoncée résulte de façon évidente de la dernière égalité. Supposons qu'aux opérateurs A, B, C sont associés respectivement les arguments z, y, x des symboles. Calculons d'abord l'opérateur auxiliaire $\mathscr{L}_A$ qui est tel que pour toute fonction $\varphi(z, y, x)$, l'on a

$$\overset{3}{A}\varphi\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, \overset{4}{C}\right)=\left(\mathscr{L}_A\varphi\right)\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, \overset{4}{C}\right).$$

En développant en $y=-\overset{4}{B}+1$, on obtient

$$\begin{aligned} \overset{3}{A}\varphi\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, \overset{4}{C}\right)&=\overset{3}{A}\varphi\left(\overset{1}{A}, -\overset{4}{B}+1, \overset{5}{C}\right)+\overset{3}{A}\left(\overset{2}{B}+\overset{4}{B}-1\right)\times \\ &\times\frac{\delta\varphi}{\delta y}\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}; -\overset{4}{B}+1, \overset{5}{C}\right)=\overset{1}{A}\varphi\left(\overset{1}{A}, -\overset{2}{B}+1, \overset{3}{C}\right)+\left(\overset{3}{C}-\overset{3}{A}\right)\times \\ &\times\frac{\delta\varphi}{\delta y}\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}; \overset{2}{B}+2, \overset{5}{C}\right)-\overset{3}{A}\left(\overset{2}{B}+\overset{4}{B}-1\right)\left(\overset{2}{B}+\overset{4}{B}+1\right)\times \\ &\times\frac{\delta^2\varphi}{\delta y^2}\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}; -\overset{4}{B}+1, \overset{2}{B}+2, \overset{5}{C}\right) \end{aligned}$$

De là on déduit en vertu de (6.30) que

$$\overset{3}{A}\varphi\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, \overset{4}{C}\right)=\overset{1}{A}\varphi\left(\overset{1}{A}, -\overset{2}{B}+1, \overset{3}{C}\right)+\left(\overset{4}{C}-\overset{3}{A}\right)\frac{\delta\varphi}{\delta y}\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}; \overset{2}{B}+2, \overset{4}{C}\right).$$

Mettons cette égalité sous la forme

$$\begin{aligned} &\overset{3}{A}\left[\varphi\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, \overset{4}{C}\right)-\frac{1}{2}\left(\varphi\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, \overset{4}{C}\right)-\varphi\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}+2, \overset{4}{C}\right)\right)\right]= \\ &=\overset{1}{A}\varphi\left(\overset{1}{A}, -\overset{2}{B}+1, \overset{3}{C}\right)-\frac{1}{2}\overset{3}{C}\left(\varphi\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, \overset{3}{C}\right)-\varphi\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}+2, \overset{3}{C}\right)\right). \end{aligned} \tag{6.31}$$

Désignons par l_1 l'opérateur défini par la formule

$$l_1\varphi(x, y, z)=1-\frac{1}{2}(1-e^{2\frac{\partial}{\partial y}})$$

et par l_2 l'opérateur

$$l_2\varphi(x, y, z)=zI_y e^{\frac{\partial}{\partial y}}-\left(\frac{x}{2}\right)(1-e^{2\frac{\partial}{\partial y}}).$$

Mettons l'égalité (6.31) sous la forme

$$\overset{3}{A}\left[\Delta(l, \varphi)\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, \overset{4}{C}\right)\right]=(l_2\varphi)\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, \overset{4}{C}\right).$$

En posant $l_1\varphi(x, y, z)=\Psi(x, y, z)$, on obtient

$$\overset{3}{A}\Psi\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, \overset{4}{C}\right)=(l_2 l_1^{-1}\Psi)\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, \overset{4}{C}\right).$$

De la dernière égalité il s'ensuit que l'opérateur $\mathscr{L}_A$ est de la forme $\mathscr{L}_A=l_2 l_1^{-1}$ ou

$$L_A=\left[zI_y e^{\frac{\partial}{\partial y}}-\left(\frac{x}{2}\right)(1-e^{2\frac{\partial}{\partial y}})\right]\left[1-\frac{1}{2}(1-e^{2\frac{\partial}{\partial y}})\right]^{-1}=$$

$$=\left[zI_y+ix\sin\left(-i\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]\left[\cos\left(-i\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]^{-1}. \quad (6.32)$$

Passons au calcul des opérateurs L_A, L_B, L_C. On a de toute évidence $L_C=x$. Pour calculer l'opérateur L_B, transformons le produit $\overset{4}{B}\varphi\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, \overset{5}{C}\right)$. En développant au point $z=-\overset{5}{C}+1$, on obtient

$$\overset{4}{B}\varphi\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, \overset{3}{C}\right)=\overset{4}{B}\varphi\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, -\overset{5}{C}+1\right)+\overset{4}{B}\left(\overset{3}{C}+\overset{5}{C}-1\right)\frac{\delta\varphi}{\delta x}\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, \overset{3}{C}, -\overset{5}{C}+1\right).$$

Par ailleurs, d'après (6.30)

$$\overset{4}{B}\varphi\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, \overset{3}{C}\right)=\overset{4}{B}\varphi\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, -\overset{5}{C}+1\right)+\left(\overset{4}{A}-\overset{4}{B}\right)\frac{\delta\varphi}{\delta x}\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}; -\overset{5}{C}-1, -\overset{5}{C}+1\right).$$

Désignons par I_x l'opérateur d'inversion par rapport à x. On a

$$L_B=yI_x e^{\frac{\partial}{\partial x}}-\frac{1}{2}\mathscr{L}_A I_x(e^{-\frac{\partial}{\partial x}}-e^{\frac{\partial}{\partial x}})+\left(\frac{y}{2}\right)I_x(e^{-\frac{\partial}{\partial x}}-e^{\frac{\partial}{\partial x}})=$$

$$=yI_x\cos\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)+i\mathscr{L}_A\sin\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right).$$

Pour calculer l'opérateur L_A, transformons le produit $\overset{4}{A}\varphi\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, \overset{3}{C}\right)$ comme nous venons tout juste de le faire:

$$\overset{4}{A}\varphi\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, \overset{3}{C}\right) = \overset{4}{A}\varphi\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, -\overset{5}{C}+1\right) + \overset{4}{A}\left(\overset{3}{C}+\overset{5}{C}-1\right)\frac{\delta\varphi}{\delta x}\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, \overset{3}{C}, -\overset{5}{C}+1\right) =$$

$$= \overset{3}{A}\varphi\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, -\overset{5}{C}+1\right) + \left(\overset{2}{B}-\overset{3}{A}\right)\frac{\delta\varphi}{\delta x}\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, -\overset{4}{C}-1, -\overset{4}{C}+1\right)$$

D'où, en vertu de (6.32)

$$L_A = \mathscr{L}_A I_x e^{\frac{\partial}{\partial x}} - \frac{y}{2} I_x \left(e^{-\frac{\partial}{\partial x}} - e^{\frac{\partial}{\partial x}}\right) + \frac{1}{2}\mathscr{L}_A I_x \left(e^{-\frac{\partial}{\partial x}} - e^{\frac{\partial}{\partial x}}\right) =$$

$$= iyI_x \sin\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right) + \mathscr{L}_A I_x \cos\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right).$$

De l'égalité (6.32) il résulte que le symbole de l'opérateur $\mathscr{L}_A$ présente une singularité, puisque le symbole $\cos p$ de l'opérateur $\cos\left(-i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ s'annule.

Il est immédiat de vérifier que les opérateurs L_A, L_B, L_C vérifient les mêmes relations d'anticommutation que les opérateurs A, B, C.

Exemple 5. Considérons maintenant un exemple plus compliqué dans lequel nous exhiberons encore une méthode de calcul de la représentation ordonnée.

Dans les problèmes liés à l'étude du comportement asymptotique des solutions d'équations pseudo-différentielles de la forme $A\left(\overset{2}{x}, \overset{1}{D}\right) f = F$, $D = \frac{\partial}{\partial x}$, on aura parfois intérêt à considérer un opérateur «étalon» $R = R\left(\overset{2}{x}, \overset{1}{D}\right)$ plus simple que l'opérateur primitif et tel que $A\left(\overset{2}{x}, \overset{1}{D}\right) \equiv B\left(\overset{3}{R}, \overset{2}{x}, \overset{1}{D}\right)$ et que la fonction $B(\alpha, \beta, \gamma)$ ne présente pas, par exemple, de zéros à l'infini ou soit préférable dans un certain sens à la fonction primitive $A(\beta, \gamma)$. Dans ce cas, il faut ajouter encore deux relations à la relation de commutation $[D, x] = 1$.

Considérons à cet effet les relations de commutation suivantes:

$$\begin{aligned} &[A, B] = 1; \quad [A, C] = \alpha(C) A + \beta(C) B + \gamma(C), \\ &[B, C] = \beta^*(C) A + \delta(C) B + \sigma(C), \end{aligned} \tag{6.33}$$

où $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\delta(t)$ et $\sigma(t)$ sont des symboles.

Construisons les représentations ordonnées pour les opérateurs A, B, C vérifiant (6.33).

La méthode de construction est basée sur une formule générale pour des opérateurs non permutables a, b, c et d tels que $ab=ca+d$, où b est un opérateur dans un espace (de Banach) H_1, c un opérateur dans H_2, a et d des opérateurs de H_1 dans H_2. Exhibons cette formule:

$$\overset{2}{aF}\begin{pmatrix}1\\b\end{pmatrix}=F\begin{pmatrix}3\\c\end{pmatrix}\overset{2}{a}+\overset{2}{a}\begin{pmatrix}1&3\\b-c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\b-c\end{pmatrix}\left(F\begin{pmatrix}1\\b\end{pmatrix}-F\begin{pmatrix}3\\c\end{pmatrix}\right)=$$

$$=F\begin{pmatrix}2\\c\end{pmatrix}\overset{1}{a}+\overset{2}{a}\begin{pmatrix}1&3\\b-c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&4\\b-c\end{pmatrix}^{-1}\left(F\begin{pmatrix}0\\b\end{pmatrix}-F\begin{pmatrix}4\\c\end{pmatrix}\right)=$$

$$=F\begin{pmatrix}2\\c\end{pmatrix}\overset{1}{a}+\overset{2}{d}\left(F\begin{pmatrix}1\\b\end{pmatrix}-F\begin{pmatrix}3\\c\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}1&3\\b-c\end{pmatrix}^{-1}$$

D'où

$$aF(b)=F(c)\,a+\overset{2}{d}\left(F\begin{pmatrix}1\\b\end{pmatrix}-F\begin{pmatrix}3\\c\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}1&3\\b-c\end{pmatrix}^{-1}.$$

Les deux dernières relations (6.33) peuvent être mises sous la forme

$$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}C=S(c)\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\gamma(c)\\\sigma(c)\end{pmatrix},$$

où

$$S(c)=\begin{pmatrix}C+\alpha(c) & \beta(c)\\ \beta^*(c) & C+\delta(c)\end{pmatrix}.$$

En appliquant à cette relation la formule ci-dessus, on obtient

$$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}F(c)=F(S(c))\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}+\frac{F(c)-F(S(c))}{C-S(c)}\begin{pmatrix}\gamma(c)\\\sigma(c)\end{pmatrix},$$

de plus

$$A\left[\!\left[\varphi\begin{pmatrix}2&1\\B,&A\end{pmatrix}\right]\!\right]=\overset{1}{A}\varphi\begin{pmatrix}2&1\\B,&A\end{pmatrix}+\varphi y\begin{pmatrix}2&1\\B,&A\end{pmatrix}.$$

Il est immédiat de trouver maintenant les représentations ordonnées L_A et L_B:

$$\begin{pmatrix}L_A\\L_B\end{pmatrix}=I_{S(z)}\begin{pmatrix}x+\dfrac{\partial}{\partial y}\\ y\end{pmatrix}+\frac{1-I_{S(z)}}{z-S(z)}\begin{pmatrix}\gamma(z)\\\sigma(z)\end{pmatrix},$$

où l'opérateur $I_{S(z)}$ est de la forme $I_{S(z)}F(z)=F(S(z))=\exp\left\{(S(z)-zE)\dfrac{\partial}{\partial z}\right\}F(z)$ (E est la matrice unité). Il est évident que $L_C=z$.

§ 7. Exemple d'application des méthodes opératorielles à la construction de la solution exacte d'une équation différentielle

Considérons l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - x^4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{7.1}$$

et montrons comment on peut lui trouver une solution exacte non triviale par les méthodes opératorielles.

Mettons l'équation (7.1) sous la forme opératorielle. Introduisons à cet effet les opérateurs $D_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $D_t = \frac{\partial}{\partial t}$. En appliquant l'opération $\mu : \xi \to \overset{1}{D_t}$, $\eta \to \overset{1}{D_x}$, $\alpha \to \overset{2}{x}$ au symbole $L(\xi, \eta, \alpha) = \xi^2 - \alpha^4 \eta^2$, on met l'équation (7.1) sous la forme

$$\mu(L) u(x, t) = L\left(\overset{1}{D_t}, \overset{1}{D_x}, \overset{2}{x}\right) u(x, t) = 0. \tag{7.1'}$$

A noter que l'opérateur $\hat{L} \sim L\left(\overset{1}{D_t}, \overset{1}{D_x}, \overset{2}{x}\right)$ est un opérateur de l'espace $C^k(R_x \times R_t)$ des fonctions de x et t k fois continûment différentiables dans l'espace $C^{k-2}(R_x \times R_t)$. Cependant, il peut exister des fonctions de $C^k(R_x \times R_t)$ dont la différentiabilité n'est pas modifiée par l'opérateur $\hat{L}$. On dira à ce propos qu'une fonction $u(x, t)$ est une *solution asymptotique pour la différentiabilité* de l'équation (7.1) si du fait que $u(x, 0) \in C^k(R_x)$ il s'ensuit que $\hat{L}u(x, t) \in C^k(R_x)$ pour tout $t > 0$, c'est-à-dire que $u(x, 0)$ et $\hat{L}u(x, t)$ appartiennent à une même classe de différentiabilité. On remarquera que la solution exacte est une solution asymptotique pour la différentiabilité.

Soient $w(x) \in C^k$ et $u(x, 0) = w(x)$. Si l'on trouve un opérateur $\hat{G} = G\left(\overset{2}{x}, \overset{2}{t}, \overset{1}{D_x}\right)$ tel que l'opérateur

$$\hat{R} = \hat{L} \circ \hat{G} : C^k \to C^k \tag{7.2}$$

pour tout $t > 0$ et tout k entier, alors la fonction

$$u(x, t) = G\left(\overset{2}{x}, \overset{2}{t}, \overset{1}{D_x}\right) w(x) \tag{7.3}$$

est de toute évidence une solution asymptotique pour la différentiabilité de (7.1) si $G\left(\overset{2}{x}, 0, \overset{1}{D_x}\right) w(x) = w(x)$. Comme l'équation (7.1) décrit des oscillations, on cherchera l'opérateur $\hat{G}$ sous la forme:

$$G\left(\overset{2}{x}, \overset{2}{t}, \overset{1}{D_x}\right) = e^{S\left(\overset{2}{x}, \overset{2}{t}\right) \overset{1}{D_x}} \varphi\left(\overset{2}{x}, \overset{2}{t}\right), \tag{7.4}$$

où $S(x, t)$, $\varphi(x, t)$ sont des fonctions inconnues. Si l'on porte (7.4) dans (7.2), l'opérateur $\hat{R}$ prend la forme d'une fonction d'opérateurs ordonnés:

$$\hat{R} = \left(\overset{3}{D_t^2} - \overset{4}{x^4} \overset{3}{D_x^2}\right) e^{S\left(\overset{2}{x}, \overset{2}{t}\right) \overset{1}{D_x}} \varphi\left(\overset{2}{x}, \overset{2}{t}\right) \tag{7.5}$$

On se propose maintenant de trouver pour S et φ des équations plus simples que (7.1) mais d'où l'on pourrait déduire (7.2). En permutant dans (7.5) l'ordre d'action des opérateurs $\overset{3}{D}_t$, $\overset{3}{D}_x$ et $\overset{2}{x}$, $\overset{2}{t}$ de telle sorte que les opérateurs de dérivation agissent les premiers, et en égalant à zéro les coefficients des puissances semblables des opérateurs D_t et D_x, on obtient les équations annoncées pour S et φ. Etablissons à cet effet une formule auxiliaire qui nous permettra de transformer sans difficultés le second membre de (7.5) en ordonnant convenablement les opérateurs.

Soit $D_\xi = \dfrac{\partial}{\partial \xi}$ et supposons qu'un opérateur Λ commute à D_ξ. Changeons l'ordre d'action des opérateurs $\overset{2}{\xi}$ et $\overset{3}{D}_\xi$ dans l'opérateur $\overset{3}{D}_\xi^2 \times$ $\times \exp\left(\Phi\left(\overset{2}{\xi}\right)\overset{1}{\Lambda}\right)\varphi\left(\overset{2}{\xi}\right)$. En appliquant le théorème 1.3 on trouve immédiatement que

$$\overset{3}{D}_\xi^2 e^{\Phi\left(\overset{2}{\xi}\right)\overset{1}{\Lambda}}\varphi\left(\overset{2}{\xi}\right) = \overset{2}{D}_\xi^2 e^{\Phi\left(\overset{3}{\xi}\right)\overset{1}{\Lambda}}\varphi\left(\overset{3}{\xi}\right) + \left[\overset{3}{D}_\xi, \xi\right]\frac{\delta^2 f}{\delta\xi\delta p}\left(\overset{1}{D}_\xi, \overset{5}{D}_\xi, \overset{2}{\xi}, \overset{4}{\xi}, \overset{1}{\Lambda}\right), \qquad (7.6)$$

où

$$\frac{\delta^2 f}{\delta\xi\delta p}(p, p', \xi, \xi', \eta) = (p+p')\frac{e^{\Phi(\xi')\eta}\varphi(\xi') - e^{\Phi(\xi)\eta}\varphi(\xi)}{\xi' - \xi}$$

Mais comme $[D_\xi, \xi] = 1$, il vient

$$\left[\overset{3}{D}_\xi, \xi\right]\frac{\delta^2 f}{\delta\xi\delta p}\left(\overset{1}{D}_\xi, \overset{5}{D}_\xi, \overset{2}{\xi}, \overset{4}{\xi}, \overset{1}{\Lambda}\right) =$$

$$= \left(\overset{1}{D}_\xi + \overset{5}{D}_\xi\right)\left(\overset{1}{\Lambda}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\left(\overset{3}{\xi}\right)e^{\Phi\left(\overset{3}{\xi}\right)\overset{1}{\Lambda}}\varphi\left(\overset{3}{\xi}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\left(\overset{3}{\xi}\right)e^{\Phi\left(\overset{3}{\xi}\right)\overset{1}{\Lambda}}\right). \qquad (7.7)$$

En faisant agir l'opérateur $\overset{5}{D}_\xi$ le premier dans cette formule, on obtient par analogie

$$\overset{5}{D}_\xi\left(\overset{1}{\Lambda}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\left(\overset{3}{\xi}\right)e^{\Phi\left(\overset{3}{\xi}\right)\overset{1}{\Lambda}}\varphi\left(\overset{3}{\xi}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\left(\overset{3}{\xi}\right)e^{\Phi\left(\overset{3}{\xi}\right)\overset{1}{\Lambda}}\right) =$$

$$= \overset{2}{D}_\xi\left(\overset{1}{\Lambda}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\left(\overset{3}{\xi}\right)e^{\Phi\left(\overset{3}{\xi}\right)\overset{1}{\Lambda}}\varphi\left(\overset{3}{\xi}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\left(\overset{3}{\xi}\right)e^{\Phi\left(\overset{3}{\xi}\right)\overset{1}{\Lambda}}\right) +$$

$$+ e^{\Phi\left(\overset{3}{\xi}\right)\overset{1}{\Lambda}}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} + 2\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\overset{1}{\Lambda} + \varphi\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2}\overset{1}{\Lambda} + \varphi\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right)^2\overset{1}{\Lambda}^2\right]. \qquad (7.8)$$

En combinant les formules (7.6), (7.7) et (7.8), on obtient la formule nécessaire pour la transformation de (7.5):

$$\overset{3}{D}_\xi^2 e^{\Phi\left(\overset{2}{\xi}\right)\overset{1}{\Lambda}}\varphi\left(\overset{2}{\xi}\right) = e^{\Phi\left(\overset{3}{\xi}\right)\overset{1}{\Lambda}}\varphi\left(\overset{3}{\xi}\right)\left[\overset{2}{D}_\xi + \frac{\partial^3\Phi}{\partial\xi}\overset{1}{\Lambda}\right]^2 + e^{\Phi\left(\overset{3}{\xi}\right)\overset{1}{\Lambda}}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}\left(\overset{3}{\xi}\right) +$$

$$+e^{\Phi\left(\overset{3}{\xi}\right)\overset{1}{\Lambda}}\left[2\frac{\partial^3\varphi}{\partial\xi}\overset{2}{D}_\xi+2\frac{\partial^3\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial^3\Phi}{\partial\xi}\overset{1}{\Lambda}+\varphi\left(\overset{3}{\xi}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2}\left(\overset{3}{\xi}\right)\overset{1}{\Lambda}\right], \tag{7.9}$$

où

$$\frac{\partial^3\varphi}{\partial\xi}=\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\left(\overset{3}{\xi}\right), \quad \frac{\partial^3\Phi}{\partial\xi}=\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\left(\overset{3}{\xi}\right)$$

En posant ξ égal à t ou à x, $\overset{1}{\Lambda}=\overset{1}{D}_x$ et en remarquant que $[D_t, x]=[D_x, t]=0$, transformons la formule (7.5) à l'aide de (7.9):

$$\hat{R}=e^{S\left(\overset{3}{x},\overset{3}{t}\right)\overset{1}{D}_x}\varphi\left(\overset{3}{x},\overset{3}{t}\right)\left[\left(\overset{2}{D}_t+\frac{\partial^3 S}{\partial t}\overset{1}{D}_x\right)^2-\overset{3}{x}^4\left(\overset{2}{D}_x+\frac{\partial^3 S}{\partial x}\overset{1}{D}_x\right)^2\right]+$$

$$+e^{S\left(\overset{3}{x},\overset{3}{t}\right)\overset{1}{D}_x}\varphi\left(\overset{3}{x},\overset{3}{t}\right)\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\left(\overset{3}{x},\overset{3}{t}\right)-\overset{3}{x}^4\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\left(\overset{3}{x},\overset{3}{t}\right)\right]+$$

$$+e^{S\left(\overset{3}{x},\overset{3}{t}\right)\overset{1}{D}_x}\left[2\frac{\partial^3\varphi}{\partial t}\overset{2}{D}_t+2\frac{\partial^3\varphi}{\partial t}\frac{\partial^3 S}{\partial t}\overset{1}{D}_x+\right.$$

$$\left.+\overset{3}{\varphi}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}-\overset{3}{x}^4\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\right)\overset{1}{D}_x-2\overset{3}{x}^4\frac{\partial^3\varphi}{\partial x}\frac{\partial^3 S}{\partial x}\overset{1}{D}_x\right].$$

Comme l'opérateur $\hat{R}$ n'agit que sur les fonctions de x, les termes contenant D_t disparaissent. En regroupant les termes contenant D_x^2 et D_x, on obtient la formule:

$$\hat{R}=e^{S\left(\overset{2}{x},\overset{2}{t}\right)\overset{1}{D}_x}\varphi\left(\overset{2}{x},\overset{2}{t}\right)\left[\left(\frac{\partial^2 S}{\partial t}\right)^2-\overset{2}{x}^4\left(1+\frac{\partial^2 S}{\partial x}\right)\right]\overset{1}{D}_x^2+$$

$$+e^{S\left(\overset{2}{x},\overset{2}{t}\right)\overset{1}{D}_x}\left[2\frac{\partial^2 p}{\partial t}\frac{\partial^2 S}{\partial t}+\overset{2}{\varphi}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}-\overset{2}{x}^4\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\right)-2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x}\overset{2}{x}^4\left(1+\frac{\partial^2 S}{\partial x}\right)\right]\overset{1}{D}_x+$$

$$+e^{S\left(\overset{2}{x},\overset{2}{t}\right)\overset{1}{D}_x}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-x^4\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right). \tag{7.10}$$

L'opérateur (7.10) respecte la différentiabilité si $\hat{L}\varphi\in C^\infty$. Donc, pour que $\hat{R}: C^k\to C^k$, il suffit que les fonctions S et φ soient solutions du système d'équations

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2-x^4\left(1+\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2=0,$$

$$2\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial S}{\partial t}-2\frac{\partial\varphi}{\partial x}x^4\left(1+\frac{\partial S}{\partial x}\right)+\varphi\left(\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}-x^4\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\right)=0 \tag{7.11}$$

et $\hat{L}\varphi\in C^\infty$.

La première équation du système (7.11) est équivalente aux deux équations suivantes:

$$\frac{\partial S_+}{\partial t}=x^2\left(1+\frac{\partial S_+}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial S_-}{\partial t}=-x^2\left(1+\frac{\partial S_-}{\partial x}\right). \tag{7.12}$$

Des calculs immédiats nous montrent que

$$\frac{\partial^2 S_+}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(x^2\left(1+\frac{\partial S_+}{\partial t}\right)\right)=x^2\frac{\partial^2 S_+}{\partial x\partial t}=x^2\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\left(1+\frac{\partial S_+}{\partial x}\right)\right)=$$

$$=2x\frac{\partial S_+}{\partial t}+x^4\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}.$$

De façon analogue

$$\frac{\partial^2 S_-}{\partial t^2}=x^4\frac{\partial^2 S_-}{\partial x^2}-2x\frac{\partial S_-}{\partial t}.$$

Donc, le système d'équations (7.11) est équivalent aux deux systèmes suivants:

$$\frac{\partial S_+}{\partial t}=x^2\left(1+\frac{\partial S_+}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial S_-}{\partial t}=-x^2\left(1+\frac{\partial S_-}{\partial x}\right),$$

$$\left(\frac{\partial \varphi_+}{\partial t}-x^2\frac{\partial \varphi_+}{\partial x}+x\varphi_+\right)\frac{\partial S_+}{\partial t}=0, \quad \left(\frac{\partial \varphi_-}{\partial t}+x^2\frac{\partial \varphi_-}{\partial x}-x\varphi_-\right)\frac{\partial S_-}{\partial t}=0. \tag{7.13}$$

Etant donné que l'opérateur $\hat{G}$ doit être identique pour $t=0$, les conditions initiales sur les fonctions $S_\pm$ et $\varphi_\pm$ peuvent être choisies comme suit:

$$S_\pm(x, 0)=0, \quad \varphi_\pm(x, 0)=1. \tag{7.14}$$

Les solutions du système (7.13) vérifiant les conditions initiales (7.14) sont de toute évidence

$$S_+(x, t)=\frac{x^2 t}{1-xt}, \quad \varphi_+(x, t)=1-xt,$$

$$S_-(x, t)=\frac{x^2 t}{1+xt}, \quad \varphi_-(x, t)=1+xt. \tag{7.15}$$

Il s'avère que les fonctions $\varphi_\pm$ qui sont solutions du système (7.13) sont également solutions de l'équation (7.1). En effet, les équations pour $\varphi_\pm$ peuvent être mises sous la forme

$$\frac{\partial \varphi_\pm}{\partial t}=\pm x\left(x\frac{\partial}{\partial x}-1\right)\varphi_\pm.$$

Comme l'opérateur $\frac{\partial}{\partial t}$ commute aux opérateurs $\frac{\partial}{\partial x}$ et x, il vient

$$\frac{\partial^2 \varphi_\pm}{\partial t^2} = x\left(x\frac{\partial}{\partial x}-1\right)x\left(x\frac{\partial}{\partial x}-1\right)\varphi_\pm.$$

En remarquant que $x\frac{\partial}{\partial x}+1=\frac{\partial}{\partial x}\cdot x$, on obtient

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}-1\right)x = x^2\frac{\partial}{\partial x}$$

et par suite

$$\frac{\partial^2 \varphi_\pm}{\partial t^2} = x^3\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial}{\partial x}-1\right)\varphi_\pm = x^3\left(\left(x\frac{\partial}{\partial x}+1\right)\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi_\pm = x^4\frac{\partial^2 \varphi_\pm}{\partial x^2}.$$

Nous avons ainsi prouvé que $\hat{R}\equiv 0$ quelles que soient les solutions du système (7.13), donc toute fonction $u(x, t)=G\left(\overset{2}{x}, \overset{2}{t}, \overset{1}{D_x}\right) w(x)$ est solution exacte de l'équation (7.1), où $G\left(\overset{2}{x}, \overset{2}{t}, \overset{1}{D_x}\right)$ est défini par la formule (7.4). Comme le système (7.11) est équivalent aux systèmes (7.13), on obtient deux opérateurs

$$\hat{G}_+ \overset{\text{déf}}{=} e^{S_+\left(\overset{2}{x}, \overset{2}{t}\right)\overset{1}{D_x}}\varphi_+\left(\overset{2}{x}, \overset{2}{t}\right), \quad \hat{G}_- = e^{S_-\left(\overset{2}{x}, \overset{2}{t}\right)\overset{1}{D_x}}\varphi_-\left(\overset{2}{x}, \overset{2}{t}\right), \tag{7.16}$$

qui nous donnent conformément à la formule (7.3) les solutions exactes de l'équation (7.1) vérifiant la condition initiale $u(x, 0)=w(x)$.

L'opérateur $\hat{L}$ est linéaire, donc toute fonction

$$u(x, t)=e^{S_+\left(\overset{2}{x}, \overset{2}{t}\right)\overset{1}{D_x}}\varphi_+\left(\overset{2}{x}, \overset{2}{t}\right) w_1(x)+e^{S_-\left(\overset{2}{x}, \overset{2}{t}\right)\overset{1}{D_x}}\varphi_-\left(\overset{2}{x}, \overset{2}{t}\right) w_2(x) \tag{7.17}$$

est solution exacte de l'équation (7.1).

En conclusion, utilisons la formule (7.17) pour résoudre le problème de Cauchy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-x^4\frac{\partial^2 u}{\partial x^4}=0, \tag{7.1}$$

$$u(x, 0)=\bar{u}(x); \qquad u'_t(x, 0)=\bar{\bar{u}}(x). \tag{7.18}$$

Portons $S_\pm$ et $\varphi_\pm$ de (7.15) dans (7.17) et, en tenant compte du fait que

$$\hat{G}_\pm w(x)=\varphi_\pm\left(\overset{2}{x}, \overset{2}{t}\right) e^{S_\pm\left(\overset{2}{x}, \overset{2}{t}\right)\overset{1}{D_x}} w(x)=\varphi_\pm(x, t)\, w(x+S_\pm(x, t)),$$

cherchons la solution du problème de Cauchy sous la forme

$$u(x, t)=(1-xt)\, w_1\left(\frac{x}{1-xt}\right)+(1+xt)\, w_2\left(\frac{x}{1+xt}\right),$$

où les fonctions inconnues $w_1(x)$ et $w_2(x)$ se déterminent, (7.18) aidant, comme la solution du système d'équations

$$\begin{aligned} \bar{u}(x) &= w_1(x) + w_2(x), \\ \bar{\bar{u}}(x) &= x^2(w_1'(x) - w_2'(x)) - x(w_1(x) - w_2(x)). \end{aligned} \tag{7.19}$$

En résolvant la deuxième équation (7.19) par rapport à la différence $w_1(x) - w_2(x)$, on obtient

$$w_1(x) - w_2(x) = x \int_{x_0}^{x} \bar{\bar{u}}(\xi)\, \xi^{-3} d\xi.$$

Donc

$$w_1(x) = 1/2\ \bar{u}(x) + \frac{x}{2} \int_{x_0}^{x} \bar{\bar{u}}(\xi)\, \xi^{-3} d\xi,$$

$$w_2(x) = 1/2\ \bar{u}(x) - \frac{x}{2} \int_{x_0}^{x} \bar{\bar{u}}(\xi)\, \xi^{-3} d\xi$$

et, par suite, la solution du problème de Cauchy (7.1), (7.18) est donnée par la formule :

$$\bar{u}(x, t) = \frac{(1-xt)\bar{u}\left(\frac{x}{1-xt}\right) + (1+xt)\bar{u}\left(\frac{x}{1+xt}\right)}{2} + \frac{x}{2} \int_{\frac{x}{1+xt}}^{\frac{x}{1-xt}} \bar{\bar{u}}(\xi)\, \xi^{-3} d\xi.$$

§ 8. Passage à la limite de l'équation des oscillations du réseau cristallin à l'équation des ondes

Appliquons maintenant le calcul opératoriel développé à la résolution d'un problème de physique. Plus exactement, considérons l'équation des oscillations d'un réseau cristallin et voyons celles de ses solutions qui, à la limite (lorsque le pas du réseau tend vers 0), se transforment en solutions de l'équation des ondes.

Ce problème est classique et il ne faut pas s'attendre à des résultats spectaculaires. Le seul fait nouveau c'est que cette méthode permet de découvrir des effets mathématiques et physiques assez curieux. Grâce à la méthode opératorielle nous trouverons des solutions « singulières » qui en général ne possèdent pas de limite. Ce sont précisément ces solutions singulières qui subordonnent les effets physiques traités dans ce paragraphe, effets dont certains étaient inconnus auparavant.

L'exemple envisagé montre que la méthode opératorielle se prête bien dans un certain sens à l'étude des problèmes physiques. Plus exactement, nous verrons que l'équation des caractéristiques pour les fonctions d'opérateurs ordonnés non seulement définit des phénomènes fondamentaux tel l'effet Tchérenkov (le « train » des oscillations du rayonnement qui suit l'onde « discontinue ») mais délimite les frontières exactes du domaine du « rayonnement de Tchérenkov ». Nous verrons que les résultats sont en accord avec l'expérience numérique.

Dans les autres chapitres de cet ouvrage, les formules établies ne feront pas l'objet d'une analyse et encore moins d'une comparaison avec le résultat de l'expérience numérique. Cependant nous traiterons en détail l'exemple classique envisagé.

1. Passage du système d'oscillations du réseau à l'équation des ondes. Etudions un système d'équations différentielles ordinaires décrivant les oscillations d'un réseau cristallin et déduisons l'équation des ondes par passage à la limite dans ce système.

Considérons $2N$ atomes de masse m situés sur un cercle de rayon 1 à une même distance $h=\pi/N$ l'un de l'autre. Supposons que les atomes n'interagissent qu'avec les plus proches. Soit $u_i(t)$ l'écart de l'atome i par rapport à la position d'équilibre à l'instant t: ici $i=0, \pm 1, \ldots, \pm N$ et $u_{-N}=u_N$. En approximation linéaire le système d'équations de Newton pour un tel réseau est de la forme

$$\ddot{u}_n = c^2 \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2}, \quad n=0, \pm 1, \ldots, \pm N, \tag{8.1}$$

où $u_N=u_{-N}$, $u_{N+1} \overset{\text{déf}}{=} u_{-N+1}$, $u_{-N-1} \overset{\text{déf}}{=} u_{N-1}$; $c=\sqrt{\dfrac{\gamma}{m}}$ est la vitesse du son.

Le système (8.1) peut être étudié sous l'hypothèse que le nombre N est très grand. Considérons une fonction différentiable $u(x, t)$ prenant aux nœuds du réseau les valeurs u_j, c'est-à-dire que $u(jh, t)=u_j(t)$. Le système (8.1) se transforme alors en un système différentiel aux différences sur un cercle ou, ce qui revient au même, en un système différentiel-fonctionnel sur la droite à coefficient périodique:

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{c^2}{h^2}[u(x+h, t) - 2u(x, h) + u(x-h, t)], \quad t>0, \\ u(x+2\pi, t) = u(x, t). \end{gathered} \tag{8.2}$$

On admettra qu'en général la vitesse du son c dépend de x et que $c(x) \in C^\infty$ est une fonction 2π-périodique non nulle.

Puisque nous nous intéressons aux seules valeurs prises par $u(x, t)$ aux nœuds du réseau, il semble naturel de considérer une classe de fonctions admettant le plus grand nombre de dérivées et prenant les valeurs u_j aux nœuds du réseau. Soit M_N l'espace vectoriel engendré par les vecteurs e^{ikx},

$k=0, \pm 1, \ldots, \pm(N-1), +N$. Il est aisé de voir que pour la collection $\{u_j, j=0, \ldots, \pm N, u_N=u_{-N}\}$ il existe une fonction $u \in M_N$ prenant les valeurs u_j aux nœuds du réseau. Donc, les conditions initiales du problème (8.2) peuvent être données sous la forme

$$u(x, 0)=v_1(x) \in M_N, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)=v_2(x) \in M_N. \tag{8.3}$$

Utilisons maintenant la relation

$$e^{i\left(-ih\frac{\partial}{\partial x}\right)} u(x, t)=u(x+h, t),$$

pour mettre le problème (8.2), (8.3) sous forme de l'équation pseudo-différentielle

$$\begin{gathered} L_h u \stackrel{\text{déf}}{=} h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+4c^2 \binom{2}{x} \sin^2\left(-\frac{ih}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right)^1 u=0, \qquad t>0, \\ u(x, 0)=v_1(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)=v_2(x), \qquad u(x+2\pi, t)=u(x, t). \end{gathered} \tag{8.4}$$

Posons

$$\|f\|=\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}.$$

On écrira $\varphi \in C_{h,t}^{(s)}$ si la fonction $\varphi=\varphi(x, t, h)$ est s fois différentiable par rapport à x et t, et 2π-périodique en x et de plus

$$\sup_{0<h<1} \left\| \frac{\partial^k \varphi(x, t; h)}{\partial x^k} \right\| \leqslant c_k < \infty, \qquad k=0, 1, \ldots, s.$$

Considérons d'abord un problème à second membre différentiable (uniformément par rapport à h):

$$\begin{gathered} L_h u=h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+4c^2 \binom{2}{x} \sin^2\left(-\frac{ih}{2}\right)^1 \frac{\partial}{\partial x} u=f, \qquad f \in C_{h,t}^{(s)}, \\ u(x, 0)=\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)=0, \qquad u(x+2\pi, t)=u(x, t). \end{gathered} \tag{8.5}$$

Lemme 8.1. *Soit* $\varphi \in C_{h,t}^{(m+2)}$. *Alors*

$$4 \sin^2\left(-\frac{ih}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi=-h^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\sum_{k=4}^{m+1} \alpha_k (-ih)^k \frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k}+h^{m+2} Q_m \varphi,$$

où $\|Q_m \varphi\| \leqslant c_m \left\| \frac{\partial^{m+2} \varphi}{\partial x^{m+2}} \right\|$ *et* α_k *sont des nombres fixes.*

Démonstration. La formule de Taylor nous donne

$$4\sin^2\left(\frac{z}{2}\right)=z^2+\sum_{k=4}^{m+1}\alpha_k z^k-2z^{m+2}\int_0^1\frac{(1-\tau)^{m+1}}{(m+1)!}\cos^{(m+2)}(\tau z)\,d\tau.$$

D'où

$$Q_m\varphi=-\frac{2(-i)^{m-2}}{(m+1)!}\left[\int_0^1(1-\tau)^{m+1}\cos^{(m+2)}\left(-ih\tau\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^{m+2}\varphi}{\partial x^{m+2}}\right)d\tau\right].$$

Il est évident que la fonction entre crochets peut être représentée par une combinaison linéaire de fonctions de la forme

$$\int_0^1(1-\tau)^{m+1}e^{\pm i\tau\left(-ih\frac{\partial}{\partial x}\right)}\psi(x)\,d\tau=\int_0^1(1-\tau)^{m+1}\psi(x\pm\tau h)\,d\tau,$$

où $\psi=\dfrac{\partial^{m+2}\varphi}{\partial x^{m+2}}$.

Il est immédiat de voir que

$$\left\|\int_0^1(1-\tau)^{m+1}\psi(x\pm\tau h)\,d\tau\right\|\leqslant C\|\psi\|.$$

D'où la majoration annoncée pour $Q_m\varphi$. C.Q.F.D.

La première approximation de l'opérateur L_h du problème (8.5) pour $h\to 0$ sera appelée *opérateur des ondes* et notée $\Box_c$ ou L. Donc, grâce au lemme 8.1, on a

$$L=\Box_c\stackrel{\text{déf}}{=}\partial^2/\partial t^2-c^2(x)\,\partial^2/\partial x^2.$$

L'équation $\Box_c u=f$ s'appelle *équation des ondes*. De ce point de vue on dira que le système d'équations différentielles ordinaires (8.1) d'oscillations du réseau se transforme en l'équation des ondes pour $h\to 0$. Mais nous ne savons encore rien du comportement des solutions de ce système. Se transforment-elles aussi en solutions de l'équation des ondes lorsque $h\to 0$?

Avant de répondre à cette question, il faut établir l'existence et de la solution du problème (8.2), et de la solution de l'équation des ondes correspondante.

Nous prouverons les théorèmes d'existence et d'unicité des solutions de l'équation des ondes et de l'équation (8.4) seulement pour t petit, et, fait plus important, nous exhiberons des formules pour les solutions.

2. Existence et unicité de la solution de l'équation des ondes. Prouvons le théorème suivant.

Théorème 8.1. *Soit* $f \in C^{(s)}_{h,t}$ *(s est assez grand). Alors pour* $0 < t \leqslant T$, où T *est un nombre quelconque, le problème*

$$\square_c u = f, \tag{8.6}$$

$$u(x+2\pi, t) = u(x, t), \qquad u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \tag{8.6'}$$

admet une solution $u = R_0(f) \in C^{(s)}_{h,t}$ *et une seule. En outre*

$$\left\| \frac{\partial^l}{\partial x^l} R_0(f) \right\| \leqslant \sum_{k=0}^{l} c_{l,k} \left\| \frac{\partial^k f}{\partial x^k} \right\|, \qquad l = 0, 1, 2, \ldots, s,$$

et $R_0(t) = R(x, t)$, *où* $R(x, t)$ *est définie dans* (8.8).

Ce théorème (de même que les théorèmes ultérieurs de même nature) sera prouvé à l'aide de la notion de *régulateur du problème* (8.6), (8.6').

Définition. Soient $A = -i\partial/\partial x \in M$, $B = x \in M^1$, M^1 un cercle, $G(t, x_1, \alpha, s) \in C^{\infty}_{\varphi}$, $s = 1, 2, \ldots$, une suite de familles de symboles à un paramètre telle que $G(0, x_1, \alpha, s) = 1$, $G'_t(0, x_1, \alpha, s) = 0$ et que

$$|f_1(t, x, \alpha, s)| \leqslant C(x_1^2 + 1)^{-s/2} \tag{8.7}$$

pour le symbole $f_1 \in C^{\infty}_{\varphi}$ de l'opérateur

$$f_1\left(t, \overset{1}{A}, \overset{2}{B}, s\right) \overset{\text{déf}}{=} (\partial^2/\partial t^2 + [\![c^2(B) A^2]\!]) G\left(t, \overset{1}{A}, \overset{2}{B}, s\right). \tag{8.7'}$$

Alors $G\left(t, \overset{1}{A}, \overset{2}{B}, s\right)$ s'appelle *régulateur du problème* (8.6), (8.6') (l'argument s sera omis).

Remarque. Le régulateur n'est visiblement pas unique. On pourrait en obtenir un autre, par exemple en ajoutant à G une fonction à support borné par rapport à $\overset{1}{A}$. Dans la suite nous aurons recours à cette procédure pour annuler le support du nouveau régulateur dans un ε-voisinage de $x_1 = 0$, ce qui nous permettra par conséquent de le multiplier par un polynôme de x_1^{-1} ou de le développer en série entière de x_1^{-1} en comprenant par x_1^{-1} la fonction $x_1^{-1}\varphi(x_1)$, où $\varphi(x_1)$ possède un support situé à l'extérieur du ε-voisinage du point $x_1 = 0$, $\varphi(x_1) = 1$ pour $x_1 > 2\varepsilon$.

Supposons qu'on ait déjà construit un tel régulateur. Voyons comment on peut démontrer le théorème précédent à l'aide du régulateur. En portant la fonction

$$R(x, t) = \int_0^t \int_0^{t-\tau} G\left(\mu, \overset{1}{A}, \overset{2}{B}\right) \Phi(x, \tau)\, d\mu\, d\tau \tag{8.8}$$

dans l'équation (8.6), on obtient

$$\frac{\partial^2 R}{\partial t^2}-c^2(x)\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}=\Phi(x, t)+\int_0^t\int_0^{t-\tau} f_1\left(\mu, \overset{1}{A}, \overset{2}{B}\right)\Phi(x, \tau)\,d\mu\,d\tau. \quad (8.8')$$

Nous avons ainsi ramené le problème (8.6), (8.6') à la détermination de Φ à partir de l'équation

$$\Phi(x, t)+\int_0^t f_2\left(t-\tau, \overset{1}{A}, \overset{2}{B}\right)\Phi(x, \tau)\,d\tau=f(x, t), \quad (8.8'')$$

où

$$f_2\left(t, \overset{1}{A}, \overset{2}{B}\right) \overset{\text{déf}}{=} \int_0^t f_1\left(\tau, \overset{1}{A}, \overset{2}{B}\right)d\tau$$

(les conditions initiales et les conditions de périodicité (8.6') sont visiblement remplies pour la fonction $R(x, t)$).

L'équation (8.8'') est une équation intégrale de Volterra qui s'intègre par des itérations. Plus exactement, posons

$$\Phi=\sum_{k=0}^{\infty}\Phi_k,$$

où

$$\Phi_0(x, t)=f(x, t),$$

$$\Phi_1(x, t)=-\int_0^t f_2\left(t-\tau, \overset{1}{A}, \overset{2}{B}\right)f(x, \tau)\,d\tau,$$

. . . . . .

$$\Phi_k(x, t)=(-1)^k\int_0^t f_2\left(t-\tau, \overset{2k-1}{A}, \overset{2k}{B}\right)\int_0^{\tau_1} f_2\left(\tau_1-\tau_2, \overset{2k-3}{A}, \overset{2k-2}{B}\right)\ldots\times$$

$$\times\int_0^{\tau_{k-1}} f_2\left(\tau_{k-1}-\tau_k, \overset{1}{A}, \overset{2}{B}\right)f(x, \tau_k)\,d\tau_k\ldots d\tau_1,$$

$$k=2, 3, \ldots$$

De (8.7) il s'ensuit que toute fonction $\psi(x, t)\in C^s_{h,t}$ vérifie la majoration

$$\left\|f_2\left(t-\tau, \overset{1}{A}, \overset{2}{B}\right)\psi(x, \tau)\right\|=\left\|\int_0^{t-\tau} f_1\left(\mu, \overset{1}{A}, \overset{2}{B}\right)\psi(x, \tau)\,d\mu\right\|\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^{t-\tau}\left\|f_1\left(\mu, \overset{1}{A}, \overset{2}{B}\right)\psi(x, \tau)\right\|d\mu\leqslant M_0T\|\psi(x, \tau)\|$$

pour $0\leqslant\tau\leqslant t$, $(t\leqslant T)$, s assez grand et $M_0=\text{const}$.

De là on déduit pour $0\leqslant t\leqslant T$ que

$$\|\Phi_k(x, t)\|\leqslant\frac{(M_0T^2)^k}{k!}\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|f(x, t)\|.$$

Donc, la série $\sum_{k=0}^{\infty} \Phi_k$ converge. Bien plus, des majorations analogues pour les dérivées de Φ_k, il résulte que la série des dérivées de Φ_k converge uniformément (et très vite), la somme $\Phi = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_k$ appartient à $C^{(s)}_{h,t}$ et l'on a les majorations du théorème 8.1 pour $R_0(f) \equiv R(x, t)$.

Il est tout aussi clair que l'équation (8.8), donc le problème (8.6), (8.6'), admet une solution unique, puisque chacune de ses solutions admet un seul développement en série $\sum_{k=0}^{\infty} \Phi_k$.

Pour prouver le théorème, il nous reste donc à construire le régulateur du problème (8.6), (8.6') (et à l'estimer). Nous le ferons à l'aide de la méthode opératorielle. Cherchons le régulateur G sous la forme

$$G\left(\overset{1}{t}, \overset{1}{A}, \overset{2}{x}\right) = e^{i\overset{1}{A}S\left(\overset{2}{x}, t\right)} \varphi\left(\overset{2}{x}, t, \overset{1}{A}\right), \tag{8.9}$$

où $A = -i\partial/\partial x$ et les fonctions S et φ restent à définir (S et φ sont 2π-périodiques en x et S est réelle).

Portons l'opérateur (8.9) dans l'équation des ondes et appliquons la formule de commutation; on obtient

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - c^2\left(\overset{3}{x}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\overset{1}{G} = e^{i\overset{1}{A}S\left(\overset{2}{x}, t\right)}\left\{\left(-\overset{1}{A}^2\right)\left[\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - c^2\left(\overset{2}{x}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial x}+1\right)^2\right]\varphi + \right.$$
$$+ i\overset{1}{A}\left[\left(\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}\right)\varphi - c^2\left(\overset{2}{x}\right)\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\right)\varphi + 2\frac{\partial S}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \right.$$
$$\left.\left. - 2c^2\left(\overset{2}{x}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial x}+1\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right] + \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2\left(\overset{2}{x}\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right]\right\}, \tag{8.10}$$

où les arguments $\left(\overset{2}{x}, t\right)$ et $\left(\overset{2}{x}, t, \overset{1}{A}\right)$ ont été omis respectivement dans les fonctions S et φ.

On devrait en principe annuler le second membre de (8.10) ou, plus exactement, l'opérateur entre accolades. Mais cela est difficile à réaliser (si c dépend de x). En fait, pour construire le régulateur, il suffit d'obtenir au second membre un opérateur f_1 «différentiable».

Traitons le régulateur G comme un opérateur sur l'espace des fonctions $v(x)$ 2π-périodiques suffisamment différentiables. De telles fonctions se développent en la série de Fourier:

$$v(x) = a_0 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} a_n e^{inx} \equiv a_0 + v_1(x).$$

(On rappelle que par définition $f\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}\right) v(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n f(n, x)\, e^{inx}$.)

Alors $G\left(t, \overset{1}{A}, \overset{2}{x}\right) v = G_0(x, t) + G\left(t, \overset{1}{A}, \overset{2}{x}\right) v_1$, où $G_0(x, t) \overset{\text{déf}}{=} \overset{\text{déf}}{=} G\left(t, \overset{1}{A}, \overset{2}{x}\right) a_0$. La fonction G_0 est solution du problème

$$\Box_c G_0 = f_1\left(t, \overset{1}{A}, \overset{2}{x}\right) a_0,$$

$$G_0(x, 0) = a_0, \quad \frac{\partial G_0}{\partial t}(x, 0) = 0,$$

$$G_0(x + 2\pi, t) = G_0(x, t).$$

Il est évident que l'on peut, sans changer de régulateur, prendre à la place de G_0 la constante a_0, solution du problème ci-dessus avec un second membre nul.

Ainsi, il suffit de considérer le régulateur G uniquement sur les fonctions de la forme $v_1(x) = \sum\limits_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} a_n e^{inx}$. Mais sur ces fonctions est défini l'opérateur A^{-1}:

$$A^{-1} v_1 \overset{\text{déf}}{=} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{a_n}{\overline{n}} e^{inx}$$

et ses itérations A^{-k}, $k = 1, 2, \ldots$

Donc, nous pouvons chercher la fonction φ de (8.9) sous la forme

$$\varphi = \sum_{k=0}^{s} \left(-i\overset{1}{A}^{-1}\right)^k \varphi_k\left(\overset{2}{x}, t\right).$$

En portant ce développement dans (8.10) et égalant à zéro les coefficients de $(-iA^{-1})^k$, $k = -2, -1, 0, \ldots, s-1$, dans l'accolade (8.10), on obtient le système d'équations

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - c^2(x)\left(\frac{\partial S}{\partial x} + 1\right)^2 = 0,$$

$$U_1 \varphi_0 = 0,$$

$$U_1 \varphi_1 + \Box_c \varphi_0 = 0, \tag{8.11}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$U_1 \varphi_s + \Box_c \varphi_{s-1} = 0,$$

où

$$U_1 = 2\frac{\partial S}{\partial t}(x, t)\frac{\partial}{\partial t} - 2c^2(x)\left(\frac{\partial S}{\partial x}(x, t) + 1\right)\frac{\partial}{\partial x} + \Box_c S(x, t).$$

Ceci étant, l'opérateur G sera solution de l'équation des ondes avec second membre (cf. (8.10))

$$f_1\left(\overset{1}{t}, \overset{1}{A}, \overset{2}{x}\right) = e^{i\overset{1}{A}S\left(\overset{2}{x}, t\right)} (\square_c \varphi_s)\left(\overset{2}{x}, t\right)\left(-i\overset{1}{A}^{-1}\right)^s.$$

On a par définition

$$f_1\left(\overset{1}{t}, \overset{1}{A}, \overset{2}{x}\right) v_1 = (-i)^s \square_c \varphi_s(x, t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} e^{in(x+S(x,t))}.$$

D'où il résulte que f_1 satisfait les majorations (8.7).

Il reste donc à résoudre le système (8.11) avec les conditions initiales

$$G\left(0, \overset{1}{A}, \overset{2}{x}\right) = 1, \quad \frac{\partial G}{\partial t}\left(0, \overset{1}{A}, \overset{2}{x}\right) = 0. \tag{8.12}$$

La première équation (8.11) est l'équation de Hamilton-Jacobi pour la fonction $S(x, t)$:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \pm c(x)\left(\frac{\partial S}{\partial x} + 1\right). \tag{8.13}$$

Soit la condition initiale

$$S(x, 0) = 0. \tag{8.13'}$$

Pour résoudre le problème de Cauchy (8.13), (8.13'), considérons le système correspondant de bicaractéristiques appelé système de Hamilton:

$$\begin{aligned} &\frac{dX^{\pm}}{dt} = \mp c(X^{\pm}), \quad X^{\pm}\big|_{t=0} = x_0, \\ &\frac{dP^{\pm}}{dt} = \pm \frac{\partial c}{\partial x}(X^{\pm})(1 + P^{\pm}), \quad P^{\pm}\big|_{t=0} = 0. \end{aligned} \tag{8.14}$$

Ce système s'intègre sans difficultés. Soient $X^{\pm}(x_0, \tau)$, $P^{\pm}(x_0, t)$ ses solutions. Comme $\left.\frac{\partial X^{\pm}}{\partial x_0}\right|_{t=0} = 1$, on a $\frac{\partial X^{\pm}}{\partial x_0}(x_0, t) \neq 0$ pour tout t et, par suite, l'équation

$$x = X^{\pm}(x_0, t)$$

admet une solution différentiable $x_0 = x_0^{\pm}(x, t)$.

Le problème (8.13), (8.13') admet alors les solutions 2π-périodiques en x (correspondant aux signes $\pm$ dans (8.13)):

$$S_{\pm}(x, t) = \int_0^t \left[P^{\pm}(x_0, \tau) \frac{dX^{\pm}}{d\tau}(x_0, \tau) - H_{\pm}(P^{\pm}(x_0, \tau), X^{\pm}(x_0, \tau))\right] d\tau \Big|_{x_0 = x_0^{\pm}(x,t)} = x_0^{\pm}(x, t) - x.$$

A noter que $\dfrac{\partial S_\pm}{\partial x}(X^\pm, t) = P^\pm$.

Considérons maintenant la deuxième équation (8.11). L'opérateur U_1 se décompose maintenant en deux opérateurs U_1^+ et U_1^- correspondant aux fonctions $S_\pm$. Il est évident que l'opérateur $U_1^\pm$ peut se mettre sous la forme

$$U_1^\pm = -2H_\pm \left(\frac{d}{dt_\pm} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_\pm}{\partial p^2} \frac{\partial^2 S_\pm}{\partial x^2} - \frac{1}{2H_\pm} \frac{\partial H_\pm}{\partial p} \frac{\partial H_\pm}{\partial x} \right), \tag{8.15}$$

où $H_\pm(x, p) \overset{\text{déf}}{=} \mp c(x)(1+p)$, et les arguments $(X^\pm, t)$ et $(X^\pm, P^\pm)$ ont été omis dans les fonctions $S_\pm$ et $H_\pm$ respectivement, $\dfrac{d}{dt_\pm}$ est la dérivée le long des trajectoires (8.14), c'est-à-dire que

$$\frac{d}{dt_\pm} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{dX^\pm}{dt} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} \mp c(X^\pm) \frac{\partial}{\partial x}.$$

D'après (8.14)

$$\frac{\partial}{\partial t} [H_\pm (X_\pm(x_0, t), P_\pm(x_0, t))] = 0. \tag{8.16}$$

Donc $H_\pm(X_\pm, P_\pm) = H_\pm(x_0, 0) = \mp c(x_0)$.

Soit $J_\pm^0(x_0, t) = \dfrac{\partial X^\pm(x_0, t)}{\partial x_0}$. Dérivons l'équation pour $X^\pm$ (cf. (8.14)):

$$\frac{dX^\pm}{dt} = \frac{\partial H^\pm}{\partial p} \left(X^\pm, \frac{\partial S_\pm}{\partial x}(X^\pm, t) \right)$$

par rapport à x_0. On obtient

$$\frac{\partial}{\partial t} J_\pm^0 = J_\pm^0 \left(\frac{\partial^2 H_\pm}{\partial p^2} \frac{\partial^2 S_\pm}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_\pm}{\partial p \, \partial x} \right).$$

De là et de (8.16) on obtient pour le jacobien

$$J_\pm(x, t) \overset{\text{déf}}{=} 2H_\pm \left(x, \frac{\partial S_\pm}{\partial x}(x, t) \right) J_\pm^0(x_0^\pm(x, t), t) = \mp 2c(x)$$

l'équation suivante:

$$\frac{d}{dt_\pm} \frac{1}{\sqrt{|J_\pm|}} = -\frac{1}{2\sqrt{|J_\pm|}} \left(\frac{\partial^2 H_\pm}{\partial p^2} \frac{\partial^2 S_\pm}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_\pm}{\partial x \, \partial p} \right).$$

On a donc pour l'opérateur (8.15)

$$U_1^{\pm}\left(\frac{\psi(x,t)}{\sqrt{|J_{\pm}|}}\right)=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{|J_{\pm}|}}\left(\frac{d}{dt_{\pm}}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 H_{\pm}}{\partial x\,\partial p}-\frac{1}{2H_{\pm}}\frac{\partial H_{\pm}}{\partial p}\frac{\partial H_{\pm}}{\partial x}\right)\psi(x,t), \qquad (8.17)$$

où les arguments $\left(x, \frac{\partial S_{\pm}}{\partial x}(x,t)\right)$ de la fonction $H_{\pm}$ ont été omis et ψ est quelconque.

Nous avons effectué tous les calculs en utilisant des notations générales, puisque dans les exemples ultérieurs nous les retrouverons intégralement. Dans notre cas l'expression (8.17) de l'opérateur $U_1^{\pm}$ devient:

$$U_1^{\pm}\left(\frac{\psi(x,t)}{\sqrt{|J_{\pm}|}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{|J_{\pm}|}}\left[\frac{d}{dt_{\pm}}\pm\frac{\partial c(x)}{\partial x}\right]\psi(x,t).$$

Donc, la deuxième équation (8.11) admet les deux solutions suivantes:

$$\varphi_0^{\pm}(x,t)=\frac{\psi_0^{\pm}(x_0^{\pm}(x,t))\,c(x)}{\sqrt{|J_{\pm}(x,t)|}}, \qquad (8.18)$$

où $\psi_0^{\pm}(x)$ sont des conditions initiales qui restent à déterminer.

De façon analogue, la représentation (8.17) nous permet de résoudre les autres équations (8.11) et de définir les fonctions 2π-périodiques $\varphi_k^{\pm}$, $k=0, 1, 2, \ldots, s$ par l'intermédiaire d'intégrales le long des trajectoires $X^{\pm}$, $P^{\pm}$.

Finalement, le régulateur G est de la forme

$$G\left(t, \overset{1}{A}, \overset{2}{x}\right)=\sum_{\pm}\sum_{k=0}^{s} e^{i\overset{1}{A}S_{\pm}\left(\overset{2}{x},t\right)}\varphi_k^{\pm}\left(\overset{2}{x}, t\right)\left(-i\overset{1}{A}^{-1}\right)^k, \qquad (8.19)$$

où les fonctions $S_{\pm}$ et $\varphi_k^{\pm}$ ont été définies ci-dessus et $\sum f_{\pm} \overset{\text{déf}}{=} f_+ + f_-$.

Reste à prendre des conditions initiales pour $\varphi_k^{\pm}$ telles que (8.12) soit réalisée. Posons

$$\varphi_0^{\pm}(x,0)=1/2. \qquad (8.20)$$

Comme $J_{\pm}(x,0)=2H_{\pm}(x,0)=\mp 2c(x)$, on déduit de (8.18) l'expression suivante pour $\psi_0^{\pm}$:

$$\psi_0^{\pm}(x)=\frac{1}{\sqrt{2c(x)}}.$$

Imposons aux autres fonctions $\varphi_k^{\pm}$, $k\geqslant 1$, de vérifier les conditions nulles:

$$\varphi_k^{\pm}(x,0)=0, \quad k=1, 2, \ldots, s. \qquad (8.21)$$

Grâce à (8.20) on déduit de (8.19) pour $t=0$:

$$G\left(0, \overset{1}{A}, \overset{2}{x}\right)=\sum_{\pm}\sum_{k=0}^{s}\varphi_k^{\pm}\left(\overset{2}{x}, 0\right)\left(-i\overset{1}{A}^{-1}\right)^k=\sum_{\pm}\varphi_0^{\pm}(x, 0)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

Pour la dérivée $\partial G/\partial t$ de (8.19), on a

$$\frac{\partial G}{\partial t}\left(0, \overset{1}{A}, \overset{2}{x}\right)=\sum_{\pm}\sum_{k=0}^{s}\left[i\overset{1}{A}\frac{\partial S_{\pm}}{\partial t}\left(\overset{2}{x}, 0\right)\varphi_k^{\pm}\left(\overset{2}{x}, 0\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial\varphi_k^{\pm}}{\partial t}\left(\overset{2}{x}, 0\right)\right]\left(-i\overset{1}{A}^{-1}\right)^k. \quad (8.22)$$

Or, $\dfrac{\partial S_{\pm}}{\partial t}(x, 0)=-H_{\pm}(x, 0)=\pm c(x)$, dont les premiers termes de (8.22) se simplifient en vertu de (8.20), et l'on obtient l'expression

$$\frac{\partial G}{\partial t}\left(0, \overset{1}{A}, \overset{2}{x}\right)=\sum_{\pm}\sum_{k=0}^{s}\frac{\partial\varphi_k^{\pm}}{\partial t}\left(\overset{2}{x}, 0\right)\left(-i\overset{1}{A}^{-1}\right)^k.$$

Trouvons les expressions des dérivées $\dfrac{\partial\varphi_k^{\pm}}{\partial t}$ à partir de (8.11). Il est immédiat de voir qu'à l'instant initial $t=0$ elles vérifient la condition

$$\frac{\partial\varphi_k^{+}}{\partial t}(x, 0)=-\frac{\partial\varphi_k^{-}}{\partial t}(x, 0).$$

Donc, l'opérateur $G\left(t, \overset{1}{A}, \overset{2}{x}\right)$ satisfait la deuxième condition initiale (8.12). Nous avons ainsi entièrement construit le régulateur du problème (8.6), (8.6′). C.Q.F.D.

3. Solutions asymptotiques du système d'équations des oscillations d'un réseau. On distinguera deux problèmes: 1) la recherche d'une représentation asymptotique de la solution exacte; 2) la recherche d'une solution asymptotique, c'est-à-dire d'une fonction dont la substitution dans l'équation nous donnera un second membre asymptotiquement proche du second membre donné.

Avant d'entamer le problème 1, on se propose de construire une solution asymptotique. On a le lemme quasi évident.

Lemme 8.2. *Soient donnés des entiers $m\geqslant 1$, $k\geqslant 2$ et une fonction $f\in C_{h,t}^{(p)}$, où $p=p(m, k)$ est assez grand. Il existe alors des fonctions $\psi_j\in C_{h,t}^{(k)}$, $j=0, \ldots, m-2$, telles que la combinaison linéaire*

$$U_m=\frac{1}{h^2}R_0(f)+\sum_{j=0}^{m-2}h^j\psi_j$$

est solution asymptotique du problème (8.5). *Plus exactement,*

$$\left[h^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}+4c^2\binom{2}{x}\sin^2\left(-\frac{ih}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]U_m=f+h^mF_mf,$$

$$U_m(x+2\pi,\ t)=U_m(x,\ t),$$

$$U_m(x,\ 0)=\frac{\partial U_m}{\partial t}(x,\ 0)=0,$$

et de plus le reste F_mf *satisfait la majoration*

$$\|F_mf\|\leqslant\sum_{j=1}^{p}c_j\left\|\frac{\partial^j f}{\partial x^j}\right\|.$$

Démonstration. Portons la fonction U_m dans l'équation (8.5), utilisons le lemme 8.1 et égalons à zéro les coefficients des puissances de h. On obtient ainsi des équations en ψ_j, $j=0,\ \ldots,\ m-2$. Par exemple, en égalant à zéro le coefficient de h^2, on trouve l'équation en ψ_0:

$$\Box_c\psi_0+\alpha_4c^2(x)\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)^4R_0(f)=0.$$

D'où, en vertu du théorème 8.1, l'on déduit que

$$\psi_0=-\alpha_4R_0\left[c^2\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)^4R_0(f)\right],$$

la fonction ψ_0 vérifiant des conditions initiales nulles et étant 2π-périodique en x.

Les autres fonctions ψ_j se déduisent de façon analogue. La majoration de F_mf résulte des majorations respectives du lemme 8.1 et du théorème 8.1.

Ce qui prouve le lemme.

On a donc établi que la solution de l'équation des ondes est une solution asymptotique du système des équations des oscillations d'un réseau. Mais, *primo*, cette solution n'est solution asymptotique que pour un second membre suffisamment différentiable, et, *secundo*, il faut encore prouver qu'elle est une représentation asymptotique de la solution réelle.

Pour trouver une solution asymptotique générale de l'équation des oscillations d'un réseau et prouver qu'elle est une représentation asymptotique de la solution réelle, nous allons procéder comme pour l'équation des ondes, c'est-à-dire construire un régulateur.

Dans ce cas on appellera *régulateur* un opérateur $G\binom{1}{t,\ A,\ B}^{2}$ dépendant aussi de h et on exhibera une définition identique à la définition précédente, sauf qu'on exigera en plus de (8.7) que

$$|f_1(x_1,\ \alpha,\ t,\ s,\ h)|\leqslant c_sh^{s+2}(x_1^2+1)^{-s/2} \tag{8.23}$$

Au second membre de (8.7'), on portera naturellement l'opérateur

$$h^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \left[4c^2 \left(\frac{2}{x}\right) \sin^2 \left(\frac{-ih}{2} \frac{\partial}{\partial x} \right) \right].$$

Si le régulateur est construit, de même qu'au n° 2 on obtient une équation intégrale de type Volterra et on montre qu'elle admet une solution susceptible d'être majorée uniformément en h lorsque $h \to 0$.

A noter toutefois qu'il suffit d'exiger de f_1 qu'elle satisfasse seulement la condition (8.7).

En effet, si l'on réussit à construire un tel régulateur « affaibli », on peut ensuite appliquer les résultats de ce numéro, c'est-à-dire le lemme 8.2 qui nous permettra d'obtenir le vrai régulateur à $h^N F$ près, où $F \in C^{(s)}_{h,t}$ (c'est-à-dire satisfaire (8.23)).

Le problème se ramènera donc à la construction d'un régulateur affaibli tel que le second membre respectif f_s vérifie la condition (8.7). C'est ce que l'on se propose de faire à l'aide des opérateurs ordonnés.

Construisons un régulateur pour le système d'équations des oscillations d'un réseau.

Posons le problème (8.4) avec des conditions initiales quelconques v_1, $v_2 \in M_N$. Il est évident qu'il suffit de traiter le cas $v_2(x) \equiv 0$. Mettons la fonction $v_1(x)$ sous la forme

$$v_1(x) = a_0 + \sum_{n=-N+1}^{N} a_n e^{inx}.$$

La constante a_0 satisfaisant visiblement l'équation (8.4), il suffit de considérer des conditions initiales de la forme

$$u(x, 0) = v_0(x) \equiv \sum_{n = \pm 1, \ldots, \pm(N-1), +N} a_n e^{inx}; \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0. \tag{8.24}$$

Soit $A = -i \dfrac{\partial}{\partial x}$. Comme plus haut, définissons l'opérateur A^{-1} sur les fonctions v_0 par la formule

$$A^{-1} v_0 \equiv A^{-1} \left(\sum_{n \neq 0} a_n e^{inx} \right) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{n \neq 0} \frac{a_n}{n} e^{inx} \in M_N.$$

L'action de l'opérateur A^{-1} nous donne une fonction du même type; en effet, toutes les puissances A^{-k}, $k = 1, 2, \ldots$, sont définies sur v_0. Par ailleurs, il est évident que

$$\| A^{-1} v_0 \| \leqslant \| v_0 \|.$$

D'autre part, $\frac{\partial}{\partial x}(A^{-1}v_0)=iv_0(x, h)$. Donc,

$$\left\|\frac{\partial^s}{\partial x^s}(A^{-k}v_0)\right\|\leqslant C_s\|v_0\|, \quad s=0, 1, \ldots, k.$$

On voit donc qu'il suffit de résoudre le problème (8.4) à des fonctions près de la forme $(A^{-k}v_0)$.

On cherchera le régulateur sous la forme (on omet l'argument h)

$$G\left(t, \overset{1}{\omega}, \overset{2}{x}\right)v_1=e^{i\overset{1}{A}S\left(\overset{2}{x}, t, \overset{1}{\omega}\right)}\varphi\left(\overset{2}{x}, t, \overset{1}{\omega}\right)v_1, \tag{8.25}$$

où $\omega=hA$, $h=\pi/N$; S, φ sont des fonctions indéfiniment différentiables 2π-périodiques en x, S étant une fonction réelle. On rappelle qu'un opérateur $F\left(\overset{2}{x}, \overset{1}{\omega}\right)$ agit sur les fonctions $v\in M_N$ à l'aide de la formule

$$F\left(\overset{2}{x}, \overset{1}{\omega}\right)v=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-N+1}^{N}e^{ikx}F(x, kh)\int_{-\pi}^{\pi}e^{-iky}v(y)dy. \tag{8.26}$$

Il est évident que l'opérateur ω est borné sur M_N:

$$\|\omega v\|\leqslant\pi\|v\|, \quad v\in M_N. \tag{8.27}$$

Portons l'expression (8.25) dans l'équation (8.4) et appliquons la formule de commutation à l'exponentielle. On trouve alors qu'une condition suffisante pour que $G\left(t, \overset{1}{\omega}, \overset{2}{x}\right)$ soit solution de l'équation (8.4) est que

$$\left\{h^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\overset{1}{\omega}^2\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2\varphi+2i\overset{1}{\omega}h\frac{\partial S}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+i\overset{1}{\omega}h\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}\varphi+4\overset{4}{[\![}c^2(x)]\!]\sin^2\times\right.$$

$$\left.\times\left[\!\!\left[-\frac{ih}{2}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{2}\overset{1}{\omega}\frac{\partial S}{\partial x}\left(x, t, \overset{1'}{\omega}\right)\right]\!\!\right]^{\overset{3}{2}}\varphi\right\}v_1=0, \tag{8.28}$$

où l'on a omis les arguments $\left(\overset{2}{x}, t, \overset{1}{\omega}\right)$ des fonctions S et φ.

Transformons le dernier terme de cette égalité à l'aide de la K-formule et de la formule de commutation:

$$\sin^2\left[\!\!\left[-\frac{ih}{2}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2}\overset{1'}{\omega}\frac{\partial S}{\partial x}\left(x, t, \overset{1'}{\omega}\right)\right]\!\!\right]^{\overset{3}{2}}\varphi\left(\overset{2}{x}, t, \overset{1}{\omega}\right)=$$

$$=\sin^2\left(\frac{\overset{1}{\omega}}{2}\left(1+\frac{\partial S}{\partial x}\right)\right)\varphi+\frac{1}{2}(-ih)\left[\sin\left(\overset{1}{\omega}\left(1+\frac{\partial S}{\partial x}\right)\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\overset{1}{\omega}\cos\left(\overset{1}{\omega}\left(1+\frac{\partial S}{\partial x}\right)\right)\varphi\right]+\sum_{k=2}^{m-1}(-ih)^k(R_k\varphi)\left(\overset{2}{x}, t, \overset{1}{\omega}\right)+h^mQ_m(h), \tag{8.29}$$

où les arguments $\left(\overset{2}{x}, t, \overset{1}{\omega}\right)$ des fonctions S et φ ont été omis. R_k sont des opérateurs différentiels d'ordre k agissant sur la fonction $\varphi(x, t, \omega)$ par rapport à x (il est possible d'expliciter tous les R_k). Le reste Q_m et tous ses commutateurs $I_s = \overset{2}{Q}_m \left(\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}} - \overset{3}{\frac{\partial}{\partial x}}\right)^s$, $s=0, 1, 2, \ldots$, sont justiciables en vertu de (8.27) des majorations

$$||I_s v|| \leqslant c_s ||v||, \qquad v \in M_N. \tag{8.30}$$

On remarquera maintenant que $hv_0 = A^{-1}\omega v_0$. Donc, de (8.28) et (8.29) on déduit l'équation

$$\begin{aligned}
&\left\{\left[\left(\overset{1}{\omega}\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - 4\overset{2}{[\![}c^2(x)\overset{2}{]\!]}\sin^2\left(\frac{\overset{1}{\omega}}{2}\left(1+\frac{\partial S}{\partial x}\right)\right)\right]\varphi + \right. \\
&+\left(-i\overset{1}{A}^{-1}\right)\left[2\overset{1}{\omega}^2\frac{\partial S}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial t} - 2\overset{1}{\omega}\overset{2}{[\![}c^2(x)\overset{2}{]\!]}\sin\left(\overset{1}{\omega}\left(1+\frac{\partial S}{\partial x}\right)\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \right. \\
&\left.+\overset{1}{\omega}^2\left(\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} - \overset{2}{[\![}c^2(x)\overset{2}{]\!]}\cos\left(\overset{1}{\omega}\left(1+\frac{\partial S}{\partial x}\right)\right)\right)\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\varphi\right] - \\
&-\sum_{k=2}^{m-1}\left(-i\overset{1}{A}^{-1}\right)^k \overset{1}{\omega}^k (R_k\varphi)\left(\overset{2}{x}, t, \overset{1}{\omega}\right)\overset{2}{[\![}c^2(x)\overset{2}{]\!]} - \\
&\left.-4\overset{3}{[\![}c^2(x)\overset{3}{]\!]}\overset{1}{A}^{-m}\overset{1}{\omega}^w\overset{1}{Q}_m\right\}v_0 = 0,
\end{aligned} \tag{8.31}$$

où les arguments $\left(\overset{2}{x}, t, \overset{1}{\omega}\right)$ des fonctions φ et S ont été omis.

On résoudra (8.31) en développant φ en série de A^{-1}, soit

$$\varphi = \sum_{k=0}^{m-2}\left(-i\overset{1}{A}^{-1}\right)^k \varphi_k\left(\overset{2}{x}, t, \overset{1}{\omega}\right)$$

Portons ce développement dans (8.31) et égalons à zéro les coefficients des puissances $(-iA^{-1})^k$, $k=0, \ldots, m-1$. Nous obtenons le système d'équations

$$\begin{aligned}
&\left(\omega\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - 4c^2(x)\sin^2\frac{\omega}{2}\left(1+\frac{\partial S}{\partial x}\right) = 0, \\
&R_1'\varphi_0 = 0, \\
&R_1'\varphi_1 + R_2'\varphi_0 = 0, \\
&\cdots \qquad \cdots \\
&R_1'\varphi_k + R_2'\varphi_{k-1} + \ldots + R_{k+1}'\varphi_0 = 0, \qquad k=1, 2, \ldots, m-2,
\end{aligned} \tag{8.32}$$

où

$$R_1' = 2\frac{\partial S}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t} - 2\frac{c^2(x)}{\omega}\sin\left(\omega\left(1+\frac{\partial S}{\partial x}\right)\right)\frac{\partial}{\partial x} + \\ + \left(\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} - c^2(x)\cos\left(\omega\left(1+\frac{\partial S}{\partial x}\right)\right)\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\right)$$

et les opérateurs R_k', $k=2, \ldots, m-1$, sont définis par les formules

$$R_k' = -4\omega^{k-2}c^2(x)R_k.$$

Supposons qu'on ait tiré S et φ_k des équations (8.32). On trouve alors que la fonction

$$V_m(x, t) = \sum_{k=0}^{m-2} e^{i\overset{1}{A}S\left(\overset{2}{x}, t, \overset{1}{\omega}\right)} \varphi_k\left(\overset{2}{x}, t, \overset{1}{\omega}\right)\left(-i\overset{1}{A}^{-1}\right)^k v_0 + a_0$$

est solution de l'équation (8.4) à la fonction

$$K_m(x, t) = e^{i\overset{1}{A}S\left(\overset{3}{x}, t, \overset{1}{\omega}\right)}\left[h^2\overset{2}{Q}_m'\overset{1}{A}^{-m+2}\right]v_0 \tag{8.33}$$

près, où l'opérateur Q_m' est défini par la formule suivante:

$$Q_m' = 4\overset{3}{[\![}c^2(x)]\!] \left\{\sum_{j=2}^{m-1}\sum_{l=0}^{j-2}(-i)^{m-2}\overset{1}{\omega}^{j-2} \times \right. \\ \left. \times \left(R_j\varphi_{m-j+l}\left(\overset{2}{x}, t, \overset{1}{\omega}\right)\left(-i\overset{1}{A}^{-1}\right)^l + \overset{2}{Q}_m\overset{1}{\omega}^{m-2}\right)\right\}. \tag{8.34}$$

On a de plus

$$\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)K_m(x, t) = \left\{\frac{\partial S}{\partial x}\left(\overset{3}{x}, t, \overset{1}{\omega}\right)e^{i\overset{1}{A}S\left(\overset{3}{x}, t, \overset{1}{\omega}\right)}h^2\overset{2}{Q}_m'\overset{1}{A}^{-m+3} - \right. \\ \left. - e^{i\overset{1}{A}S\left(\overset{3}{x}, t, \overset{1}{\omega}\right)}h^2\left[\overset{2}{Q}_m', -i\frac{\partial}{\partial x}\right]\overset{1}{A}^{-m+2} + e^{i\overset{1}{A}S\left(\overset{3}{x}, t, \overset{1}{\omega}\right)}h^2\overset{2}{Q}_m'\overset{1}{A}^{-m+3}\right\}v_1.$$

La formule (8.34) et la majoration (8.30) nous donnent

$$\left\|-i\frac{\partial}{\partial x}K_m(x, t)\right\| \leqslant c_1\|v_1\|,$$

où c_1 est une constante.

On majore de façon analogue les autres dérivées:

$$\left\|\frac{\partial^s}{\partial x^s}K_m(x, t)\right\| \leqslant c_s\|v_1\|, \quad s=0, 1, 2, \ldots, m-2.$$

Donc, si $\sup_{0<h<1} \|v_1\| \leqslant c$, la fonction V_m est solution de l'équation (8.4) à l'élément

$$\left[h^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 4c^2(x) \sin^2\left(-\frac{ih}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right)\right] V_m = K_m$$

de $C_{h,t}^{(m-2)}$ près.

Passons maintenant à la résolution des équations (8.32). Nous avons tout d'abord l'équation de Hamilton-Jacobi :

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \pm 2 \frac{c(x)}{\omega} \sin \frac{\omega}{2}\left(1 + \frac{\partial S}{\partial x}\right). \tag{8.35}$$

Considérons la condition initiale

$$S(x, 0, \omega) = 0. \tag{8.35'}$$

Pour résoudre ce problème de Cauchy, considérons le système de caractéristiques correspondant :

$$\begin{aligned} &\frac{dX^{\pm}}{dt} = \mp c(X^{\pm}) \cos\left[\frac{\omega}{2}(1 + P^{\pm})\right], \quad X^{\pm}|_{t=0} = x_0, \\ &\frac{dP^{\pm}}{dt} = \pm \frac{2}{\omega} \sin\left[\frac{\omega}{2}(1 + P^{\pm})\right] \frac{\partial c}{\partial x}(X^{\pm}), \quad P^{\pm}|_{t=0} = 0. \end{aligned} \tag{8.36}$$

Ce système s'intègre sans peine. Soit $X^{\pm}(x_0, \omega, t)$, $P^{\pm}(x_0, \omega, t)$ sa solution (le spectre $\sigma(\omega)$ appartient à l'intervalle $[-\pi, \pi]$). Comme $\left.\frac{\partial X^{\pm}}{\partial x_0}\right|_{t=0} = 1$, l'équation

$$x = X^{\pm}(x_0, \omega, t) \tag{8.36'}$$

admet une solution pour t assez petit, c'est-à-dire qu'il existe une solution différentiable $x_0 = x_0^{\pm}(x, t, \omega)$. Le problème (8.35), (8.35') admet alors la solution 2π-périodique en x suivante :

$$S_{\pm}(x, t, \omega) = \int_0^t \left\{ P^{\pm}(x_0, \omega, \tau) \frac{dX^{\pm}}{d\tau}(x_0, \omega, \tau) \pm \right.$$

$$\left. \pm 2 \frac{c(X^{\pm}(x_0, \omega, \tau))}{\omega} \sin\left[\frac{\omega}{2}(1 + P^{\pm}(x_0, \omega, \tau))\right] \right\} d\tau \Big|_{x_0 = x_0^{\pm}(x, t, \omega)}.$$

Ensuite on résout l'équation (8.32) comme l'équation des ondes au n° 2.

Finalement, on trouve le régulateur affaibli du problème (8.4) sous la forme

$$G\left(\overset{1}{t}, \overset{1}{\omega}, \overset{2}{x}\right) v_0 = \sum_{\pm} \sum_{k=0}^{m-2} e^{i\overset{1}{A}S^{\pm}\left(\overset{2}{x}, \overset{1}{t}, \overset{1}{\omega}\right)} \varphi_k^{\pm}\left(\overset{2}{x}, \overset{1}{t}, \overset{1}{\omega}\right) \left(-i\overset{1}{A}^{-1}\right)^k v_0. \tag{8.37}$$

En tenant compte maintenant de la remarque faite en fin du numéro précédent, on obtient le théorème suivant :

Théorème 8.2. *Pour t assez petit, la solution du problème* (8.4) *existe, est unique et sous la condition* (8.24) *est de la forme*

$$u(x, t)=G\left(t, \overset{1}{A}, \overset{2}{B}\right) v_0-h^{-2} R_0(K_m)+O(h).$$

Exhibons quelques conséquences simples. Pour cela il faut représenter (8.37) par une intégrale en se servant de la représentation d'un opérateur pseudo-différentiel sur un cercle, et trouver une représentation asymptotique (pour $h\to 0$) de cette intégrale à l'aide de la classique méthode de « phase stationnaire » (méthode du col simplifiée pour le cas réel).

Etablissons tout d'abord la formule de la méthode de phase stationnaire.

4. Méthode de phase stationnaire. Considérons l'intégrale

$$I(h)=\frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \int e^{\frac{i}{h}\Phi(y)} \varphi(y)\, dy,$$

où $\Phi(y)\in C^\infty(\mathbf{R})$, $\varphi(y)\in C_0^\infty(\mathbf{R})$, $\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\neq 0$ pour $y\in\operatorname{supp}\varphi$ et l'équation $\partial\Phi/\partial y=0$ admet une seule solution $y=y_0$ pour $y\in\operatorname{supp}\varphi(y)$ (le point stationnaire).

Lemme 8.3. *Sous les conditions ci-dessus, pour tout $N\geqslant 1$, on a le développement*

$$I(h)=e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{\pi}{2}(1-\operatorname{sign}\Phi''(y_0))} \frac{e^{\frac{i}{h}\Phi(y_0)}}{\sqrt{|\Phi''(y_0)|}} \left(y(y_0)+\sum_{k=1}^{N} h^k \psi_k(y_0)\right), \qquad (8.38)$$

où

$$\psi_k(y_0)=\int_0^{\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\Phi''(y_0)} \sqrt{J(y, t_1)}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\sqrt{J(y, t_1)}\,\frac{1}{\sqrt{J(y, t_1)}}\cdots$$

$$\cdots\int_0^{t_{k-1}} \sqrt{J(y, t_k)}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\frac{1}{\sqrt{J(y, t_k)}}\,\varphi(y)\,dt_1\ldots dt_k,$$

$y=y(x, t)$ est solution de l'équation (8.49), *et le jacobien*

$$J(x, t)\overset{\text{déf}}{=}\tilde{J}(y(x, t), t)$$

est défini par la formule (8.48).

Pour la démonstration on se servira d'une représentation asymptotique pour $h \to 0$ de la solution du problème de Cauchy pour l'*équation de Schrödinger de l'oscillateur*

$$-ih\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{x^2}{2}\psi, \quad \psi|_{t=0} = \varphi(x)\, e^{\frac{i}{h}\Phi(x)}. \tag{8.39}$$

Cette représentation est dite *quasi classique*. Par une dérivation directe on démontre que la solution de l'équation (8.39) est donnée par la formule

$$\psi(x, t) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\operatorname{sign} t)}}{(2\pi h|\sin t|)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{2h\sin t}[\cos t\, x^2 - 2xy + \cos t\, y^2]} \times e^{\frac{i}{h}\Phi(y)} \varphi(y)\, dy. \tag{8.40}$$

En faisant $x = 0$ et $t = \pi/2$ dans (8.40), on obtient l'égalité

$$I(h) = \psi(0, \pi/2), \tag{8.41}$$

et en faisant $x = 0$ et $t = -\pi/2$ dans (8.40), l'égalité

$$I(h) = e^{-i\pi/2}\psi(0, -\pi/2). \tag{8.42}$$

On voit donc que le développement de la fonction $I(h)$ en série est, en vertu des formules (8.41) et (8.42), confondu avec la solution asymptotique quasi classique du problème de Cauchy (8.39). Cherchons la solution du problème (8.39) sous forme de la série asymptotique *)

$$\psi(x, t, h) = e^{\frac{i}{h}S(x,t)}[\varphi_0(x, t) + h\varphi_1(x, t) + \ldots$$
$$\ldots + h^N \varphi_N(x, t) + \ldots] \stackrel{\text{déf}}{=} e^{\frac{i}{h}S(x,t)}\varphi(x, t, h), \tag{8.43}$$

où $S(x, t) \in C^\infty$, $\varphi_i(x, t, h) \in C^\infty$ sont des fonctions à déterminer. En portant la fonction $\varphi(x, t, h)$ définie par (8.43) dans l'équation (8.39), on obtient l'équation

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + x^2}{2}\right)\varphi + h\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\varphi\right) - h^2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0. \tag{8.44}$$

Annulons le terme ne contenant pas h. Nous obtenons l'*équation* de *Hamilton-Jacobi pour l'oscillateur*

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + x^2\right]. \tag{8.45}$$

Posons $S(x, 0) = \Phi(x)$.

*) Les raisonnements ultérieurs sont les mêmes qu'au n° 2.

Considérons le système de Hamilton pour l'oscillateur

$$\begin{aligned} \dot{q} &= p, \qquad q(0) = y, \\ \dot{p} &= -q, \qquad p(0) = \frac{\partial \Phi}{\partial y}(y). \end{aligned} \tag{8.46}$$

Il est immédiat de voir qu'il admet pour solutions les fonctions

$$q(t, y) = y \cos t + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \sin t; \quad p(t, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cos t - y \sin t. \tag{8.47}$$

Les fonctions q et p s'appellent *trajectoires du système hamiltonien* (8.46). Posons

$$\tilde{J}(y, t) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial q}{\partial y}(t, y).$$

De (8.47) il vient

$$\tilde{J}(y, t) = \cos t + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \sin t. \tag{8.48}$$

De cette formule il résulte que

1) si $\partial^2 \Phi / \partial y^2 > 0$ pour $y \in \operatorname{supp} \varphi(y)$, alors

$$\tilde{J}(x, t) \neq 0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant \pi/2;$$

2) si $\partial^2 \Phi / \partial y^2 < 0$ pour $y \in \operatorname{supp} \varphi(y)$, alors

$$\tilde{J}(y, t) \neq 0, \qquad -\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant 0.$$

On admettra dans la suite que $\partial^2 \Phi / \partial y^2 > 0$. On se ramène au cas contraire $\partial^2 \Phi / \partial y^2 < 0$ en remplaçant t par $-t$.

Désignons par $y = y(t, x)$ la solution de l'équation

$$q(t, y) = x \tag{8.49}$$

(cette solution existe en vertu du théorème de la fonction implicite). Comme au n° 2 on trouve que la solution de l'équation (8.45) est donnée par la formule

$$S(x, t) = \Phi(y(x, t)) + \frac{1}{2} \int_0^t [p^2(y, \tau) - x^2(y, \tau)]\, d\tau \Big|_{y = y(x, t)}. \tag{8.50}$$

Considérons les termes restants de l'équation (8.43). Introduisons le champ de vecteurs

$$\frac{\partial}{\partial t} + p(y(x, t), t) \frac{\partial}{\partial x} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{d}{d\tau}.$$

Calculons la dérivée $\frac{d}{d\tau}\tilde{J}(y(x, t), t)$. Remarquons tout d'abord que le champ de vecteurs $d/d\tau$ est confondu avec la dérivation le long des projections des trajectoires du système hamiltonien (8.46) sur le plan (x, t). On a

$$\frac{d}{d\tau}\tilde{J}(y(x, t), t)\Big|_{t=t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\tilde{J}(y(x, t_0), t_0+\Delta t) - \tilde{J}(y(x, t_0), t_0)}{\Delta t} =$$

$$= \tilde{J}(y(x, t_0), t_0) \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\tilde{J}(x, \Delta t) - 1}{\Delta t},$$

où $\tilde{J}(x, \Delta t)$ est le jacobien de la translation le long des trajectoires du système hamiltonien suivant :

$$\dot{\tilde{q}} = \tilde{p}, \qquad \tilde{q}(0) = x \stackrel{\text{déf}}{=} q_0,$$

$$\dot{\tilde{p}} = -\tilde{q}, \quad \tilde{p}(0) = p(t_0, y(x, t_0)) \stackrel{\text{déf}}{=} p_0.$$

Pour calculer $\tilde{J}(x, \Delta t) \stackrel{\text{déf}}{=} J_{\Delta t}$ on remarquera que ce système hamiltonien nous donne

$$\tilde{q}(\Delta t) = x + p_0 \cdot \Delta t + O(\Delta t^2)$$

et

$$J_{\Delta t} = \frac{\partial \tilde{q}(\Delta t)}{\partial x} = 1 + \frac{\partial p_0}{\partial x}\Delta t + O(\Delta t)^2.$$

Il est aisé de voir que la fonction $S(x, t)$ définie par (8.50) satisfait la condition $\frac{\partial S}{\partial x} = p$. Finalement

$$\frac{d}{d\tau}J(y(x, t), t)\Big|_{t=t_0} = \frac{\partial p_0}{\partial x} = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(x, t_0)\tilde{J}(y(x, t_0), t_0).$$

Posons maintenant

$$J = J(x, t) = \tilde{J}(y(x, t), t).$$

Pour toute fonction $\theta(x, t) \in C^\infty$, on en déduit que

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\theta(x, t)}{\sqrt{J}}\right) = \frac{1}{\sqrt{J}}\frac{d\theta}{d\tau} - \frac{1}{2}\frac{\theta}{\sqrt{J}}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}$$

Dans la formule (8.43) posons

$$\varphi_k(x, t) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\theta_k(x, t)}{\sqrt{J}}$$

et portons la fonction $\psi(x, t, h)$ tirée de l'équation (8.43) dans l'équation (8.39); en se servant des formules (8.44) et (8.51) et en identifiant les puissances de h, on obtient le système récurrentiel

$$\frac{d\theta_0}{d\tau}=0, \qquad \theta_0|_{t=0}=\varphi(y),$$

. . . .

$$\frac{d\theta_k}{d\tau}=\sqrt{J}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\theta_{k-1}}{\sqrt{J}}, \qquad \theta_1|_{t=0}=\ldots=\theta_k|_{t=0}=0.$$

De là il s'ensuit que $\theta_0(x, t)=\varphi(y(x, t))$, et θ_k, $k>1$, est donnée par la formule

$$\theta_k(x, t)=\int_0^t \sqrt{J(t_1)}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{1}{\sqrt{J(t_1)}}\int_0^{t_1}\sqrt{J(t_2)}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{1}{\sqrt{J(t_2)}}\ldots$$

$$\ldots\int_0^{t_{k-1}}\sqrt{J}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\varphi(y)}{\sqrt{J(t_k)}}\,dt_k\ldots dt_1, \tag{8.51}$$

où $J(t_j)\overset{\text{déf}}{=}J(x, t_j)$ et l'intégration a lieu le long des trajectoires du système (8.46).

Prouvons maintenant que la fonction $\psi(x, t, h)$ définie par l'égalité (8.43) dont les fonctions $\varphi_k(x, t)$ et $S(x, t)$ viennent juste d'être déterminées est bien le développement asymptotique de la solution du problème (8.39). Posons

$$\psi_N(x, t, h)=\frac{1}{\sqrt{J(x, t)}}\,e^{iS(x, t)/h}\left[\varphi(y(x, t))+\sum_{k=1}^{N}h^k\theta_k(x, t)\right].$$

Il nous faut prouver que la fonction $\psi_N(x, t, h)$ diffère peu de la fonction $\psi(x, t)$ qui est la solution exacte du problème (8.39). Plus exactement, on prouvera que

$$\max_{(x, t)\in\mathbf{R}^1\times[0, \pi/2]}\left|\psi_N(x, t, h)-\psi(x, t)\right|=O(h^{N-1/2}). \tag{8.52}$$

Pour établir l'estimation (8.52), on remarquera que par construction $\psi_N(x, t, h)$ est solution de l'équation

$$-ih\frac{\partial\psi_N}{\partial t}=\frac{1}{2}\left(-h^2\frac{\partial^2\psi_N}{\partial x^2}+x^2\psi_N\right)-h^N\sqrt{J(x, t)}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\theta_N(x, t)}{\sqrt{J(x, t)}}, \quad \psi_N|_{t=0}=\varphi e^{\frac{i}{h}\Phi}$$

et, par suite, la différence $\psi_N(x, t, h)-\psi(x, t)=\tilde{\psi}(x, t, h)$ est solution du problème

$$-ih\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial t}=\frac{1}{2}\left(-h^2\frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial x^2}+x^2\tilde{\psi}\right)-h^N\sqrt{J(x, t)}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\theta_N(x, t)}{\sqrt{J(x, t)}},$$
$$\tilde{\psi}|_{t=0}=0. \tag{8.53}$$

Par un calcul direct on montre sans peine que la solution du problème (8.53) est

$$\tilde{\psi}(x, t)=\int_0^t \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\operatorname{sign}(t-\tau))}}{\sqrt{2\pi h \sin(t-\tau)}} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{2h\sin(t-\tau)}[\cos(t-\tau)x^2-2xy+\cos(t-\tau)y^2]} \times$$

$$\times h^N \sqrt{J(y, t)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\theta_N(y, t)}{\sqrt{J(y, t)}} dy\, d\tau. \qquad (8.54)$$

On voit sur l'équation (8.51) que $\theta_k(x, t) \in C_0^\infty(x, t)$, $k=0, \ldots$, de même que $\varphi(y)$. Comme $1/\sqrt{\sin z}$ est une fonction intégrable au voisinage du point $z=0$, on déduit immédiatement la majoration (8.52) de l'égalité (8.54).

Posons maintenant $x=0$ et $t=\pi/2$ dans nos formules. On remarquera que $S(x, t)|_{t=\pi/2}=\Phi(y(0, \pi/2))$. Cette relation se déduit sans difficultés de la formule (8.50). Des égalités (8.47) on obtient

$$q(0, \pi/2)=0=\partial\Phi/\partial y.$$

Par hypothèse, l'égalité $\partial\Phi/\partial y=0$ est vraie uniquement en $y=y_0$. Donc, $y(0, \pi/2)=y_0$ et l'on obtient le développement (8.38).

Remarque 1. La méthode de la phase stationnaire peut être appliquée aux intégrales de la forme $\int_a^b \varphi(y) e^{i\Phi(y)/h} dy$. Supposons que la dérivée $\partial\Phi/\partial y$ est différente de 0 dans des voisinages des points a et b. Considérons sur $[a, b]$ une partition de l'unité $\{e_1(y), e_2(y), e_3(y)\}$ telle que $e_1(y), e_2(y), e_3(y) \in C_0^\infty$, $e_1+e_2+e_3=1$ sur $[a, b]$; $e_2(a)=e_3(b)=1$; $\partial\Phi/\partial y \neq 0$ pour $y \in \operatorname{supp} e_2 \cup \operatorname{supp} e_3$, $\operatorname{supp} e_1 \in]a, b[$. Alors

$$\int_a^b \varphi(y) e^{i\Phi(y)/h} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) e_1(y) e^{i\Phi(y)/h} dy +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} e_2(y) \varphi(y) e^{i\Phi(y)/h} dy + \int_{-\infty}^{b} e_3(y) \varphi(y) e^{i\Phi(y)/h} dy.$$

Nous avons déjà calculé la première intégrale, quant aux deux autres, il est aisé de montrer par une intégration par parties qu'elles sont de l'ordre de h.

Remarque 2. Nous aurons encore besoin des sommes

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi h}} h \sum_{n=-N+1}^{N} e^{\frac{i}{h}\Phi(nh)} \varphi(nh), \qquad h=\frac{\pi}{N}.$$

Leur calcul se ramène au cas précédent grâce à l'égalité

$$h \sum_{n=-N+1}^{N} e^{\frac{i}{h}\Phi(nh)} \varphi(nh) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{i}{h}\Phi(y)} \varphi(y)\, dy + \\ + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{i}{h}\Phi(y)} \varphi(y) \cos(2kNy)\, dy, \qquad (8.55)$$

que l'on démontre d'une manière élémentaire en développant la fonction $e^{\frac{i}{h}\Phi(y)} \varphi(y)$ en série de Fourier sur $[-\pi, \pi]$ et en utilisant ensuite la formule de la somme des termes d'une progression géométrique.

5. Train d'oscillations. La solution (8.37) est la somme des expressions

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v_1(\xi) \sum_{n=-N+1}^{N} e^{(i/h)nh[S_\pm(x,t,nh)+x-\xi]} \varphi^{\pm}(x, t, nh)\, d\xi.$$

Mais, en vertu de la formule (8.55),

$$h \sum_{n=-N+1}^{N} e^{(i/h)nh[S_\pm(x,t,nh)+x-\xi]} \varphi^{+}(x, t, nh) = \\ = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x, t\omega)\, e^{(i/h)\omega[S_\pm(x,t,\omega)+x-\xi]} d\omega + \\ + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x, t, \omega)\, e^{(i/h)\omega[S_\pm(x,t,\omega)+x-\xi]} \cos 2k\omega N d\omega.$$

Le point stationnaire ω_0 des intégrales se détermine à partir des équations

$$S_\pm(x, t, \omega_0) + x + \omega_0 \frac{\partial S_\pm}{\partial \omega}(x, t, \omega_0) = \xi + 2\pi k. \qquad (8.56)$$

Si t n'est pas «assez grand», cette équation admet une solution uniquement pour $k=0$, puisque $S_\pm(x, t, \omega)\big|_{t=0} = 0$.

Estimons le k-ième terme ($k \neq 0$) de la somme. Une double intégration par parties (une fois en mettant le cosinus sous le signe d'intégration et la deuxième fois en développant le cosinus à l'aide de la formule d'Euler) de l'exponentielle nous conduit à une estimation de l'ordre de h/k^2. D'où il s'ensuit que la somme de la série de $k=1$ à $k=\infty$ est de l'ordre de h.

Passons maintenant à l'intégration de l'équation implicite (8.56). Le premier membre de cette équation est doué d'une propriété remarquable. Sa dérivée est nulle en vertu du système de bicaractéristiques (8.36) correspondant pris avec le signe plus ou moins (c'est-à-dire le long de la bicaractéristique correspondante). Nous laissons au lecteur le soin de vérifier ce fait (qui est général).

On en déduit que le premier membre de cette égalité est constant le long de la bicaractéristique correspondante, et comme

$$S_{\pm}\Big|_{t=0} = \frac{\partial S_{\pm}}{\partial \omega}\Big|_{t=0} = 0,$$

il est égal à $x_0^{\pm}(x, t, \omega_0)$ (c'est-à-dire à la solution de l'équation (8.36): $x = X^{\pm}(x_0, \omega, t)$) pour t pas très grand. Donc, l'équation (8.56) du point stationnaire est équivalente à l'équation

$$X^{\pm}(\xi, \omega_0, t) = x.$$

Ainsi, l'équation du point stationnaire n'admet une solution que pour les x appartenant aux domaines fermés

$$\Omega_{\pm} = \{X^{\pm}(\xi, \omega, t), \quad |\omega| \leqslant \pi\},$$

c'est-à-dire aux domaines formés par les extrémités des trajectoires du système de bicaractéristiques (8.36) issues du point ξ.

Soit x un point intérieur d'un domaine $\Omega_{\pm}$. Si $\omega \neq 0$, alors

$$\frac{\partial x_0^{\pm}}{\partial \omega} = -\frac{\partial X^{\pm}}{\partial \omega} \Big/ \frac{\partial X^{\pm}}{\partial x_0} \neq 0 \quad \text{pour} \quad t \neq 0,$$

puisque $\dfrac{\partial X^{\pm}}{\partial \omega} \neq 0$ pour $t \neq 0$ (on établit ceci en dérivant le système (8.36) par rapport à ω). Donc, la dérivée du premier membre de (8.56) par rapport à ω est $\neq 0$ pour $t \neq 0$ et $\omega \neq 0$, et la méthode du point stationnaire est applicable. Par conséquent, il est évident qu'à l'intérieur des domaines $\Omega_{\pm}$ la solution oscille rapidement et ses dérivées tendent vers l'infini lorsque $h \to 0$, donc à la limite ne se transforment pas en les dérivées de la solution de l'équation des ondes.

Remarque. Si x est situé sur les caractéristiques de l'équation des ondes limite $\left(\text{c'est-à-dire que } x = X_0^{\pm}(\xi, t), \text{ où } \dfrac{dX_0^{\pm}}{dt} = \mp C(X_0^{\pm}),\ X_0^{\pm}(\xi, 0) = \xi\right)$, alors le point stationnaire $\omega_0 = 0$ est dégénéré:

$$\frac{\partial x_0^{\pm}}{\partial \omega}(x, t, 0) = 0.$$

En fait, cela signifie que la «discontinuité principale» se propage le long des caractéristiques de l'équation des ondes limite entraînant

l'apparition d'un « train » d'oscillations rapides. Le support de ce train est défini par les caractéristiques $X^{\pm}$. Nous voyons sur cet exemple que les caractéristiques données par une équation de Hamilton pour des opérateurs ordonnés définissent exactement le support du train d'oscillations. Ce fait découle effectivement de la théorie générale pour une vaste classe de problèmes et les relations exhibées ici sont générales aussi.

Comparons maintenant la valeur du support de ce train avec des résultats expérimentaux.

Dans cette expérience nous avons pris $l=10^{-5}$ cm pour unité de longueur, $2l$ pour longueur de l'intervalle (du cercle), $h=10^{-8}$ cm, $c=10^5$ cm/sec, vitesse du son dans un cristal, pour unité de vitesse. Pour condition initiale nous avons pris une fonction périodique de la forme $u|_{t=0}=\frac{1}{2}(x-2n-1)$ pour $2n\leqslant x\leqslant 2n+2$, $n=0, \pm 1, \ldots$, présentant un saut aux points $x=2n$, $n=0, \pm 1, \ldots$

Sur la figure 1 le graphique de la fonction

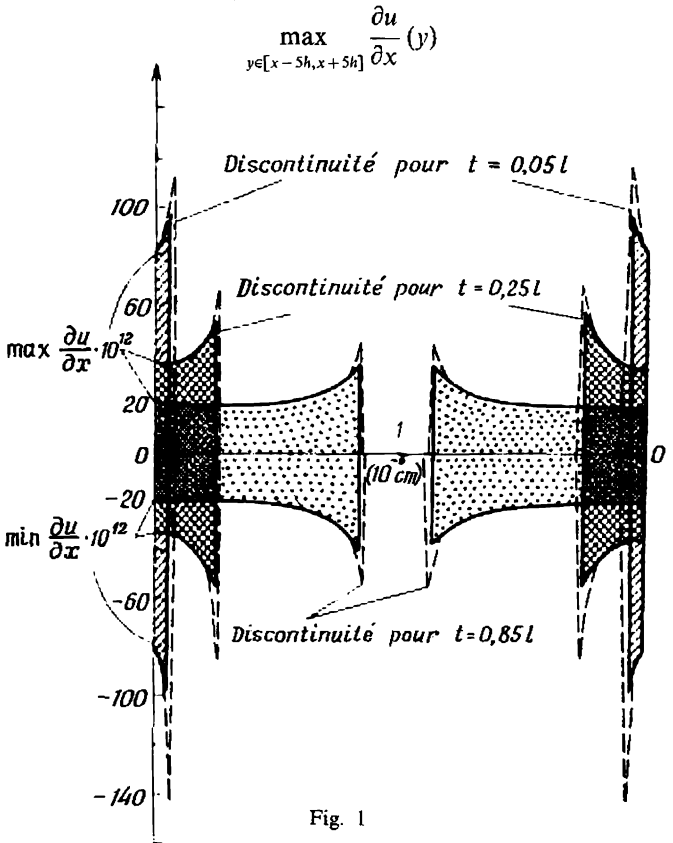


Fig. 1

est la frontière supérieure du domaine hachuré, celui de la fonction

$$\min_{y\in[x-5h,\,x+5h]} \frac{\partial u}{\partial x}(y),$$

la frontière inférieure. (La ligne pleine représente les graphiques de la solution exacte, la ligne en pointillé, ceux des solutions acquises par la formule asymptotique.)

6. Effet de Tchérenkov. Le physicien soviétique P. Tchérenkov a découvert en 1934 un effet de rayonnement (sans freinage) de la lumière engendré par le mouvement de particules chargées dans la matière. Cet effet fut expliqué théoriquement en 1937 par I. Tamm et I. Frank. Mais il fallut attendre les années 50 pour mesurer l'exceptionnel champ d'application de cet effet (Tchérenkov, Tamm et Frank furent honorés du prix Nobel en 1958).

Voici en quoi consiste cet effet : lorsqu'un électron se déplace dans un milieu à une vitesse supérieure à un certain seuil dépendant de ce milieu, il engendre sur son passage dans un certain domaine conique des oscillations électromagnétiques rapides : des ondes de lumière. Il s'avère que la nature mathématique de cet effet est liée à la détermination de caractéristiques dépendant d'opérateurs ordonnés. La méthode opératorielle permet de découvrir une propriété mathématique identique pour une vaste classe d'équations pseudo-différentielles et, en particulier, de schémas aux différences, y compris pour des systèmes d'équations du cristal. Dans ce dernier cas, cette propriété découle directement des formules asymptotiques établies ci-dessus.

L'équation du mouvement d'un « électron » à une vitesse v s'obtient par l'introduction d'une fonction δ en $x=vt$ dans le second membre de l'équation des oscillations (l'équation des oscillations électromagnétiques dans un milieu pour l'effet Tchérenkov et le système d'équations des oscillations du cristal dans le cas qui nous concerne). Le rayonnement de Tchérenkov représente mathématiquement le train d'oscillations rapides de la solution, qui suit le point $x=vt$. Cet effet s'apparente à celui qui a été décrit au numéro précédent. Nous allons l'étudier théoriquement et procéder à une comparaison avec des résultats expérimentaux. Comme au numéro précédent on verra que ce train (le domaine du rayonnement de Tchérenkov) est entièrement défini par les bicaractéristiques.

Soit donc le problème

$$\begin{aligned} &L_h u \stackrel{\text{déf}}{=} h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 4c^2 \sin^2\left(-\frac{ih}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right) u = \varphi(t)\,\delta_h(x-vt), \\ &u(x,0)=u'_t(x,0)=0, \qquad u(x+2\pi,t)=u(x,t), \end{aligned} \tag{8.57}$$

où $\delta_h(x-vt)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\sum_{k=-N+1}^{N} e^{ik(x-vt)}$ et $\varphi(t)$ est une fonction différentiable.

On résoudra ce problème pour des t pas très grands. Le théorème 8.2 nous dit que la solution du problème (8.57), soit $L_h u = f$, est unique : $u \overset{\text{déf}}{=} L_h^{-1} f$. De façon analogue à (8.8′), (8.8″) on trouve que

$$R(x, t) = \frac{1}{h^2} \int_0^t \int_0^{t-\tau} G\left(\tau', \overset{1}{\omega}, \overset{2}{x}\right) \varphi(\tau)\, \delta_h(x - \tau v)\, d\tau' d\tau$$

vérifie la relation

$$L_h R = \varphi(t)\, \delta_h(x, t) + \int_0^t \int_0^{t-\tau} f_1\left(\tau', \overset{1}{\omega}, \overset{2}{x}\right) \varphi(\tau)\, \delta_h(x, \tau)\, d\tau' d\tau,$$

où $f_1\left(t, \overset{1}{\omega}, \overset{2}{x}\right)$ satisfait (8.7). D'après le lemme 8.2 et le théorème 8.1, la solution de l'équation

$$L_h R_1 = \int_0^t \int_0^{t-\tau} f_1\left(\tau', \overset{1}{\omega}, \overset{2}{x}\right) \varphi(\tau)\, \delta_h(x, \tau)\, d\tau' d\tau,$$

$$R_1\Big|_{t=0} = \frac{\partial R_1}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$$

est de classe $C_{t,h}^{k(m)}$, où $k(m) \to \infty$ lorsque $m \to \infty$. Donc, vu que $R - R_1$ est solution du problème initial (8.57), toute la partie non différentiable de la solution de ce problème est contenue dans R. De même qu'au n° 5, en calculant la représentation asymptotique de R lorsque $h \to 0$, on trouve (par une intégration par parties par rapport à τ') que le terme principal est défini par une intégrale de la forme

$$\frac{1}{h^2 \cdot 2\pi h} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{x/v} \left[e^{\frac{i\omega S_+(x,\, t-\xi/v,\, \omega)}{h}} \varphi_0^+(x, t-\xi/v, \omega) \frac{\partial S_+}{\partial t}(x, t-\xi/v, \omega) - e^{\frac{i\omega S_-(x,\, t-\xi/v,\, \omega)}{h}} \varphi_0^-(x, t-\xi/v, \omega) \frac{\partial S_-}{\partial t}(x, t-\xi/v, \omega) \right] e^{i\omega(x-\xi)} \varphi(\xi/v)\, d\omega\, d\xi.$$

En appliquant la méthode de la phase stationnaire d'abord par rapport à ω et ensuite par rapport à ξ, on constate que le point stationnaire commun ω_0, ξ_0 ($\omega_0 \neq 0$) se déduit du système d'équations

$$\begin{aligned} \xi_0 &= x_0^{\pm}(x, t-\xi/v, \omega_0), \\ \omega_0 &= \pm \frac{c(x)}{v} \sin\left[\frac{\omega_0}{2}\left(1 + \frac{\partial S_{\mp}}{\partial x}\left(x, t - \frac{\xi_0}{v}, \omega_0\right)\right)\right]. \end{aligned} \tag{8.58}$$

On s'assure immédiatement que si $\omega \neq 0$, $|\omega_0| < \pi$, $|\xi_0| < \pi$, les dérivées secondes ne sont pas nulles et l'on peut appliquer la méthode de phase stationnaire.

Traitons pour simplifier le cas $c = \text{const}$. Le système (8.58) devient alors

$$\omega_0 = \pm\frac{2c}{v}\sin\frac{\omega_0}{2}, \qquad \xi_0 = \frac{x \pm ct\cos(\omega_0/2)}{1 \pm \frac{c}{v}\cos\frac{\omega_0}{2}}. \tag{8.59}$$

Il est immédiat de voir sur le graphique que l'équation (8.59) admet une solution pour $\omega_0 \neq 0$ si

$$c \geqslant v \geqslant 2c/\pi \tag{8.60}$$

puisque $|\omega| \leqslant \pi$. Si la condition (8.60) est réalisée, la solution oscille pour $h \to 0$ sur l'ensemble constitué des extrémités de toutes les trajectoires issues pour $t = 0$ des domaines

$$\Omega_\xi^0 = \left\{X_0 = \xi\left(1 \pm \frac{c}{v}\cos\frac{\omega_0}{2}\right)\right\}, \tag{8.61}$$

où ω_0 se déduit de l'équation (8.61). Alors $\omega_0 = 0$ est dégénéré, et la solution présente une singularité (une « résonance »).

Comparons la largeur du train d'oscillations du problème (8.57) donnée par les formules (8.61) avec la solution exacte du problème (8.58) obtenue sur ordinateur pour différentes valeurs de v. Supposons dans les unités du numéro précédent que la longueur du cercle est égale à 2, $c = 1$, $h = 10^{-3}$. La dérivée seconde $\partial^2 u/\partial t^2$ se calcule approximativement à l'aide de la formule $-\frac{4}{\tau^2}\sin^2\frac{i\tau}{2}\frac{\partial}{\partial t}$, $\tau = 1{,}5 \cdot 10^{-4}$.

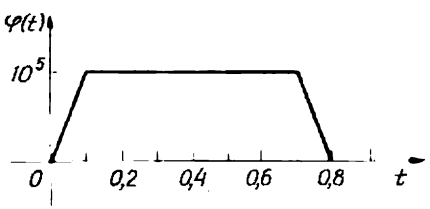


Fig. 2

La figure 2 représente le graphique de la fonction $\varphi(t)$, les figures 3 et 4, ceux des fonctions

$$\max_{[x-10h,\, x+10h]} \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{et} \quad \min_{[x-10h,\, x+10h]} \frac{\partial u}{\partial x}$$

à des dates différentes. L'espace compris entre les graphiques a été noirci. Les droites verticales représentent les frontières du train d'oscillations acquises à l'aide des formules asymptotiques.

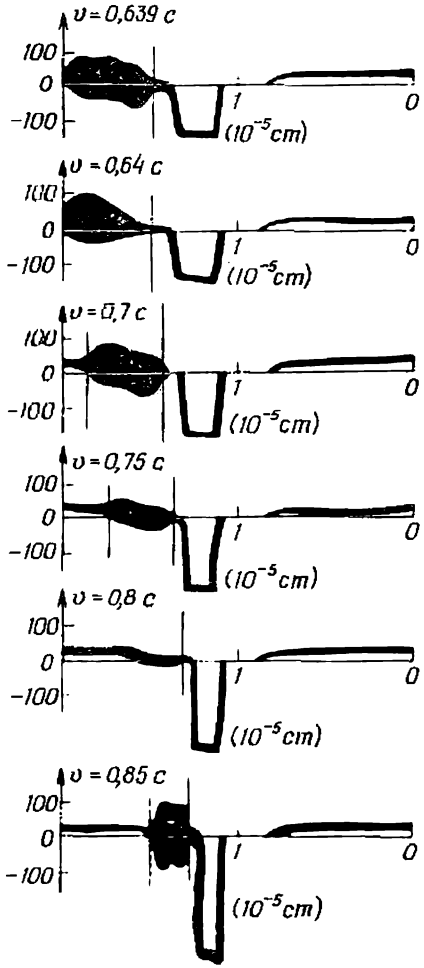


Fig. 3

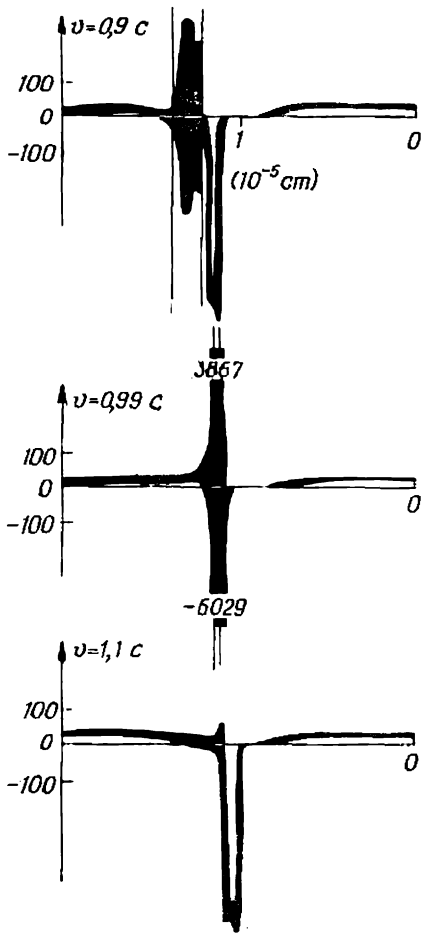


Fig. 4

7. Focalisation dans un cristal. Considérons un exemple de condition initiale oscillant rapidement

$$\left.u\right|_{t=0} = \varepsilon\psi(x, h),$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = -\varepsilon\frac{2ic}{h}\sin\frac{\hat{\omega}}{2}\psi(x, h), \tag{8.62}$$

où $\psi(x, h)$ est le prolongement périodique en dehors de l'intervalle $[0, 2\pi]$ de la fonction $\varphi(x)\cos\dfrac{S(x)}{h}$; S, $\varphi \in C^\infty$, $\operatorname{supp}\varphi \in]0, 2\pi[$, ε est un paramètre.

En vertu de la méthode de phase stationnaire, les coefficients de Fourier de la fonction ψ d'indice n, $|n|>N$, sont de l'ordre de h^{∞}, donc les formules obtenues dans les numéros précédents sont valables pour le cas des conditions initiales (8.62).

Comparons les résultats obtenus à l'aide des formules du numéro 3 à la solution numérique de ce problème.

Dans les calculs sur ordinateur on a pris la longueur du cercle égale à $3l$, $l=10^{-5}$ cm, $t_i=2i\cdot 10^{-10}$ sec ($i=0, 1, \ldots, 5$),

$$S(x)=x^2$$

$$\varphi(x)=\begin{cases} 4x & \text{pour} \quad x\in[0;\ 0{,}25] \\ 1 & \text{pour} \quad x\in[0{,}25;\ 2] \\ 4(2-x)+1 & \text{pour} \quad x\in[2;\ 2{,}25] \\ 0 & \text{pour} \quad x\in[2{,}25;\ 3]. \end{cases}$$

De même que dans les deux numéros précédents, la solution de l'équation du cristal pour $c=\text{const}$ peut être déterminée à l'aide des formules (8.37) et (8.38). Le terme correspondant au signe + n'admettra pas de point stationnaire, donc on peut le négliger. Il est aisé de voir que la méthode de phase stationnaire passe pour $ct<1$. La condition $\partial^2\Phi/\partial y^2\neq 0$ du lemme 8.3 est violée au point $ct=1$, $x=\pi/2$. En ce point, dit *focal*, les oscillations du cristal ont une amplitude plus grande qu'aux points voisins.

A noter que le point focal peut être déterminé directement à partir des équations des bicaractéristiques (identiques à (8.36)) pour $c=\text{const}$:

$$\frac{dx}{dt}=c\cos\frac{p}{2}, \qquad \frac{dp}{dt}=0, \tag{8.62'}$$

dont les conditions initiales

$$x(0)=x_0, \qquad p(0)=p_0=2x_0,$$

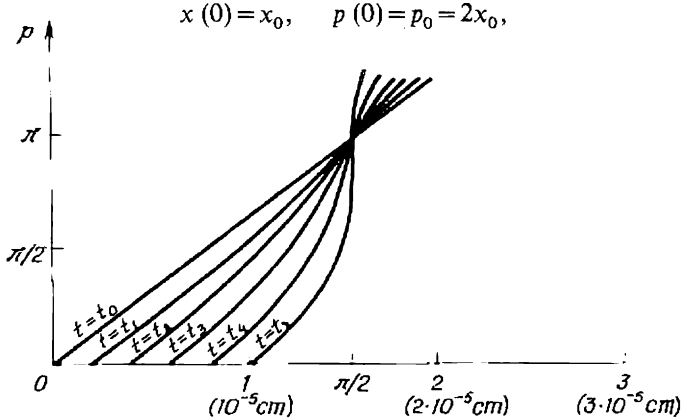


Fig. 5

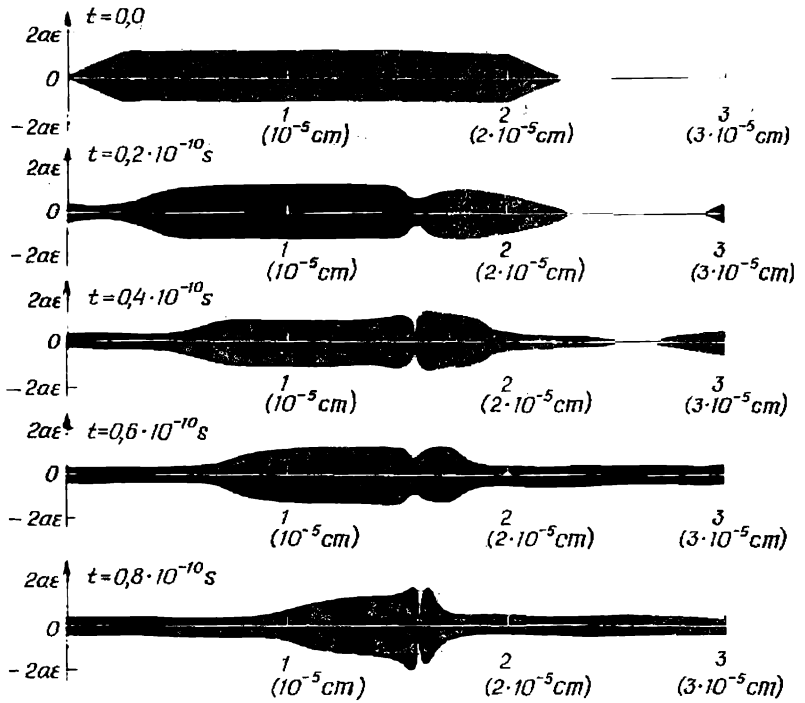

t=0,0
2aε
0
-2aε
1
(10⁻⁵cm)
2
(2·10⁻⁵cm)
3
(3·10⁻⁵cm)
t=0,2·10⁻¹⁰s
t=0,4·10⁻¹⁰s
t=0,6·10⁻¹⁰s
t=0,8·10⁻¹⁰s

Fig. 6

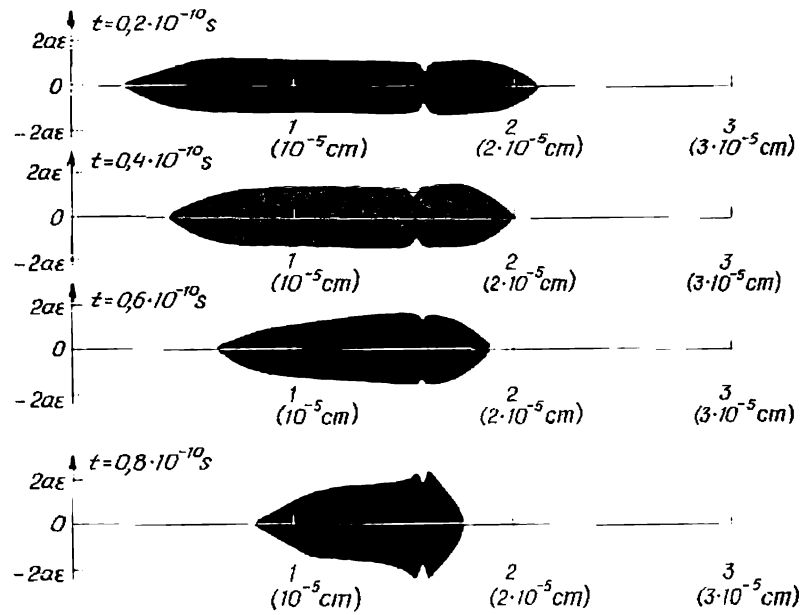

t=0,2·10⁻¹⁰s
2aε
0
-2aε
1
(10⁻⁵cm)
2
(2·10⁻⁵cm)
3
(3·10⁻⁵cm)
t=0,4·10⁻¹⁰s
t=0,6·10⁻¹⁰s
t=0,8·10⁻¹⁰s

Fig. 7

correspondent aux conditions initiales (8.62) où $S=x^2$. Considérons le plan de phase (p, x) (dans lequel on identifie les points $x=2\pi n$ de sorte qu'on a affaire à un cylindre). A la condition initiale $p_0=2x_0$ est associée la droite $p=2x$, droite qui se déplace le long des trajectoires du système des bicaractéristiques: plus exactement, à tout instant fixe on obtient une courbe $\{x(x_0,t),\ p(x_0,t)\}$. Les courbes correspondant aux instants $t=t_1, \ldots, t_5$ sont représentées sur la figure 5. Pour $t=t_5$, la courbe se projette sur l'axe p et pour $p=\pi$ la tangente à cette courbe est parallèle à l'axe p. Le point de contact de cette tangente est précisément le point focal.

La figure 6 représente les graphiques de max U et min U (le domaine compris entre ces graphiques est noirci) de la solution exacte de l'équation (8.4) vérifiant les conditions initiales (8.62) pour $t=t_0, \ldots, t_4$, et la figure 7, les graphiques correspondants pour la solution acquise à l'aide des formules asymptotiques ($a=1$).

Les figures 8 et 9 représentent les graphiques correspondant à $t=t_5$ (la solution exacte est représentée sur la figure 8). On constate qu'au point focal l'amplitude des oscillations du cristal croît brusquement. Considérons maintenant l'équation non linéaire des oscillations du réseau.

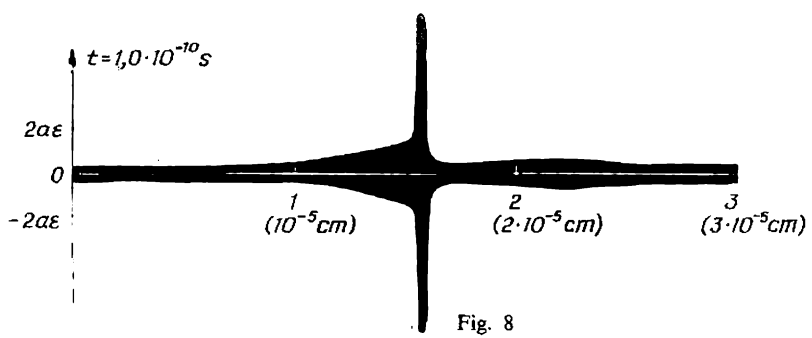


Fig. 8

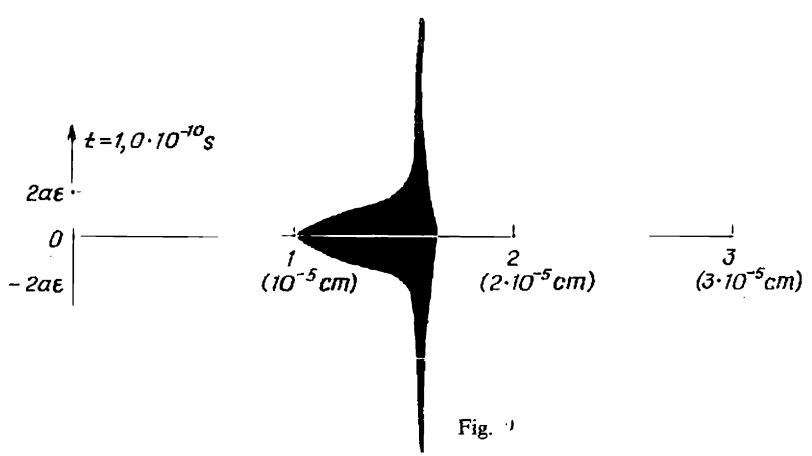


Fig. 9

8. Equation non linéaire du cristal. Jusqu'ici nous nous sommes bornés à une approximation harmonique du système d'équations de Newton pour les atomes du réseau. En fait, nous avons admis que les amplitudes des oscillations initiales étaient petites et avons négligé les termes non linéaires. Nous allons maintenant tenir compte de la contribution des termes quadratiques dans l'équation des oscillations du réseau cristallin, autrement dit nous allons ajouter à l'équation (8.1) le terme

$$c^2\alpha\left[(u_{n+1}-u_n)^2-(u_n-u_{n-1})^2\right],$$

où α est un paramètre.

En portant dans la nouvelle équation U_n+W_n, où U_n est solution de l'équation linéaire, on obtient l'équation suivante pour W_n (on admet que

$$|W_n-W_{n-1}|\ll|U_n-U_{n-1}|)$$

$$\ddot{W}_n-c^2\frac{W_{n+1}-2W_n+W_{n-1}}{h^2}=c^2\alpha[(U_{n+1}-U_n)^2-(U_n-U_{n-1})^2].$$

Considérons pour simplifier le cas où c et α sont des constantes.

Nous imposerons une condition subsidiaire essentielle sur la dépendance des conditions initiales $U_n(0)$ et $\dot{U}_n(0)$ par rapport au paramètre h.

Introduisons la définition suivante.

On dira qu'une famille de fonctions $v_n(h)$, $-N+1\leqslant n\leqslant N$ est associée à la répartition limite $g(x,p)$, $-\pi\leqslant p\leqslant\pi$, où g est une distribution paire de p, si pour toute fonction $a\in C^\infty]-\pi,\pi[$ on a

$$\lim_{h\to 0} h\sum_{n=-N+1}^{N} a(nh)v_n\frac{(v_{n+k}+v_{n-k})}{2}=\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}a(x)\,g(x,p)\cos kp\,dx\,dp, \qquad (8.63)$$

où $v_{i+2N}\overset{\text{déf}}{=}v_i$.

La signification physique de cette condition saute aux yeux pour $k=0$: elle exprime en effet que la valeur moyenne $a(nh)$ doit tendre vers la valeur moyenne $a(x)$ d'une certaine répartition.

Comme précédemment, au lieu de fonctions sur un réseau, nous envisagerons l'espace des fonctions M_N et formulerons le théorème final en termes de fonctions M_N. A noter que tous les raisonnements de ce numéro se généralisent à une vaste classe d'équations pseudo-différentielles non linéaires dans lesquelles les termes non linéaires peuvent être supposés petits. Dans ce cas, la première approximation est solution de l'équation (8.4), et la deuxième, de l'équation

$$L_h\omega=-8ic^2\alpha h^2\sin\frac{\omega}{2}\left(\left(\sin\frac{\omega}{2}u\right)^2\right), \qquad \omega=\hat{\omega}=-ih\frac{\partial}{\partial x}, \qquad (8.64)$$

où u est solution de l'équation linéaire $L_h u = 0$. Pour simplifier, on prendra à titre de solution u de l'équation linéaire le terme de la somme $\sum_{\pm}$ de la formule (8.37) correspondant au signe moins. Nous supposerons que sa valeur initiale $u_0 \in M_N$ satisfait la condition

$$\lim_{h \to 0} \int_{-\pi}^{\pi} u_0 a(x) (\cos k\hat{\omega}) u_0 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} a(x) g(x, \omega) \cos k\omega \, dx \, d\omega. \quad (8.65)$$

Signalons tout d'abord que la condition (8.65) entraîne une condition plus générale et plus naturelle pour le cas continu. Posons

$$(f, \varphi) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{r(x)} \, dx.$$

On a le lemme suivant.

Lemme 8.4. *Soit $f(x, \omega) \in C^\infty$ une fonction périodique paire en ω. Si $\psi_h(x)$ est associée à une répartition limite $g(x, \omega)$, alors*

$$\lim_{h \to 0} \left(\psi_h, f\left(\begin{matrix} 2 & 1 \\ x, & \omega \end{matrix}\right) \psi_h \right) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, \omega) g(x, \omega) \, dx \, d\omega.$$

Démonstration. Développons la fonction $f(x, \omega)$ en série de Fourier par rapport à ω. On a

$$f(x, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(x) e^{in\omega} \quad (8.66)$$

où

$$a_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, \omega) e^{-in\omega} \, d\omega. \quad (8.67)$$

Des conditions du lemme il s'ensuit que pour tout n est réalisée l'inégalité

$$\max_x |a_n(x)| \leqslant \frac{C_k}{n^k}, \quad (8.68)$$

où $k > 0$ est un entier quelconque, $C_k = \text{const}$. Cette majoration se déduit sans difficultés par une intégration par parties de (8.67).

Montrons que $\lim_{k \to \infty} \left\| \left(f_k\left(\begin{matrix} 2 & 1 \\ x, & \omega \end{matrix}\right) - f\left(\begin{matrix} 2 & 1 \\ x, & \omega \end{matrix}\right) \right) \psi_h(x) \right\| = 0$, où $f_k(x, \omega)$ désigne la somme partielle de la série (8.66):

$$f_k(x, \omega) = \sum_{|n| \leqslant k} a_n(x) e^{in\omega}.$$

Signalons que la fonction $f_k(x, \omega)$ tend uniformément vers $f(x, \omega)$ lorsque $k \to \infty$. Pour toute fonction différentiable $u(x)$ on a

$$\left[f\left(\begin{matrix}2 & 1\\ x, & \omega\end{matrix}\right) - f_k\left(\begin{matrix}2 & 1\\ x, & \omega\end{matrix}\right)\right] u(x) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\pi}^{\pi} u(y)\, e^{-iny}\, dy\right] e^{inx} [f(x, nh) - f_k(x, nh)] =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\pi}^{\pi} u(y) e^{-iny}\, dy\right] \sum_{|m|>k} a_m(x)\, e^{i(mnh+nx)}.$$

On obtient en définitive

$$\left[f\left(\begin{matrix}2 & 1\\ x, & \omega\end{matrix}\right) - f_k\left(\begin{matrix}2 & 1\\ x, & \omega\end{matrix}\right)\right] u(x) = \left(\sum_{|n|>k} a_n\left(\begin{matrix}2\\ x\end{matrix}\right) e^{in\omega}\right) u(x). \qquad (8.69)$$

Evaluons le n-ième terme de la somme (8.69). On a de toute évidence

$$\left\| a_n\left(\begin{matrix}2\\ x\end{matrix}\right) e^{in\omega}\, u(x)\right\| \leqslant \max_x |a_n(x)| \|u\|,$$

ou, en vertu de (8.68),

$$\left\| a_n\left(\begin{matrix}2\\ x\end{matrix}\right) e^{in\omega}\, u(x)\right\| \leqslant \frac{C_k}{n^k} \|u\|, \qquad (8.70)$$

où $k > 0$ est un entier quelconque. De (8.69) et (8.70) il s'ensuit

$$\left\|\left[f\left(\begin{matrix}2 & 1\\ x, & \omega\end{matrix}\right) - f_k\left(\begin{matrix}2 & 1\\ x, & \omega\end{matrix}\right)\right] u(x)\right\| \leqslant \sum_{|n|>k} \frac{1}{n^l} C_l \|u\|, \quad \forall l,$$

$$\lim_{k\to\infty} \left\|\left[f\left(\begin{matrix}2 & 1\\ x, & \omega\end{matrix}\right) - f_k\left(\begin{matrix}2 & 1\\ x, & \omega\end{matrix}\right)\right] u(x)\right\| = 0 \quad \text{pour } k \to \infty.$$

On déduit de là que pour tout $\delta > 0$, il existe un k_0 tel que

$$\left|\left(\psi_h, \left(f\left(\begin{matrix}2 & 1\\ x, & \omega\end{matrix}\right) - f_k\left(\begin{matrix}2 & 1\\ x, & \omega\end{matrix}\right)\right) \psi_h\right)\right| < \delta \quad \text{pour } k \geqslant k_0,$$

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x, \omega) - f_k(x, \omega)]\, g(x, \omega)\, dx\, d\omega\right| < \delta \quad \text{pour } k \geqslant k_0,$$

et enfin, en vertu de la condition (8.63),

$$\left|\left(\psi_h, f_k\left(\begin{matrix}2 & 1\\ x, & \omega\end{matrix}\right) \psi_h\right) - \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_k(x, \omega)\, g(x, \omega)\, dx\, d\omega\right| \leqslant c(k)\, \delta_h,$$

où $c(k)=\text{const}$ et $\delta_h \to 0$ avec h. En fixant $k > k_0$ et en faisant tendre h vers 0, on constate que le premier membre de la dernière inégalité est $\leqslant \delta$ pour h assez petit. Ceci et les inégalités précédentes entraînent le lemme.

Définition. Si pour toute fonction à support borné $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ on a

$$\lim_{h\to 0} \int \varphi(x) F_h(x)\, dx = \int \varphi(x)\, r(x)\, dx, \qquad x \in \mathbf{R}^n,$$

où $F_h(x) \in C^\infty$ est une famille à un paramètre de fonctions et h assez petit, on dira alors que $F_h(x)$ *converge vers* $r(x)$ *au sens des distributions* et on écrira $F_h(x) \to r(x)$.

Trouvons la limite généralisée du second membre de l'équation (8.64). Posons $F_h = -4\left(\sin\dfrac{\tilde{\omega}}{2}u\right)^2$. On a le lemme suivant.

Lemme 8.5.

$$F_h \to 4 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2\frac{\omega}{2}\, g\left(x - ct\cos\frac{\omega}{2},\ \omega\right) d\omega.$$

Démonstration. Désignons par $F_{x\to p}$ et $F_{p\to x}$ les transformées de Fourier

$$(F_{x\to p} f)(p) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ipx} dx;\ (F_{p\to x} f_p)(x) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} f_p e^{ipx}.$$

Il est évident que

$$f(\hat{\omega})\psi = F_{p\to x} f(ph) F_{x\to p}\psi.$$

Grâce à cette formule on obtient l'égalité suivante

$$\int_{-\pi}^{\pi} \psi_2 f(\hat{\omega})\psi_1 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \psi_1 \bar{f}(\hat{\omega})\psi_2 dx,$$

où $\psi_1, \psi_2 \in C^\infty$ sont des fonctions périodiques. En appliquant cette relation on trouve pour $\varphi \in C^\infty$, $u = Tu_0$ (par définition, $T: u_0 \to u$)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) F_h(x, t)\, dx = -4 \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\left(T\sin\frac{\hat{\omega}}{2}u_0\right)^2 dx =$$

$$= 4\int_{-\pi}^{\pi} \sin\frac{\hat{\omega}}{2}[\bar{T}\varphi(x)T]\sin\frac{\hat{\omega}}{2}u_0 u_0 dx. \qquad (8.71)$$

Appliquons le théorème 1.1 du chapitre V à l'expression entre crochets. Pour $c=\text{const}$ dans (8.37) on a $\varphi_0^- = 1$, $\varphi_k^- = 0$, $k \geqslant 1$ et

$$S = -2ct \sin\frac{\omega}{2}.$$

On a

$$\frac{\delta S}{\delta \omega} = -2ct \frac{\sin\frac{\omega'}{2} - \sin\frac{\omega}{2}}{\omega' - \omega},$$

$$\tilde{x} = x - \frac{\delta S}{\delta \omega} = x + 2ct \frac{\sin\frac{\omega'}{2} - \sin\frac{\omega}{2}}{\omega' - \omega}.$$

D'où

$$J \overset{\text{déf}}{=} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} = 1.$$

Le théorème 1.1 du chapitre V nous donne

$$\overline{T}\varphi(x)\, T = \varphi\left(\overset{2}{x} + 2ct \frac{\sin\frac{\overset{1}{\omega}}{2} - \sin\frac{\overset{3}{\omega}}{2}}{\overset{1}{\omega} - \overset{3}{\omega}}\right).$$

On en déduit en vertu de la formule de commutation que l'expression (8.71) diffère de l'intégrale

$$4 \int_{-\pi}^{\pi} \left(\varphi\left(\overset{2}{x} + ct \cos\frac{\overset{1}{\omega}}{2}\right) \sin^2 \frac{\overset{1}{\omega}}{2} \overset{1}{u_0}\right) u_0 dx$$

d'une quantité de l'ordre de h.

D'après le lemme 8.4 la dernière intégrale tend vers

$$+4 \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi\left(x + ct \cos\frac{\omega}{2}\right) \sin^2 \frac{\omega}{2} g(x, \omega)\, dx\, d\omega$$

lorsque $h \to 0$. D'où le lemme.

Prouvons le théorème suivant :

Théorème 8.3. *Si* $\alpha = \dfrac{1}{h}$ *dans l'équation* (8.64), *la solution* w *du problème*

(8.64) *vérifiant les conditions initiales nulles converge au sens des distributions vers la fonction*

$$w_1(x, t) = -2c \int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{\omega}{2} \left[g\left(x - c\tau \cos \frac{\omega}{2} + c(t-\tau), \omega\right) - \right.$$

$$\left. - g\left(x - c\tau \cos \frac{\omega}{2} - c(t-\tau), \omega\right) \right] d\omega \, d\tau. \qquad (8.72)$$

Démonstration. Adoptons les notations suivantes:

$$r(x, t) = -4 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{\omega}{2} g\left(x - ct \cos \frac{\omega}{2}, \omega\right) d\omega.$$

(On s'assure sans peine que $Lw_1(x, t) = c^2 r'_x(x, t)$, où $L = \square_c$ est l'opérateur des ondes.)

$$f_h = F_h - r(x, t); \qquad v_h = L_h^{-1}\left(\frac{2 \sin \frac{\omega}{2}}{h} f_h\right);$$

$$L_h^* \stackrel{\text{déf}}{=} h^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 4c^2 \sin^2 \frac{\omega}{2} c^2(x); \qquad L^* \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} c_2 \binom{1}{x}.$$

Par $(L_h^*)^{-1} f$ et $(L^*)^{-1} f$ on désigne les solutions des problèmes $L_h^* u = f(x, t)$ et $L^* u = f(x, t)$ vérifiant les conditions initiales

$$u\Big|_{t=T} = \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=T} = 0.$$

Pour prouver ce théorème on se servira des faits suivants:

1. Les opérateurs L_h^* et L^* sont justiciables d'un lemme analogue au lemme 8.2. Plus exactement, si $\psi(x, t) \in C^\infty$ ne dépend pas de h, alors

$$h^2 (L_h^*)^{-1} \psi(x, t) - (L^*)^{-1} \psi(x, t) = O(h).$$

On peut s'en assurer comme pour le lemme 8.2.

2. On a l'identité suivante:

$$h^2 \int_0^T \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x, t) L_h^{-1} \frac{2i \sin \frac{\omega}{2}}{h} f_h \, dx \, dt =$$

$$= h^2 \int_0^T \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{2i \sin \frac{\omega}{2}}{h} (L_h^{-1})^* \psi(x, t) \right] f_h \, dx \, dt, \qquad (8.73)$$

que l'on démontre en utilisant l'identité $\psi = L_h^* (L_h^*)^{-1} \psi$ et en intégrant par parties.

3. $\|F_h\| \leqslant c_1 h^{-1/2}$, où c_1 est une constante indépendante de h. De 1) à 3) il résulte que le second membre de (8.73) diffère d'une quantité de l'ordre de $h^{1/2}$ de

$$\int_0^T \int \frac{\partial}{\partial x} (L^{*-1} \psi(x, t)) f_h(x, t) \, dx \, dt,$$

expression qui tend vers 0 avec h en vertu du lemme 8.5.

Le lemme 8.2. entraîne

$$\lim_{h \to 0} L_h^{-1} \left(\frac{2i \sin \frac{\omega}{2}}{h} \right) r(x, t) = \frac{w_1}{c^2}.$$

Ce que nous voulions.

A noter que dans le théorème 8.3 on peut remplacer la convergence au sens des distributions par la convergence uniforme, à condition de procéder à d'autres majorations. Un théorème plus général est prouvé dans l'annexe 1.

Remarque. Pour prouver le théorème on s'est servi de la dérivabilité de la fonction $w_1(x, t)$ et pas de la fonction $g(x, \omega)$. Cette fonction peut être en général une distribution, auquel cas le théorème sera valable pour les t tels que $w_1(x, t)$ soit différentiable.

Signalons que l'on obtient les résultats les plus intéressants lorsque $g(x, \omega)$ est voisine de la fonction δ de Dirac. (La forme de u_0 n'est pas essentielle.)

Considérons l'expérience numérique pour le cas ou

$$g(x, \omega) = \varepsilon^2 / 4\varphi^2(x) [\delta(\omega + 2x) + \delta(\omega - 2x)],$$

$\varphi(x)$ étant définie dans le numéro précédent.

Pour réaliser cette expérience nous allons envisager le potentiel d'interaction de deux atomes d'un réseau. Ceci nous conduit au système

$$\ddot{u}_n = \frac{c^2}{h^3} \left\{ f\left(\frac{h^{-1} + u_n - u_{n-1}}{h^{-1}} \right) - f\left(\frac{h^{-1} + u_{n+1} - u_n}{h^{-1}} \right) \right\}, \qquad (8.74)$$

$$f(z) = -\frac{1}{8} \left\{ \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^{10}} \right\}, \quad h = 10^{-3}, \quad t \in [0, 1] = [0, 10^{-10}\,\mathrm{s}],$$

$$c^2 = 1, \quad n = 0, \pm 1, \ldots, \pm 3000; \quad u_h|_{t=0} = \varepsilon\varphi(hn) \cos\{hn^2\},$$

$$\hat{u}_n|_{t=0} = c\varepsilon h^{-1}\varphi\left(h\left(n-\frac{1}{2}\right)\right)\cdot\cos\left\{h\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\right\}-$$

$$-c\varepsilon h^{-1}\varphi\left(h\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)\cos\left\{h\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right\}.$$

Considérons les mêmes conditions initiales qu'au début du n° 7. La solution de l'équation non linéaire (8.74) obtenue sur ordinateur pour $\varepsilon = 10^{-1}$ est confondue avec celle de l'équation linéaire dont le graphique est représenté sur la figure 6. Pour $\varepsilon = 2$ et $a = 1$, les figures 10 et 11 représentent respectivement la déformation des points d'équilibre pour la solution numérique de l'équation (8.74) et la déformation acquise par la

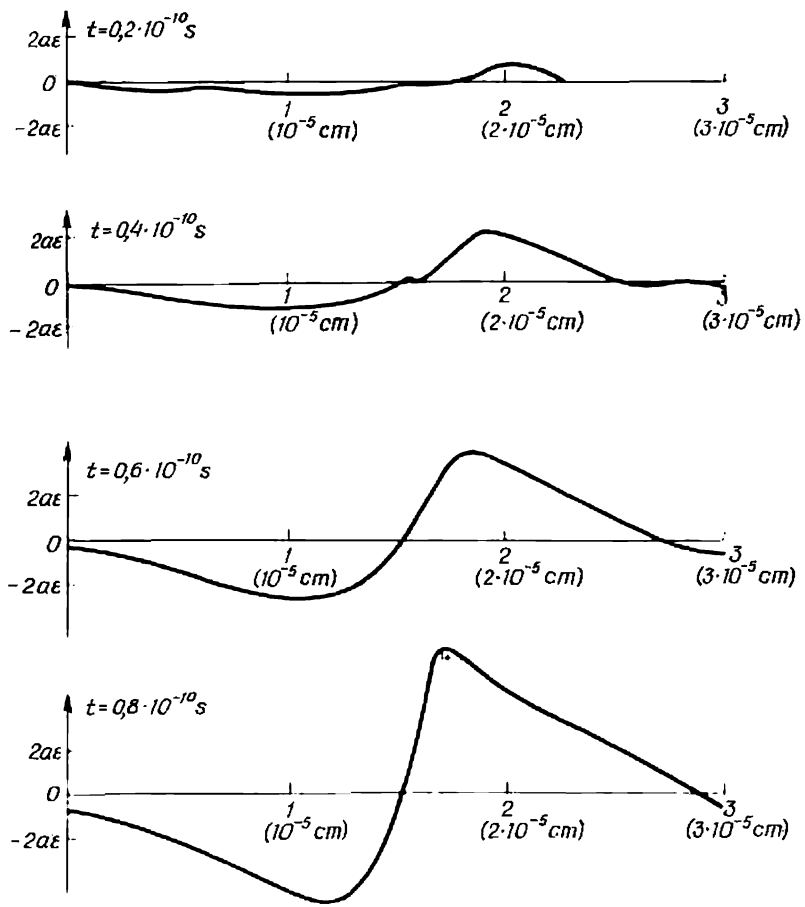


Fig. 10

formule (8.72). Les dates sont les mêmes que dans le cas linéaire. La figure 12 représente le graphique de la solution exacte de l'équation (8.74) à l'instant où se forme le point focal. L'amplitude des oscillations des atomes du réseau, c'est-à-dire l'écart entre max u et min u, a été noircie.

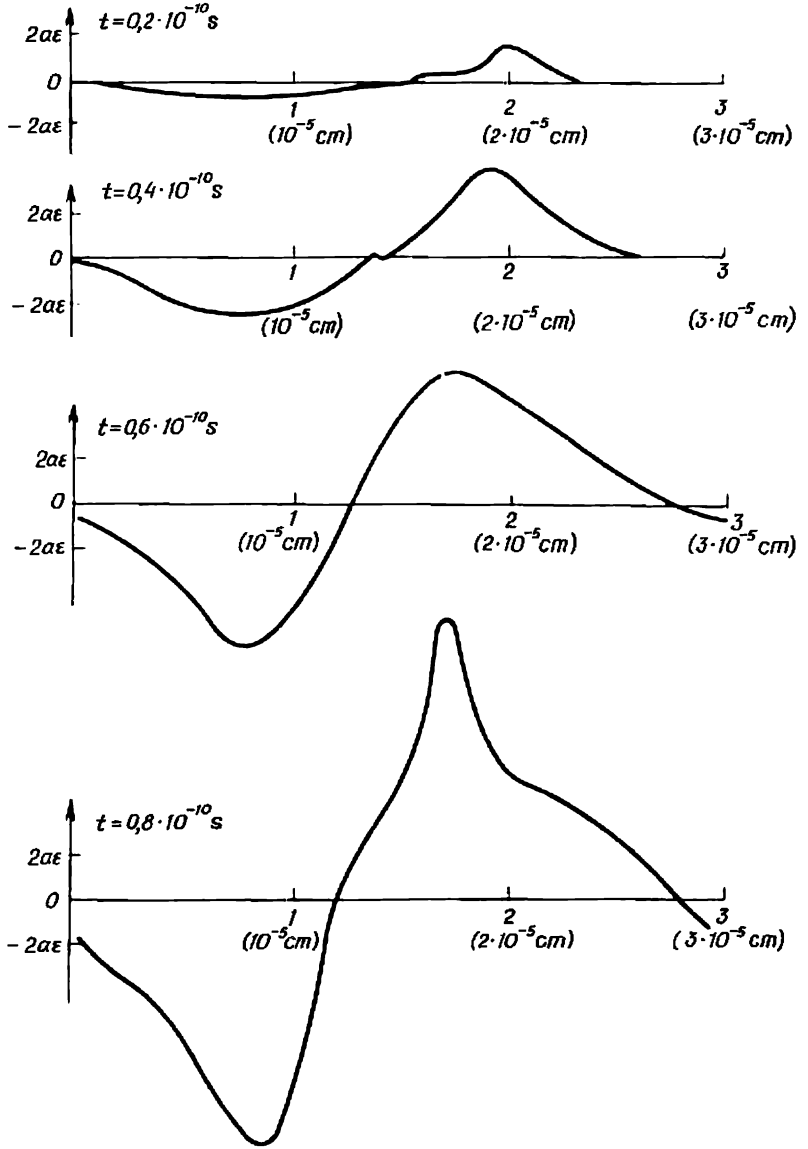


Fig. 11

Le nouvel effet fournit la clef de nombreux phénomènes physiques. Il s'apparente à l'effet classique de dilatation du cristal sous l'action de la chaleur. La formule obtenue est valable pour des équations assez générales contenant un petit terme quadratique. Certains problèmes de physique

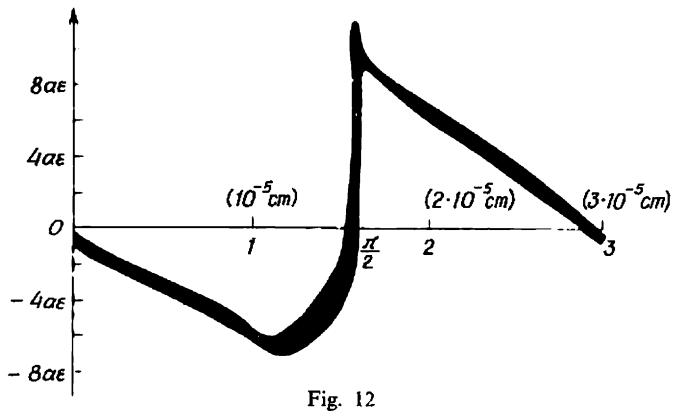


Fig. 12

donnent lieu à un phénomène semblable appelé redressement, des conditions initiales à oscillations rapides. On peut donc dire que le redressement combiné à la focalisation engendre une onde progressive de très grande énergie qui oblige le cristal, d'une part, à se dilater fortement et, de l'autre, à se contracter fortement.

§ 9. Quasi-inversibilité d'un opérateur et énoncé du théorème fondamental

1. Problème fondamental. Les applications μ constituent un puissant outil d'étude des algèbres d'opérateurs non commutables. C'est que la possibilité de définir une application μ pour l'algèbre envisagée permet de formuler une méthode unique de résolution de nombreux problèmes tant en théorie des équations aux dérivées partielles qu'en stabilité des schémas aux différences.

La principale méthode d'intégration des équations aux dérivées partielles consiste à ramener l'équation primitive à une équation intégrale de Volterra ou de Fredholm à noyau différentiable. La notion de quasi-inversibilité formulée plus bas généralise cette approche aux opérateurs.

Soit $\mathscr{L}$ un module sur une algèbre $\mathscr{A}$, muni d'une application μ.

Définition. On dit qu'un élément $f \in \mathscr{A}$ est *quasi inversible* s'il existe des suites $\{x_k\}$, $\{x'_k\} \subset \mathscr{L}$ telles que

$$\begin{aligned} fx_k &= 1 + R_k\left(\overset{1}{A_1}, \ldots, \overset{n}{A_n}, \overset{n+1}{B}\right), \\ x'_k f &= 1 + R'_k\left(\overset{n+1}{A_1}, \ldots, \overset{2}{A_n}, \overset{1}{B}\right), \end{aligned} \tag{9.1}$$

où les fonctions R_k et R'_k vérifient les conditions

$$|R_k| = O_{\mathscr{D}}(|x|^{-k}),\ |R'_k| = O_{\mathscr{D}}(|x|^{-k}).$$

La suite $\{x_k\}$ sera dite *quasi inverse à droite*, la suite $\{x'_k\}$, *quasi inverse à gauche*.

Notre objectif fondamental est de trouver maintenant les conditions de quasi-inversibilité de l'opérateur $f\left(\overset{1}{A_1}, \ldots, \overset{n}{A_n}, \overset{n+1}{B}\right)$, c'est-à-dire les conditions que doivent remplir les opérateurs $A_1, \ldots, A_n, B$ et le symbole $f(x, \alpha)$ pour que l'opérateur $f\left(\overset{1}{A_1}, \ldots, \overset{n}{A_n}, \overset{n+1}{B}\right)$ soit quasi inversible.

Avant d'énoncer ces conditions, il est logique de poser le problème de quasi-inversibilité des éléments dans le cas trivial d'une algèbre commutative. Considérons par exemple les opérateurs $A_i = x_i$, $i = 1, \ldots, n$, et $B = \alpha$ lorsque les symboles sont confondus avec les opérateurs qui leur correspondent. Supposons maintenant que l'opérateur $f = f(x_1, \ldots, x_n, \alpha)$ présente des zéros pour $\alpha = \alpha^0$ et $|x| \to \infty$ (par exemple, $f = x_1^2 - x_2^2 + ix_2^2 \sin^2 \alpha$); dans ce cas il n'est pas quasi inversible (il est impossible de trouver une fonction dérivable $\mathscr{R}(x_1, x_2, \alpha)$ telle que $(x_1^2 - x_2^2 + ix_2^2 \sin^2 \alpha)\mathscr{R}(x_1, x_2, \alpha) = 1 + R(x_1, x_2, \alpha)$, où $R(x_1, x_2, \alpha) \to 0$ pour $x_1^2 + x_2^2 \to \infty$, puisque le premier membre de l'égalité s'annule pour $x_1 = x_2$, $\alpha = 0$). C'est pourquoi il semble de prime abord naturel d'exiger que le symbole $f(x, \alpha)$ ne présente pas de zéros pour $|x| \to \infty$. Mais cette condition est trop astreignante et elle nous priverait des principales applications. Les difficultés soulevées par la construction de suites quasi inverses sont dues au fait que le symbole de l'opérateur $f\left(\overset{1}{A_1}, \ldots, \overset{n}{A_n}, \overset{n+1}{B}\right)$ s'annule généralement lorsque $|x| \to \infty$. De ce point de vue le cas des opérateurs permutables est un cas singulier. Pour saisir l'aspect inattendu de cette situation, penchons-nous sur un exemple.

Considérons les symboles $f_1(y_1, y_2) = y_1^2 - y_2^2$; $f_2(y_1, y_2, \alpha) = y_1^2 - y_2^2 - i\varphi(\alpha^2) y_2^2$, où la fonction $\varphi(\alpha^2)$ est nulle pour $\alpha^2 < T$ et > 0 pour $2T + \delta \geqslant \alpha^2 \geqslant 2T$. Les deux symboles sont confondus pour $\alpha^2 < T$ et s'annulent à l'infini pour $y_1 = y_2$. Supposons que les opérateurs A_1 et A_2 commutent. On a déjà signalé que l'opérateur $A_1^2 - A_2^2$ qui est associé au symbole $f_1(y_1, y_2)$ n'est pas quasi inversible. Par ailleurs, l'opérateur $A_1^2 - A_2^2 - i\varphi\left(\overset{3}{B^2}\right)\overset{2}{A_2^2}$ est quasi inversible (ceci résultera du théorème fondamental). Si, par exemple, $A_1 = i\dfrac{\partial}{\partial t}$, $A_2 = i\dfrac{\partial}{\partial x}$, $B = t$, alors l'opérateur associé au symbole $f_1(y_1, y_2)$ est l'opérateur des ondes $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$. Au symbole $f_2(y_1, y_2, \alpha)$ est associé l'opérateur $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - i\varphi(t^2)\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$. L'adjonction du

terme $-i\varphi(t^2)\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ à l'opérateur des ondes, d'une part, rend ce dernier quasi inversible et de l'autre, traduit le phénomène d'absorption des ondes de hautes fréquences pour $t^2>2T$.

Etudions un exemple illustrant le lien entre la quasi-inversibilité d'un opérateur et la réduction de l'équation différentielle définie par cet opérateur à une équation intégrale. Soit

$$A_1=i\frac{\partial}{\partial x},\quad A_2=i\frac{\partial}{\partial y},\quad A_3=x,\quad A_4=y,$$

et soit $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ un polynôme en x_1 et x_2, $(x_3, x_4)\in M^2$, c'est-à-dire

$$f\left(i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}},\ i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial y}},\ \overset{2}{x},\ \overset{2}{y}\right)$$

est un opérateur différentiel. Pour rendre cet opérateur quasi inversible, il faut ramener la résolution de l'équation différentielle

$$f\left(i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}},\ i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial y}},\ \overset{2}{x},\ \overset{2}{y}\right)u(x, y)=F(x, y)$$

à celle de l'équation intégrale

$$\left[f\left(i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}},\ i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial y}},\ \overset{2}{x},\ \overset{2}{y}\right)\right]\ g_k\left(i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}},\ i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial y}},\ \overset{2}{x},\ \overset{2}{y}\right)\varphi_k(x, y)=$$

$$=\left[1+R_k\left(i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}},\ i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial y}},\ \overset{2}{x},\ \overset{2}{y}\right)\right]\varphi_k(x, y)=F(x, y),$$

où $R_k(x_1, x_2, x_3, x_4)$ tend vers 0 plus vite que $(x_1^2+x_2^2)^{-k/2}$. Il est évident (ce qui résulte immédiatement de la définition de l'opérateur pseudo-différentiel) que la dernière égalité est une équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce à noyau différentiable décroissant rapidement. La solution $u(x, y)$ du problème primitif peut être mise sous la forme

$$u(x, y)=g_k\left(i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}},\ i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial y}},\ \overset{2}{x},\ \overset{2}{y}\right)\varphi_k(x, y),$$

où $\varphi_k(x, y)$ est solution de l'équation intégrale

$$\varphi_k+R_k\varphi_k=F.$$

A noter que le premier terme de l'itération est égal à F, le second, à R_kF. Donc, ce dernier est différentiable en vertu des propriétés de l'opérateur R_k. On en déduit que le terme g_kF contient la partie non différentiable

de la solution du problème primitif, autrement dit la différence $g_k\varphi_k - g_kF$ est différentiable. Concluons ce numéro par une remarque concernant la définition de la quasi-inversibilité.

Supposons que le spectre commun (compte tenu de l'axiome μ_4' des opérateurs $\overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{n}{A}_n, \overset{n+1}{B}$ appartient à un domaine $D \subset R^n \times M^m$ et que la fonction $P(x, \alpha) \in S^\infty$ est égale à 1 pour $(x, \alpha) \in D$ et à 0 à l'extérieur d'un grand domaine. Alors $P\left(\overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{n}{A}_n, \overset{n+1}{B}\right) = 1$ par définition du spectre commun et donc on peut dans ce cas remplacer l'unité par $P\left(\overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{n}{A}_n, \overset{n+1}{B}\right)$ dans les formules (9.1), puisque

$$\operatorname{supp}(1 - P(x, \alpha)) \cap \sigma\left(\overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{n}{A}_n, \overset{n+1}{B}\right) = \varnothing.$$

2. Règle de réduction du problème fondamental. Soit $A_1, \ldots, A_n \in X$, $B \in M_m$ un opérateur vectoriel. Supposons que le produit des opérateurs A_j et $f\left(\overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{n}{A}_n, \overset{n+1}{B}\right)$, $f \in C_{\mathscr{L}}^\infty$, peut être encore représenté sous la forme d'une fonction des opérateurs ordonnés $\overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{n}{A}_n, \overset{n+1}{B}$:

$$A_j \left[\!\left[f\left(\overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{n}{A}_n, \overset{n+1}{B}\right) \right]\!\right] = f_j\left(\overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{n}{A}_n, \overset{n+1}{B}\right). \tag{9.2}$$

Alors pour chaque $j \in [0, n]$ est défini, comme nous le verrons plus bas, un opérateur linéaire $L_j : f \to f_j$, $A_0 = B$, que l'on appellera *représentation de l'opérateur* A_j. Ceci étant, la multiplication par $[\![f]\!] = f\left(\overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{n}{A}_n, \overset{n+1}{B}\right)$, $f \in S^\infty$, des opérateurs de la forme $[\![g]\!] = g\left(\overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{n}{A}_n, \overset{n+1}{B}\right)$, où $g \in C_{\mathscr{L}}^\infty$, induit dans $C_{\mathscr{L}}^\infty$ un opérateur linéaire $f\left(\overset{1}{L}_1, \ldots, \overset{n}{L}_n, \overset{n+1}{\alpha}\right)$ défini par la formule

$$[\![f]\!]\,[\![g]\!] = \left(f\left(\overset{1}{L}_1, \ldots, \overset{n}{L}_n, \overset{n+1}{\alpha}\right) g\right)\left(\overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{n}{A}_n, \overset{n+1}{B}\right). \tag{9.3}$$

La quasi-inversibilité de l'opérateur $f\left(\overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{n}{A}_n, \overset{n+1}{B}\right)$ se ramène maintenant au problème suivant : trouver une suite de fonctions $g_N(x, \alpha)$ telle que

$$f\left(\overset{1}{L}_1, \ldots, \overset{n}{L}_n, \overset{n+1}{\alpha}\right) g_N(x, \alpha) = 1 + R_N(x, \alpha), \tag{9.4}$$

où $R_N = O_{\mathscr{L}}(|x|^{-N})$.

Les fonctions $g_N(x, \alpha)$ sont les symboles des opérateurs d'une suite quasi inverse à droite. Le problème de la détermination de la suite quasi-inverse à gauche se réduit de façon analogue. Si les commutateurs des opérateurs $A_1, \ldots, A_n, B$ s'expriment simplement en fonction de ces opérateurs, le problème (9.4) est généralement bien plus simple que le problème primitif de quasi-inversibilité.

Définition. On dira qu'une algèbre $\mathcal{N}$ de générateurs $A_0, A_1, \ldots, A_n$, où $A_0 = B$, est une *algèbre de Lie nilpotente* s'il existe un entier $r > 0$ tel que

$$\overset{2}{A}_j \left(\overset{1}{A}_k - \overset{3}{A}_k \right) r = 0; \qquad k, j = 0, 1, \ldots, n. \tag{9.5}$$

Remarque. Il serait plus correct d'appeler l'algèbre $\mathcal{N}$ *algèbre enveloppante* pour l'algèbre de Lie nilpotente de générateurs $A_0, A_1, \ldots, A_n$. La nilpotence signifie que tous les commutateurs d'ordre élevé sont nuls.

Dans la suite nous supposerons remplies les conditions suivantes : pour tous $k, l \in [1, n]$ et tout $r \in [1, m]$

1) il existe pour les entiers $N > 0$ tels que $\overset{2}{A}_l \left(\overset{1}{A}_k - \overset{3}{A}_k \right) \neq \text{const} \cdot 1$, où 1 est l'opérateur unité, un indice $N(k, l) \in [1, n]$ tel que

$$\overset{2}{A}_l \left(\overset{1}{A}_k - \overset{3}{A}_k \right)^N = -iA_{N(k,l)}, \qquad i = \sqrt{-1};$$

2) il existe des indices $j(k, l)$ et $s(k, r)$ tels que

$$[A_k, B_r] = -iA_{s(k,r)}, \quad [A_k, A_l] = -iA_{j(k,l)}.$$

Les conditions 1) et 2) permettent de trouver des opérateurs L_k dans $C^\infty_{\mathcal{L}}(R^n \times M^m)$. Considérons de ce fait un exemple simple. Supposons que $n = 3$, $m = 1$, et $A_2 = i[A_1, B]$, $A_3 = i[A_1, A_2]$, $[A_2, B] = 0$, $[A_3, B] = 0$, $[A_1, A_3] = [A_2, A_3] = 0$.

De ces relations de commutation il ressort que A_3 commute à tous les opérateurs de cette collection et A_2 à B, donc leurs représentations se construisent de façon triviale :

$$L_2 = x_2, \qquad L_3 = x_3.$$

Trouvons l'opérateur L_1. Développons l'opérateur $\overset{2}{A}_1 \left[\!\left[\varphi \left(\overset{1}{A}_1, \overset{2}{A}_2, \overset{3}{A}_3, \overset{4}{B} \right) \right]\!\right]^{1} =$

$= \overset{5}{A}_1 \varphi \left(\overset{1}{A}_1, \overset{2}{A}_2, \overset{3}{A}_3, \overset{4}{B} \right)$ en une série de Newton suivant $\overset{4}{B} - \overset{6}{B}$ en tenant compte du fait que par hypothèse $\overset{5}{A}_1 \left(\overset{4}{B} - \overset{6}{B} \right)^k = 0$ pour $k \geqslant 2$ et $\overset{5}{A}_1 \left(\overset{4}{B} - \overset{6}{B} \right) = -iA_2$

$$\overset{5}{A}_1 \varphi \left(\overset{1}{A}_1, \overset{2}{A}_2, \overset{3}{A}_3, \overset{4}{B} \right) = \overset{5}{A}_1 \varphi \left(\overset{1}{A}_1, \overset{2}{A}_2, \overset{3}{A}_3, \overset{6}{B} \right) +$$

$$+ \overset{5}{A}_1 \left(\overset{4}{B} - \overset{6}{B} \right) \frac{\partial}{\partial \alpha} \varphi \left(\overset{1}{A}_1, \overset{2}{A}_2, \overset{3}{A}_3, \overset{6}{B} \right) = \overset{5}{A}_1 \varphi \left(\overset{1}{A}_1, \overset{2}{A}_2, \overset{3}{A}_3, \overset{6}{B} \right) +$$

$$+ \left(-i\overset{2}{A}_2 \right) \frac{\partial}{\partial \alpha} \varphi \left(\overset{1}{A}_1, \overset{2}{A}_2, \overset{3}{A}_3, \overset{6}{B} \right)$$

Du fait que $\overset{3}{A}_1\left(\overset{2}{A}_2-\overset{4}{A}_2\right)^k=0$ pour $k\geqslant 2$ et $[A_1, A_2]=-iA_3$ on déduit de façon analogue que

$$A_1\varphi(A_1, A_2, A_3, B)=$$
$$=\overset{3}{A}_1\varphi\left(\overset{1}{A}_1, \overset{4}{A}_2, \overset{5}{A}_3, \overset{6}{B}\right)+\left(-\overset{5}{iA_3}\right)\frac{\partial}{\partial x_2}\varphi\left(\overset{1}{A}_1, \overset{4}{A}_2, \overset{5}{A}_3, \overset{6}{B}\right),$$

et par suite

$$\overset{5}{A}_1\varphi\left(\overset{1}{A}_1, \overset{2}{A}_2, \overset{3}{A}_3, \overset{6}{B}\right)=\overset{3}{A}_1\varphi\left(\overset{1}{A}_1, \overset{4}{A}_2, \overset{5}{A}_3, \overset{6}{B}\right)+$$
$$+\left(-\overset{5}{iA_3}\right)\frac{\partial}{\partial x_2}\varphi\left(\overset{1}{A}_1, \overset{4}{A}_2, \overset{5}{A}_3, \overset{6}{B}\right)-\overset{2}{iA_2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\varphi\left(\overset{1}{A}_1, \overset{2}{A}_2, \overset{3}{A}_3, \overset{6}{B}\right).$$

On voit donc que l'opérateur

$$L_1\varphi=x_1\varphi-ix_2\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}-ix_3\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}=\varphi_1$$

et par conséquent

$$A_1\left[\!\left[\varphi\left(\overset{1}{A}_1, \overset{2}{A}_2, \overset{3}{A}_3, \overset{4}{B}\right)\right]\!\right]=(L_1\varphi)\left(\overset{1}{A}_1, \overset{2}{A}_2, \overset{3}{A}_3, \overset{4}{B}\right).$$

De façon analogue, pour une collection $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$ d'opérateurs engendrant une algèbre de Lie nilpotente, il existe une représentation L_k de A_k vérifiant la condition (9.3). En effet, dans l'opérateur $\overset{n+2}{A}_k\varphi\left(\overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{n}{A}_n, \overset{n+1}{B}\right)$ nous tâchons de mettre A_k à la k-ième place; pour cela nous utilisons le développement taylorien de φ pour transporter A_k en le faisant commuter d'abord à B (ceci fera apparaître la série de commutateurs $[A_k, B]$, $[[A_k, B], B]$, etc.) et ensuite à A_n, A_{n-1}, etc. Cette opération fait apparaître un grand nombre de commutateurs de A_k à B, A_n, A_{n-1}, ..., A_{k-1}. Ces commutateurs sont par hypothèse des opérateurs de la collection envisagée, donc en utilisant encore le développement taylorien, nous les «transporterons» à leurs places respectives en les ordonnant. Nous obtenons ainsi des commutateurs qui sont tous des opérateurs déduits de $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$. Ces opérateurs seront «transportés» à leurs places. Il est évident que cette procédure nous conduit à des commutateurs d'ordre supérieur qui commuteront à tous les $A_1, \ldots, A_n, B$ (puisque $A_1, \ldots, A_n, B$ sont générateurs d'une algèbre nilpotente). Ces commutateurs occuperont automatiquement leurs places. Il reste simplement à remarquer que chaque usage du développement taylorien de φ met en jeu une somme de plusieurs dérivées de φ dont l'ordre est $\leqslant n_0$, n_0 étant la longueur du plus long commutateur de $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$. Donc

$$A_k\left[\!\left[\varphi\left(\overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{n}{A}_n, \overset{n+1}{B}\right)\right]\!\right]=\varphi_k\left(\overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{n}{A}_n, \overset{n+1}{B}\right),$$

où $\varphi_k(x, \alpha)$ est l'image du symbole $\varphi(x, \alpha)$ par un opérateur différentiel $L_k\left(x, i\frac{\partial}{\partial x}, i\frac{\partial}{\partial \alpha}\right)$ d'ordre $\leqslant n_0$.

Soit L_k une représentation de A_k, $k=1, 2, \ldots, n$. On voit alors que

$$A_k A_m \left[\!\left[\varphi\left(\overset{1}{A}_1, \ldots \overset{n}{A}_n, \overset{n+1}{B}\right)\right]\!\right] = (L_k(L_m\varphi))\left(\overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{n}{A}_n, \overset{n+1}{B}\right);$$

$$(A_k + A_m)\left[\!\left[\varphi\left(\overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{n}{A}_n, \overset{n+1}{B}\right)\right]\!\right] = (L_k\varphi + L_m\varphi)\left(\overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{n}{A}_n, \overset{n+1}{B}\right).$$

Les opérateurs L_k satisfont ainsi des relations de commutation identiques à celles qui lient les opérateurs $A_1, \ldots, A_n, B$. Donc, les opérateurs L_k, α sont générateurs d'une algèbre de Lie nilpotente que l'on désignera par Π.

On définit de façon analogue les opérateurs $G_1, \ldots, G_n, G_{n+1}$ de $C^\infty_{\mathscr{L}}(\mathbf{R}^n \times M^m)$ dans $C^\infty_{\mathscr{L}}(\mathbf{R}^n \times M^m)$:

$$(G_k\varphi)\left(\overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{n}{A}_n, \overset{n+1}{B}\right) = \left[\!\left[\varphi\left(\overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{n}{A}_n, \overset{n+1}{B}\right)\right]\!\right] A_k$$

pour $k=1, \ldots, n$

$$(G_{n+1}\varphi)\left(\overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{n}{A}_n, \overset{n+1}{B}\right) = \left[\!\left[\varphi\left(\overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{n}{A}_n, \overset{n+1}{B}\right)\right]\!\right] B.$$

Donc, G est aussi une représentation de l'opérateur A_k. Les opérateurs L_k seront appelés *représentation gauche*, les opérateurs G_k, *représentation droite* de l'opérateur A_k. De même que L_k, les opérateurs G_k sont générateurs d'une algèbre de Lie nilpotente que l'on désignera par Π'. Tout élément de l'algèbre $\mathscr{N}$ se représente sous la forme

$$T = \sum c_{j,\alpha} A_{j_1}^{\alpha_{j_1}} \cdot \ldots \cdot A_{j_k}^{\alpha_{j_k}}$$

puisque $A_1, \ldots, A_n, B$ sont les générateurs de $\mathscr{N}$. Définissons des applications $\lambda : \mathscr{N} \to \Pi$ et $\lambda' : \mathscr{N} \to \Pi'$ par les formules

$$\lambda(T) = \sum c_{j,\alpha} L_{j_1}^{\alpha_{j_1}} \cdot \ldots \cdot L_{j_k}^{\alpha_{j_k}}, \tag{9.6}$$

$$\lambda'(T) = \sum c_{j,a} G_{j_1}^{\alpha_{j_1}} \cdot \ldots \cdot G_{j_k}^{\alpha_{j_k}}. \tag{9.7}$$

De ces formules il s'ensuit que les applications λ et λ' sont des homomorphismes d'algèbres.

Définition. L'application $\lambda : \mathscr{N} \to \Pi$ (resp. $\lambda' : \mathscr{N} \to \Pi'$) s'appelle *représentation ordonnée gauche* (resp. *droite*) de l'algèbre nilpotente $\mathscr{N}$.

Si $T \in \mathscr{N}$, il s'ensuit alors des définitions que pour tout $\varphi \in C^\infty_{\mathscr{L}}(\mathbf{R}^n \times M^m)$ on a

$$T\left[\!\left[\varphi\left(\overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{n}{A}_n, \overset{n+1}{B}\right)\right]\!\right] = (\lambda(T)\varphi)\left(\overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{n}{A}_n, \overset{n+1}{B}\right),$$

$$\left[\!\left[\varphi\left(\overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{n}{A}_n, \overset{n+1}{B}\right)\right]\!\right] T = (\lambda'(T)\varphi)\left(\overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{n}{A}_n, \overset{n+1}{B}\right).$$

On en déduit que si $P(x, \alpha)$ est un polynôme en x dont les coefficients dépendent de α, alors

$$\left[\!\left[P\left(\overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{n}{A}_n, \overset{n+1}{B}\right)\right]\!\right] \cdot \left[\!\left[g\left(\overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{n}{A}_n, \overset{n+1}{B}\right)\right]\!\right] = \\ = \Psi\left(\overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{n}{A}_n, \overset{n+1}{B}\right), \tag{9.8}$$

où $\Psi(x, \alpha) = P\left(\overset{1}{L}_1, \ldots, \overset{n}{L}_n, \overset{n+1}{\alpha}\right) g(x, \alpha) \in C^\infty_{\mathscr{L}}$ pour tout $g(x, \alpha) \in C^\infty_{\mathscr{L}}$.

Il se pose la question de savoir si cette égalité se généralise au cas où $P(x, \alpha) \in S^\infty$ et $g(x, \alpha) \in C^\infty_{\mathscr{L}}$.

Les axiomes formulés plus bas donnent une réponse affirmative à cette question.

Considérons des symboles $f(x, \alpha, t)$ dépendant de paramètres $t \in \mathbf{R}^k$ (k n'est pas fixe) de sorte que toutes les dérivées par rapport à ces paramètres appartiennent à S^∞.

Axiome μ_7) (axiome du paramètre). Soient $f(x, \alpha, t) \in C^\infty_{\mathscr{L}}$, $t \in \mathbf{R}^k$, des symboles tels que

$$\left[\!\left[f\left(\overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{n}{A}_n, \overset{n+1}{B}, t\right)\right]\!\right] = 0$$

pour tous les $t \in \mathbf{R}^k$. Alors, pour toute fonction $\Phi(t) \in S^\infty(\mathbf{R}^k)$ et tous symboles

$$h(x, \alpha, t) = \Phi\left(i\frac{\partial}{\partial t_1}, \ldots, i\frac{\partial}{\partial t_k}\right) f(x, \alpha, t)$$

on a la relation

$$\left[\!\left[h\left(\overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{n}{A}_n, \overset{n+1}{B}, t\right)\right]\!\right] = 0.$$

Si l'égalité (μ_7) est remplie pour tous les $t \neq 0$, elle l'est aussi pour $t = 0$.

Axiome μ_8) (axiome d'unicité). Supposons que pour un $A \in M$ et des symboles $f(x, \alpha, t) \in S^\infty$, $t \in \mathbf{R}$, on a

$$\mu_8^a : \left[\!\left[f\left(\overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{n}{A}_n, \overset{n+1}{B}, 0\right)\right]\!\right] = 0,$$

$$\mu_8^b : \left[\!\left[f'_t\left(\overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{n}{A}_n, \overset{n+1}{B}, t\right)\right]\!\right] = \left[\!\left[i\overset{n+2}{A} f\left(\overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{n}{A}_n, \overset{n+1}{B}, t\right)\right]\!\right]$$

Alors $\left[\!\left[f\left(\overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{n}{A}_n, \overset{n+1}{B}, t\right)\right]\!\right] = 0$ pour tous les $t \in \mathbf{R}$.

Considérons une autre méthode de construction des solutions du problème fondamental. Supposons que pour des nombres $\rho_k \geqslant 1$, $\mu \geqslant 1$, T, η_0 et pour une fonction à support borné $\rho(\eta)$ égale à 1 pour $|\eta| \leqslant \eta_0$ on a construit une fonction

$$\Psi_N(\alpha, \eta, x, t) \in C^\infty_{\mathscr{L}}(M^m \times \mathbf{R}^{2n}), \qquad t \in [0, \infty],$$

qui pour $t=T$ décroît plus vite que Λ^{-N} lorsque $|x|\to\infty$, où $\Lambda=\left(\sum_{k=1}^{n}(x_k)^{2/\rho_k}+1\right)^{1/2}$, et qui satisfait les relations suivantes:

$$\left[\left[i\Lambda^{\mu}\frac{\partial}{\partial t}-f\left(\overset{1}{L}_1,\ \ldots,\ \overset{n}{L}_n,\ \overset{n+1}{\alpha}\right)\right]\right]^{3}\Psi_N\left(\alpha,\ i\frac{\partial^2}{\partial x},\ \overset{1}{x},\ t\right)\doteq B_N\left(\alpha,\ i\frac{\partial^2}{\partial x},\ \overset{1}{x},\ t\right),$$

$$\Psi(\alpha,\ \eta,\ x,\ 0)=\rho(\eta), \tag{9.9}$$

où $B_N(\alpha,\ \eta,\ x,\ t)$ décroît plus vite que Λ^{-N} lorsque $|x|\to\infty$ uniformément en $t\in\mathbf{R}$. Ici et dans la suite $F\doteq\hat{f}$ signifie que $F\varphi=\hat{f}\varphi$ pour tout $\varphi\in C_0^{\infty}$.

Intégrons (9.9) par rapport à t entre 0 et T et appliquons les deux membres de (9.9) à la fonction $\mathbb{1}$ identiquement égale à l'unité. Tenant compte de ce que $\rho\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbb{1}=\mathbb{1}$ et désignant

$$\Psi'_N(\alpha,\ x,\ t)=\Psi_N\left(\alpha,\ i\frac{\partial^2}{\partial x},\ \overset{1}{x},\ t\right)\overset{1}{\Lambda}{}^{-\mu}\mathbb{1},$$

$$B'_N(\alpha,\ x,\ t)=B_N\left(\alpha,\ i\frac{\partial^2}{\partial x},\ \overset{1}{x},\ t\right)\overset{1}{\Lambda}{}^{-\mu}\mathbb{1},$$

$$g_N(x,\alpha)=i\int_0^T\Psi'_N(\alpha,\ x,\ t)\,dt,$$

on obtient l'égalité suivante*):

$$f\left(\overset{1}{L}_1,\ \ldots,\ \overset{n}{L}_n,\ \overset{n+1}{\alpha}\right)g_N(x,\ \alpha)=$$

$$=\mathbb{1}-\Psi'_N(\alpha,\ x,\ T)-i\int_0^T B'_N(\alpha,\ x,\ t)\,dt=\mathbb{1}+R_N(\alpha,\ x),$$

où par hypothèse R_N décroît plus vite que Λ^{-N} lorsque $|x|\to\infty$, ce qui n'est autre que la solution du problème fondamental.

Il est parfois utile de réduire le problème fondamental à l'intégration d'une équation plus simple. Nous avons vu par exemple que la représentation asymptotique de la solution de l'équation des oscillations du réseau cristallin ne pouvait généralement pas être déterminée à l'aide des seules bicaractéristiques. Nous pouvons seulement ramener le problème asymptotique à un plus simple: à l'intégration exacte de l'équation des ondes (cf. § 8).

*) Ici

$$\Psi_N\left(\alpha_1\,i\overset{2}{\frac{\partial}{\partial x}},\ \overset{1}{x},\ t\right)\overset{1}{\Lambda}{}^{-\mu}\mathbb{1}=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}^{2n}}\Psi_N(\alpha,\ p,\ \xi,\ t)\,e^{ip(\xi-x)}\Lambda^{-\mu}\,dp\,d\xi.$$

Le dernier raisonnement est euristique.

Exemples. 1. Considérons l'équation

$$-i\frac{\partial u}{\partial t}+i\frac{\partial u}{\partial y}-yu=0, \quad u|_{t=0}=f(y), \quad f\in C(R'). \tag{9.10}$$

Appliquons la méthode fondamentale à la construction des solutions de cette équation dans la classe C^N des fonctions N fois continûment dérivables et décroissant plus vite que $|y|^{-N}$ lorsque $|y|\to\infty$.

Traitons tout d'abord le cas général. Supposons qu'on cherche la solution de l'équation

$$-i\frac{\partial u}{\partial t}+F\left(\overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{n}{A}_n, \overset{n+1}{B}, t\right)u=0, \quad u|_{t=0}=f(y).$$

Cherchons cette solution sous la forme

$$u(y, t)=g\left(\overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{n}{A}_n, \overset{n+1}{B}, t\right)f(y),$$

où l'opérateur $[\![g]\!]=g\left(\overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{n}{A}_n, \overset{n+1}{B}, t\right)$ est solution de l'équation

$$-i\frac{\partial}{\partial t}[\![g]\!]+[\![F]\!]\cdot[\![g]\!]=R_N\left(\overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{n}{A}_n, \overset{n+1}{B}, t\right), \quad [\![g]\!]|_{t=0}=1, \tag{9.11}$$

$R_N=O_{\mathscr{L}}(|x|^{-N})$ uniformément en α et t. Ramenons le problème (9.11) au suivant :

$$-i\frac{\partial}{\partial t}g(x, \alpha, t)+F\left(\overset{1}{L}_1, \ldots, \overset{n}{L}_n, \overset{n+1}{\alpha}, t\right)g(x, \alpha, t)=R_N(x, \alpha, t), \quad g|_{t=0}=1.$$

A noter que si ce problème admet une solution, le symbole $g(x, \alpha, t)$ peut être déterminé à partir de l'équation

$$g(x, \alpha, t)=\left[\!\left[\Psi_N\left(\overset{1}{x}, -i\overset{2}{\frac{\partial}{\partial x}}, \alpha, t\right)\right]\!\right]\mathbb{1}(x),$$

où $\mathbb{1}(x)$ est la fonction unité de x, et $\Psi_N\left(\overset{1}{x}, -i\overset{2}{\frac{\partial}{\partial x}}, \alpha, t\right)$ est solution de l'équation

$$-i\frac{\partial}{\partial t}\Psi_N+F\left(\overset{1}{L}_1, \ldots, \overset{n}{L}_n, \overset{n+1}{\alpha}, t\right)\Psi_N\doteq\overline{R}_N\left(\overset{1}{x}, -i\overset{2}{\frac{\partial}{\partial x}}, \alpha, t\right),$$

où $\Psi_N(x, \eta, \alpha, 0)=\rho(\eta)$; $\overline{R}_N(x, \eta, \alpha, t)=O_{\mathscr{L}}(|x|^{-N})$.

Passons maintenant à l'exemple envisagé. Définissons les opérateurs

$$A_1=-i\frac{\partial}{\partial y}, \qquad A_2=y, \qquad B=y.$$

Ces opérateurs sont visiblement générateurs d'une algèbre de Lie nilpotente. Trouvons leurs représentations ordonnées. A cet effet dans l'opérateur $\overset{4}{A}_1\varphi\left(\overset{1}{A}_1, \overset{2}{A}_2, \overset{3}{B}\right)$ transportons l'opérateur $\overset{1}{A}_1$ à droite de $\overset{2}{A}_2$ et de $\overset{3}{B}$ comme nous l'avons fait plus haut. Nous obtenons

$$\overset{4}{A}_1\varphi\left(\overset{1}{A}_1, \overset{2}{A}_2, \overset{3}{B}\right) = \overset{4}{A}_1\varphi\left(\overset{1}{A}_1, \overset{2}{A}_2, \overset{5}{B}\right) - \\ - i\frac{\partial}{\partial\alpha}\varphi\left(\overset{1}{A}_1, \overset{2}{A}_2, \overset{5}{B}\right) - i\frac{\partial}{\partial x_2}\varphi\left(\overset{1}{A}_1, \overset{2}{A}_2, \overset{5}{B}\right)$$

Pour A_1 nous avons donc la représentation

$$L_1 = x_1 - i\frac{\partial}{\partial x_2} - i\frac{\partial}{\partial\alpha}.$$

La représentation de A_2 est évidente:

$$L_2 = x_2.$$

Comme $F\left(\overset{1}{A}_1, \overset{2}{A}_2, \overset{3}{B}, t\right) = -(A_1 + A_2)$, nous obtenons pour $\Psi = \Psi\left(\overset{1}{x}, -i\overset{2}{\frac{\partial}{\partial x}}, \alpha, t\right)$ l'équation suivante

$$-i\frac{\partial\Psi}{\partial t} - (L_1 + L_2)\Psi = 0,$$

$$\Psi|_{t=0} = \rho\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right), \qquad \rho \in C_0^\infty,$$

et $\rho(\eta) = 1$ pour $|\eta| \leqslant \eta_0 < \infty$.

Cherchons la solution de cette équation sous la forme

$$\Psi = e^{i\overset{1}{\Lambda}S\left(\overset{1}{x}, -i\overset{2}{\frac{\partial}{\partial x}}, \alpha, t\right)}\varphi\left(\overset{1}{x}, -i\overset{2}{\frac{\partial}{\partial x}}, \alpha, t\right), \tag{9.13}$$

où

$$S(x, \eta, \alpha, 0) = 0, \qquad \varphi(x, \eta, \alpha, 0) = \rho(\eta), \qquad \Lambda = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Portant l'opérateur Ψ dans (9.12) et utilisant la formule de commutation du hamiltonien à l'exponentielle, on obtient l'équation opératorielle suivante:

$$\overset{1}{\Lambda}\frac{\partial S}{\partial t}\varphi - i\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \left[x_1 - \overset{1}{\Lambda}\frac{\partial S}{\partial\eta_1} - \overset{1}{\Lambda}\frac{\partial S}{\partial\alpha}\right]\varphi + \\ + i\overset{2}{\frac{\partial}{\partial x}}\varphi - i\frac{\partial}{\partial\alpha}\varphi - \left[\overset{1}{x}_2 - \overset{1}{\Lambda}\frac{\partial S}{\partial\eta_2}\right]\varphi - i\frac{\partial\varphi}{\partial\eta_1} - i\frac{\partial\varphi}{\partial\eta_2} = 0.$$

Nous avons omis les arguments $\overset{1}{x}$, $-i\overset{2}{\frac{\partial}{\partial x}}$, α, t des fonctions φ et S. En passant des opérateurs aux symboles et en égalant à zéro les coefficients des puissances de Λ, on obtient les équations suivantes:

$$\frac{\partial S}{\partial t}-\omega_1+\frac{\partial S}{\partial \eta_1}-\frac{\partial S}{\partial \alpha}-\omega_2+\frac{\partial S}{\partial \eta_2}=0, \tag{9.14}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}-i\eta_2\varphi+\frac{\partial \varphi}{\partial \eta_1}+\frac{\partial \varphi}{\partial \eta_2}+\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}=0, \tag{9.15}$$

où $x_1\Lambda^{-1}=\omega_1$, $x_2\Lambda^{-1}=\omega_2$.

Les équations (9.14), (9.15) ont pour solutions

$$S=(\omega_1+\omega_2)t, \qquad \varphi=e^{i\eta_2^2/2-i(\eta_2-t)^2/2}\rho(\eta_1-t,\ \eta_2-t).$$

Donc

$$\Psi(x,\alpha,\eta,t)=e^{i(x_1+x_2)t}\cdot e^{i\frac{\eta_2^2-(\eta_2-t)^2}{2}}\rho(\eta_1-t,\ \eta_2-t).$$

Pour construire la solution de l'équation primitive, nous devons trouver le symbole de l'opérateur $[\![g]\!]$ à partir de l'équation:

$$g(x,\alpha,t)=\left[\!\!\left[\Psi\left(\overset{1}{x},\ -i\overset{2}{\frac{\partial}{\partial x}},\ \alpha,\ t\right)\right]\!\!\right]\mathbf{1}(x)=$$

$$=e^{i/2\left[\left(-i\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2-\left(-i\frac{\partial}{\partial x_2}-t\right)^2\right]}\rho\left(-i\frac{\partial}{\partial x_1}-t,\ -i\frac{\partial}{\partial x_2}-t\right)e^{i(x_1+x_2)t}=$$

$$=e^{i(x_1+x_2)t}\cdot e^{it^2/2}.$$

Une fois connu le symbole de l'opérateur $[\![g]\!]$, on obtient la solution de l'équation (9.10) sous la forme

$$u(y,t)=g\left(\overset{1}{A_1},\ \overset{2}{A_2},\ \overset{3}{B},\ t\right)f(y)=e^{it\left(-i\frac{\partial}{\partial y}\right)}\cdot e^{iyt}\cdot e^{it^2/2}f(y)=e^{it^2/2+iyt}f(y+t).$$

Cet exemple montre comment la méthode opératorielle peut être appliquée à la construction de la solution exacte d'équations.

Voyons un autre exemple.

2. Soit $a(y)$ une fonction différentiable de $y\in\mathbf{R}$ telle que $0\leqslant c_1\leqslant a(y)\leqslant c_2<\infty$, $\forall y\in\mathbf{R}$. Considérons l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-y^2a(y)u=0 \tag{9.16}$$

avec les conditions initiales

$$u|_{t=0}=u_1(y), \qquad u'_t|_{t=0}=0, \tag{9.17}$$

où la fonction $u_1 \in H_s(\mathbf{R})$ pour un s. Etudions l'équation (9.16), (9.17) comme nous l'avons fait pour l'équation (9.10).

Soient A_1, A_2, B les opérateurs de l'exemple 1. Mettons (9.16) sous la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - [\![A_1^2 + a(B) A_2^2]\!] u = 0.$$

Appliqué à l'opérateur $\Psi_N\left(\overset{1}{x}, -i\overset{2}{\frac{\partial}{\partial x}}, \alpha, t\right)$, le principe de construction des solutions asymptotiques développé dans le précédent numéro nous conduit à l'équation

$$\frac{\partial^2 \Psi_N}{\partial t^2} - [\![L_1^2 + a(\alpha) L_2^2]\!] \Psi_N \doteq O_{-\infty}(|x|^{-N}), \tag{9.16'}$$

$$\Psi_N(x, \eta, \alpha, 0) = \rho(\eta), \quad \frac{\partial \Psi_N}{\partial t}(x, \eta, \alpha, 0) = 0.$$

Cherchons la solution de l'équation (9.16) sous la forme

$$\Psi_N\left(\overset{1}{x}, -i\overset{2}{\frac{\partial}{\partial x}}, \alpha, t\right) = e^{i\overset{1}{\Lambda} S\left(\overset{1}{x}, -i\overset{2}{\frac{\partial}{\partial x}}, \alpha, t\right)} \varphi_N\left(\overset{1}{x}, -i\overset{2}{\frac{\partial}{\partial x}}, \alpha, t\right). \tag{9.17'}$$

Portons l'opérateur Ψ_N défini par (9.17') dans l'équation (9.16). Les formules de commutation nous conduisent à l'équation

$$e^{i\overset{1}{\Lambda} S\left(\overset{1}{x}, -i\overset{2}{\frac{\partial}{\partial x}}, \alpha, t\right)} \left\{ \overset{1}{\Lambda}{}^2 \overset{3}{[\![} -\left(\frac{\partial S}{\partial t} - i\overset{1'}{\Lambda}{}^{-1} \frac{\partial}{\partial t}\right)^2 + \right.$$

$$+ \left(x_1, \overset{1'}{\Lambda}{}^{-1} - \frac{\partial S}{\partial \eta_1} + \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} - i\overset{1'}{\Lambda}{}^{-1} \frac{\partial}{\partial \alpha} - i\overset{1'}{\Lambda} \frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2 +$$

$$\left. + a(\alpha) \left(x_2 \overset{1'}{\Lambda}{}^{-1} - \frac{\partial S}{\partial \eta_2}\right)^2 \overset{3}{]\!]} \varphi_N \right\} \doteq O_{-\infty}(|x|^{-N}).$$

Dans cette formule, la fonction S et ses dérivées figurant dans l'opérateur $\overset{3}{[\![\,]\!]}$ dépendent des arguments $\overset{1}{x}$, $-i\overset{2}{\frac{\partial}{\partial x}}$, α, t. L'application de la K-formule permet d'ordonner de façon naturelle l'action des opérateurs dans la dernière relation, et pour le symbole de l'opérateur $\overset{3}{[\![\,]\!]}$ on obtient l'expression

$$\left\{ -\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 + \left(\omega_1 - \frac{\partial S}{\partial \eta_1} + \frac{\partial S}{\partial \alpha}\right)^2 + a(\alpha) \left(\omega_2 - \frac{\partial S}{\partial \eta_2}\right)^2 + \right.$$

$$+\sum_{k=1}^{N-1}(-i\Lambda^{-1})^k R_k\Big\}\varphi_N+\Lambda^{-N+1}R_N\varphi_N,$$

où $\omega_1=x_1\Lambda^{-1}$ et $\omega_2=x_2\Lambda^{-1}$, R_k sont des opérateurs différentiels d'ordre k de coefficients différentiables, R_N un opérateur défini par le reste de la formule de commutation.

Signalons que la K-formule nous permet d'établir des formules récurrentielles pour tous les opérateurs.

L'équation (9.16) se réduit ainsi aux équations

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2-\left(\omega_1-\frac{\partial S}{\partial\eta_1}+\frac{\partial S}{\partial\alpha}\right)^2-a(\alpha)\left(\omega_2-\frac{\partial S}{\partial\eta_2}\right)^2=0, \tag{9.18}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{N}(-i\Lambda^{-1})^k R_k\right)\varphi_N=O(|x|^{-N}). \tag{9.19}$$

Les coefficients des opérateurs R_k se déterminent en fonction de la solution de l'équation (9.18) qui est une équation de Hamilton-Jacobi avec la condition initiale $S|_{t=0}=0$.

Pour déterminer la fonction φ_N, considérons le système d'équations

$$\begin{aligned}&R_1\tilde\varphi_0=0, &\quad \tilde\varphi_0|_{t=0}=\rho(\eta),\\ &R_1\tilde\varphi_1+R_2\tilde\varphi_0=0, &\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots &\\ &R_1\tilde\varphi_{n-1}+\dots+R_{N-1}\tilde\varphi_0=0, &\quad \tilde\varphi_k|_{t=0}=0,\quad k>0.\end{aligned} \tag{9.20}$$

Les équations (9.18), (9.20) se résolvent comme les équations (8.32) du § 8. Désignons les solutions des équations (9.18), (9.20) par $S^\pm$, $\varphi_0^\pm, \dots, \varphi_N^\pm$. Alors

$$\varphi_N^\pm=\sum_{k=0}^{N-1}(-i\Lambda^{-1})^k\tilde\varphi_k^\pm,$$

ce qu'on vérifie immédiatement. D'où l'on déduit que la solution de l'équation (9.18) est

$$\Psi_N=1/2\sum_{k=0}^{N-1}\left(e^{i\Lambda S^-\left(\overset{1}{x},\,-i\overset{2}{\frac{\partial}{\partial x}},\,\alpha,\,t\right)}\left(-i\overset{1}{\Lambda}{}^{-1}\right)^k\tilde\varphi_k^-\left(\overset{1}{x},\,-i\overset{2}{\frac{\partial}{\partial x}},\,\alpha,\,t\right)+\right.$$

$$\left.+e^{i\Lambda S^+\left(\overset{1}{x},\,-i\overset{2}{\frac{\partial}{\partial x}},\,\alpha,\,t\right)}\left(-i\overset{1}{\Lambda}{}^{-1}\right)^k\tilde\varphi_k^+\left(\overset{1}{x},\,-i\overset{2}{\frac{\partial}{\partial x}},\,\alpha,\,t\right)\right),$$

donc la solution asymptotique du problème (9.16), (9.17) est la fonction

$$u^{(N)}(y,t)=\left[\!\left[g_N\left(\overset{1}{A_1},\overset{2}{A_2},\overset{3}{B},t\right)\right]\!\right]u_1(y),$$

où le symbole de l'opérateur $[\![g_N]\!]$ se définit à partir de l'équation

$$g_N(x, \alpha, t)=\left[\!\!\left[\Psi\left(\overset{1}{x}, -i\frac{\overset{2}{\partial}}{\partial x}, \alpha, t\right)\right]\!\!\right]1(x).$$

Il est souvent commode de chercher la suite quasi inverse pour l'opérateur $f\left(\overset{1}{A_1}, \ldots, \overset{n}{A_n}, \overset{n+1}{B}\right)$ sous la forme $\varkappa_N=\varkappa_N\left(\overset{1}{r}, \overset{2}{A_1}, \overset{3}{A_2}, \ldots, \overset{n+1}{A_n}, \overset{n+2}{B}\right)$, où $r=r\left(\overset{1}{A_1}, \ldots, \overset{n}{A_n}, \overset{n+1}{B}\right)$ est un opérateur. En utilisant la K-formule et en tenant compte du fait que les opérateurs $A_1, \ldots, A_n, B$ sont générateurs d'une algèbre de Lie nilpotente, on démontre facilement l'existence d'opérateurs $x_k=x_k\left(\overset{1}{A_1}, \ldots, \overset{n}{A_n}, \overset{n+1}{B}\right)$ tels que, d'une part, $\varkappa_k=x_k$ pour tous les k et, d'autre part, la suite x_k peut être quasi inverse au sens de la définition p. 116. Cette situation nous suggère la définition suivante.

Définition. On dira qu'un opérateur $f=f\left(\overset{1}{A_1}, \ldots, \overset{n}{A_n}, \overset{n+1}{B}\right)$ est quasi inversible à droite (resp. à gauche) par rapport à l'opérateur $r=r\left(\overset{1}{A_1}, \ldots, \overset{n}{A_n}, \overset{n+1}{B}\right)$ $\left(\text{resp. } r'=r'\left(\overset{n+1}{A_1}, \ldots, \overset{2}{A_n}, \overset{1}{B}\right)\right)$ s'il existe une suite $\varkappa_k=\varkappa_k\left(\left[\!\!\left[r\left(\overset{1}{A_1}, \ldots, \overset{n}{A_n}, \overset{n+1}{B}\right)\right]\!\!\right], \overset{2}{A_1}, \ldots, \overset{n}{A_n}, \overset{n+1}{B}\right)$ $\left(\text{resp. } \varkappa'_k=\varkappa'_k\left(\overset{n+2}{\left[\!\!\left[r'\left(\overset{n+1}{A_1}, \ldots, \overset{2}{A}, \overset{1}{B}\right)\right]\!\!\right]}, \overset{n+1}{A_1}, \ldots, \overset{2}{A_n}, B\right)\right)$ telle que $f\varkappa_k=1+R_k\left(\overset{1}{r}, \overset{2}{A_1}, \ldots, \overset{n+1}{A_n}, \overset{n+2}{B}\right)$ $\left(\text{resp. } \varkappa' f=1+R'_k\left(\overset{n+2}{r'}, \overset{n+1}{A_1}, \ldots, \overset{2}{A_n}, \overset{1}{B}\right)\right)$, où la fonction $R_k(x_0, x_1, \ldots, x_n, \alpha)$ (resp. $R'_k(x_0, x_1, \ldots, x_n, \alpha)$) décroît plus vite que $\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{-k/2}$ lorsque $|x|\to\infty$. L'opérateur r sera dit *opérateur étalon* et l'opérateur f, *quasi inversible* par rapport à l'opérateur étalon r s'il est quasi inversible à gauche et à droite.

D'après ce qui précède il est évident que tout opérateur quasi inversible au sens de la définition p. 116 l'est au sens de la définition ci-dessus.

Il est évident que la méthode de réduction, par un opérateur étalon, du problème fondamental à un problème de Cauchy pour des opérateurs différentiels présentera des traits spécifiques. Signalons tout d'abord que si $r=r\left(\overset{1}{A_1}, \ldots, \overset{n}{A_n}, \overset{n+1}{B}\right)\in X$ est un opérateur étalon et $g(x_0, x, \alpha)\in S^\infty(\mathbf{R}^{n+1}\times M^n)$, il est évident que

$$[\![g]\!]\cdot r=(x_0 g)\left(\overset{1}{r}, \overset{2}{A_1}, \ldots, \overset{n+1}{A_n}, \overset{n+2}{B}\right), \tag{9.21}$$

où $[\![g]\!]=g\left(\overset{1}{r}, \overset{2}{A_1}, \ldots, \overset{n+1}{A_n}, \overset{n+2}{B}\right)$. Mais par ailleurs

$$[\![g]\!]\cdot r=\overset{2}{\left[\!\left[g\left(\overset{1}{r}, \overset{2}{A_1}, \ldots, \overset{n+1}{A_n}, \overset{n+2}{B}\right)\right]\!\right]}\ \overset{1}{\left[\!\left[r\left(\overset{1}{A_1}, \ldots, \overset{n}{A_n}, \overset{n+1}{B}\right)\right]\!\right]}$$

et, par conséquent, en se servant des opérateurs de la représentation ordonnée gauche $G_1, G_2, \ldots, G_n, G_{n+1}$, on obtient

$$[\![g]\!]\cdot r=\left(r\left(\overset{n+1}{G_1}, \overset{n}{G_2}, \ldots, \overset{2}{G_n}, \overset{1}{G_{n+1}}\right)g\right)\left(\overset{1}{r}, \overset{2}{A_1}, \ldots, \overset{n+1}{A_n}, \overset{n+2}{B}\right). \quad (9.22)$$

En combinant (9.21) et (9.22), on conclut qu'au symbole $\left(x_0-r\left(\overset{n+1}{G_1}, \ldots, \overset{1}{G_{n+1}}\right)\right)g(x_0, x, \alpha)$ est associé l'opérateur nul. D'autre part, pour tout $f\in S^\infty$, on a

$$[\![f]\!]\cdot[\![g]\!]=\left(f\left(\overset{1}{L_1}, \ldots, \overset{n}{L_n}, \overset{n+1}{\alpha}\right)g\left(x_0, x, \alpha\right)\right)\left(\overset{1}{r}, \overset{2}{A_1}, \ldots, \overset{n+1}{A_n}, \overset{n+2}{B}\right), \quad (9.23)$$

mais alors au symbole

$$\Psi(x_0, x, \alpha)=\left[f\left(\overset{1}{L_1}, \ldots, \overset{n}{L_n}, \overset{n+1}{\alpha}\right)-r\left(\overset{n+1}{G_1}, \ldots, \overset{1}{G_{n+1}}\right)+x_0\right]g(x_0, x, \alpha)$$

est associé l'opérateur

$$\Psi\left(\overset{1}{r}, \overset{2}{A_1}, \ldots, \overset{n+1}{A_n}, \overset{n+2}{B}\right)=[\![f]\!]\cdot[\![g]\!].$$

Donc, à l'opérateur de multiplication à gauche par $[\![f]\!]$ dans l'algèbre des opérateurs est associé l'opérateur $\hat{\mathscr{H}}=\left(f\left(\overset{1}{L_1}, \ldots, \overset{n}{L_n}, \overset{n+1}{\alpha}\right)-\right.$ $\left.-r\left(\overset{n+1}{G_1}, \ldots, \overset{1}{G_{n+1}}\right)+x_0\right)$ dans l'espace des symboles, de telle sorte que

$$[\![f]\!]\cdot[\![g]\!]=\left(\left(f\left(\overset{1}{L_1}, \ldots, \overset{n}{L_n}, \overset{n+1}{\alpha}\right)-r\left(\overset{n+1}{G_1}, \ldots\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\ldots, \overset{1}{G_{n+1}}\right)+x_0\right)g\right)\left(\overset{1}{r}, \overset{2}{A_1}, \ldots, \overset{n+1}{A_n}, \overset{n+2}{B}\right) \quad (9.23')$$

pour tout $g\in C^\infty_{\mathscr{L}}(\mathbf{R}^{n+1}\times M^n)$.

Appelons l'opérateur $\hat{\mathscr{H}}$ *hamiltonien* de l'opérateur $f\left(\overset{1}{A_1}, \ldots, \overset{n}{A_n}, \overset{n+1}{B}\right)$ par rapport à l'opérateur étalon $r\left(\overset{1}{A_1}, \ldots, \overset{n}{A_n}, \overset{n+1}{B}\right)$.

Donc, avec un opérateur étalon, le problème fondamental se ramène, contrairement à (9.4), au problème suivant : trouver une suite de fonctions $g_N(x_0, x, \alpha)$ telle que

$$\left(f\left(\overset{1}{L_1}, \ldots, \overset{n}{L_n}, \overset{n+1}{\alpha}\right)-r\left(\overset{n+1}{G_1}, \ldots, \overset{1}{G_{n+1}}\right)+x_0\right)g_N(x_0, x, \alpha)=$$
$$=1+R_N(x_0, x, \alpha), \quad (9.4')$$

où $R_N=O_{\mathscr{L}}(|x|^{-N})$.

Considérons un exemple dans lequel la quasi-inversibilité par rapport à l'opérateur étalon est essentiellement utilisée.

Exemple. Soit l'opérateur pseudo-différentiel

$$A=-i\frac{\partial}{\partial t}+H\left(\overset{2}{y},\ -i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

où $H(y,\ p)\in C^\infty(\mathbf{R}^n\times(\mathbf{R}^n\setminus\{0\}))$ est une fonction réelle. Soit $u_t(y)$ la solution du problème de Cauchy

$$Au_t=0,\qquad u_t\big|_{t=0}=u_0,\qquad u_0\in H_s.$$

Suivant Hermander, appelons l'ensemble

$$WF(u)\subset\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n;\qquad WF(u)=\bigcap_{B:Bu\in C^\infty}\operatorname{char}(B)$$

front d'onde de la fonction $u\in H_s(\mathbf{R}^n)$, où $B=B\left(\overset{2}{y},\ -i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial y}}\right)$ est un opérateur pseudo-différentiel de symbole $B(x,\ p)\in S^m(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n)$, $m=1$, S^m est l'espace des fonctions vérifiant la majoration

$$\left|\frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|}}{\partial x^\alpha\partial p^\beta}B(x,\ p)\right|\leqslant C_{\alpha\beta}(1+|x|+|p|)^m$$

et

$$\operatorname{char}B=\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\setminus\operatorname{supp}B.$$

Soit g_H^t la transformation canonique de l'espace $\mathbf{R}^n_x\times\mathbf{R}^n_p$ associée au hamiltonien H.

Proposition. *On a l'inclusion*

$$WF(u_t)\subset g_H^t WF(u_0).$$

Démonstration. Comme $((g_H^{-t})^*B)\circ g_H^t=B$ pour toute fonction $B\in S'$, il suffit de prouver la proposition suivante:

$$\left[\!\left[B\left(\overset{2}{y},\ -i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial y}}\right)\right]\!\right]u_0\in C^\infty\Rightarrow\left[\!\left[((g_H^{-t})^*B)\left(\overset{2}{y},\ -i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial y}}\right)\right]\!\right]u_t\in C^\infty\qquad(*)$$

pour tout $B\left(\overset{2}{y},\ -i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial y}}\right)$ de symbole $B\in S^1(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n)$.

Si $A=-i\frac{\partial}{\partial y}$ et $B=y$, alors la représentation ordonnée gauche de chaque opérateur $A_k=-i\frac{\partial}{\partial y_k}$ est $L_k=x_k-i\frac{\partial}{\partial\alpha_k}$ et la représentation ordonnée droite, $G_k=x_k$. Donc, la représentation ordonnée gauche de

l'opérateur B est le vecteur opératoriel α et la représentation ordonnée droite de $B_m = y_m$, l'opérateur $G_{n+1}^{(m)} = \alpha_m - i\dfrac{\partial}{\partial x_m}$.

Prenons pour opérateur étalon l'opérateur $r\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}\right) = H\left(\overset{2}{B}, \overset{1}{A}\right)$. Le hamiltonien de l'opérateur $H\left(\overset{2}{B}, \overset{1}{A}\right)$ par rapport à l'opérateur étalon $r\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}\right)$ sera l'opérateur

$$\hat{\mathscr{H}} = H\left(\overset{2}{\alpha}, x - i\frac{\partial}{\partial \alpha}\right) - H\left(\overset{1}{\alpha} - i\frac{\partial}{\partial x}, \overset{2}{x}\right) + x_0.$$

Considérons le problème

$$\left(-i\frac{\partial}{\partial t} + \hat{\mathscr{H}}\right)\Psi(x_0, x, \alpha, t) = 0; \qquad \Psi(x_0, x, \alpha, 0) = B(\alpha, x). \tag{9.24}$$

Cherchons une solution asymptotique de ce problème sous la forme

$$\Psi_N = e^{-ix_0 t} \sum_{k=0}^{N} \varphi_k(\alpha, x, t), \tag{9.25}$$

où les fonctions φ_k vérifient la majoration

$$\left|\frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial \alpha^{\gamma}} \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^{\beta}} \varphi_k(x, \alpha, t)\right| \leqslant C_{\gamma\beta k}(1 + |x|)^{-k-|\beta|+1} \tag{9.26}$$

et les conditions initiales

$$\varphi_0(\alpha, x, 0) = B(\alpha, x); \qquad \varphi_k(\alpha, x, 0) = 0, \qquad k \geqslant 1.$$

Portant l'expression (9.25) de Ψ_N dans (9.24) et égalant à zéro les termes appartenant aux espaces S^k, $k = 0, -1, \ldots$, on obtient le système d'équations

$$\frac{d\varphi_0}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{i}{2}\left\{\left\langle \overset{1}{\frac{\partial}{\partial \alpha}}, H_{pp}\left(\overset{2}{\alpha}, x\right) \overset{1}{\frac{\partial}{\partial \alpha}}\right\rangle + \left\langle \overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}, H_{xx}\left(\alpha, \overset{2}{x}\right) \overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}\right\rangle\right\}\varphi_0 = 0, \tag{9.27}$$

$$\frac{d\varphi_k}{dt} + R_1\varphi_{k-1} + \ldots + R_k\varphi_0 = 0, \qquad k = 2, \ldots, N-1.$$

Dans ces équations, R_k sont des opérateurs différentiels d'ordre $\leqslant k$ de coefficients différentiables. De (9.27) il vient

$$\varphi_0(\alpha, x, t) = ((g_H^{-t})^* B)(\alpha, x).$$

La dernière formule permet d'établir l'appartenance $\varphi_0 \in S'$ pour tout t et par suite $\varphi_k \in S^{-k+1}$. En portant la fonction Ψ_N dans (9.24), on obtient

$$\left(-i\frac{\partial}{\partial t}+\hat{\mathscr{H}}\right)\Psi_N(x_0, x, \alpha, t)=f_N(x, \alpha, t)\, e^{-ix_0 t},$$

$$\Psi_N(x_0, x, \alpha, 0)=B(\alpha, x),$$

et $f_N(x, \alpha, t)\in S^{-N}$ pour tout t. Or la fonction $\Psi_N(x_0, x, \alpha, t)$ est le symbole de l'opérateur $[\![\Psi_N]\!]=\Psi_N\left(\overset{1}{r}, \overset{2}{A}, \overset{3}{B}, t\right)$ qui est solution de l'équation opératorielle

$$-i\frac{\partial}{\partial t}[\![\Psi_N]\!]+\left[\!\left[H\left(\overset{2}{B}, \overset{1}{A}\right)\right]\!\right][\![\Psi_N]\!]=f_N\left(\overset{2}{A}, \overset{3}{B}, t\right)e^{-i\overset{1}{r}t} \qquad (9.28)$$

avec la condition initiale $\Psi_N\left(\overset{1}{r}, \overset{2}{A}, \overset{3}{B}, 0\right)=B\left(\overset{2}{B}, \overset{1}{A}\right)$. Cette circonstance nous conduit à la conséquence suivante: la fonction $\vartheta_N(y, t)=[\![\Psi_N]\!]\, u_0(y)$ est solution du problème de Cauchy suivant:

$$-i\frac{\partial \vartheta_N}{\partial t}+H\left(\overset{2}{y}, -i\frac{\partial}{\partial y}\right)\vartheta_N=F_N(y, t)\in H_{s+N},$$

$$\vartheta_N|_{t=0}=\left[\!\left[B\left(\overset{2}{y}, -i\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]\!\right]u_0(y).$$

Mettons $[\![\Psi_N]\!]$ sous la forme

$$[\![\Psi_N]\!]=\left[\!\left[((g_H^{-t})^* B)\left(\overset{2}{y}, -i\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]\!\right]e^{-it\left[\!\left[H\left(\overset{2}{y}, -i\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]\!\right]}+\varkappa_N\left(\overset{2}{y}, -i\frac{\partial}{\partial y}, t\right), \qquad (9.29)$$

où $\varkappa_N(\alpha, x, t)\in S^0(\mathbf{R}^n_\alpha \times \mathbf{R}^n_x)$ pour tout $N>0$.

A noter que $u_t(y)=e^{-it\left[\!\left[H\left(\overset{2}{y}, -i\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]\!\right]}u_0$; dans ces conditions

$$\vartheta_N(y, t)=\left[\!\left[((g_H^{-t})^* B)\left(\overset{2}{y}, -i\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]\!\right]u_t+\varkappa_N\left(\overset{2}{y}, -i\frac{\partial}{\partial y}\right)u_t \qquad (9.30)$$

et par conséquent de (9.29) et (9.30) on déduit (*). Ce que nous voulions.

Exhibons maintenant une construction générale qui permet de trouver les opérateurs de représentation ordonnée pour des relations de commutation de forme générale, plus exactement

$$A_k A_j=\sum_{s=1}^{n} A_s \Omega_{kj}^s(A_k), \qquad (9.31)$$

où $\Omega_{kj}^{s}(y)$, $k, j, s=1, \ldots, n$, sont des fonctions données de y appartenant à l'espace $S^{\infty}(\mathbf{R})$.

Définissons pour tous les $k=1, \ldots, n$ des fonctions matricielles $\Lambda_k(y)$:

$$(\Lambda_k(y))_{sj}=\Omega_{kj}^{s}(y)-y\delta_{sj},$$

où δ_{sj} est le symbole de Kronecker, et introduisons l'opérateur matriciel

$$U_k=\exp\left(\Lambda_k\binom{2}{y_k}\frac{\partial}{\partial y_k}\right).$$

Les images des fonctions de la variable y_k par l'opérateur U_k sont des fonctions matricielles de y_k de dimension $n\times n$:

$$(U_k\varphi(y_k))_{sj}=\varphi(y_k+\Lambda_k(y_n))_{sj}\equiv\varphi(\Omega_k(y_k))_{sj}, \tag{9.32}$$

où $\Omega_k(y_k)$ est une matrice d'éléments $(\Omega_k(y_k))_{sj}=\Omega_{kj}^{s}(y_k)$ et $\varphi(\Omega_k(y_k))_{sj}$ est un élément de la matrice $\varphi(\Omega_k(y_k))_{sj}$. Il est évident que pour que la formule (9.32) ait un sens, il faut soit se borner à l'étude de fonctions $\varphi(y_k)$ analytiques, soit exiger que la matrice $\Lambda_k(y_k)$ (ou, ce qui est équivalent, la matrice $\Omega_k(y_k)$) ait un spectre réel pour tous les $y_k\in\mathbf{R}$. Admettons que l'une de ces conditions est remplie. Définissons des opérateurs b_{sj}, $s, j=1, \ldots, n$, agissant sur les fonctions $\varphi(y_1, \ldots, y_n)$ à l'aide de la formule

$$\begin{aligned} b_{sj}&=[U_n\times\ldots\times U_{j+1}]_{sj}, \qquad j<n, \\ b_{sn}&=\delta_{sn}, \qquad j=n. \end{aligned} \tag{9.33}$$

Théorème 9.1. *Si les opérateurs $L_1, \ldots, L_n$ de la représentation ordonnée gauche d'opérateurs $A_1, \ldots, A_n$ satisfaisant les relations de commutation* (9.31) *existent et sont définis de façon unique et si, d'autre part, les opérateurs U_j sont inversibles, alors les opérateurs $L_1, \ldots, L_n$ sont solutions du système d'équations*

$$\sum_s L_s\circ b_{sj}=y_j. \tag{9.34}$$

Démonstration. Soit $\varphi(y_1, \ldots, y_n)$ un symbole donné. Vu que les relations (9.31) peuvent être mises sous la forme

$$A_kA=A\Omega_k(A_k), \qquad k=1, \ldots, n,$$

où $A_k=(A_1, \ldots, A_n): H\otimes\mathbf{C}^n\to H$, en se servant de la formule (6.25) (ou, plus exactement, de son cas particulier $\alpha=0$), on obtient l'identité

$$\begin{aligned} &\varphi\binom{1}{A_1}, \ldots, \overset{k-1}{A_{k-1}}, \overset{k+1}{A_k}, \ldots, \overset{n+1}{A_n}\Big)\overset{k}{A}= \\ &=\varphi\binom{1}{A_1}, \ldots, \overset{k-1}{A_{k-1}}, \Omega_k\binom{k}{A_k}, \overset{k+2}{A_{k+1}}, \ldots, \overset{n+1}{A_n}\Big)\overset{k+1}{A}= \\ &=(U_k\varphi)\binom{1}{A_1}, \ldots, \overset{k-1}{A_{k-1}}, \overset{k}{A_k}, \overset{k+2}{A_{k+1}}, \ldots, \overset{n+1}{A_n}\Big)\overset{k+1}{A}= \end{aligned}$$

$$= (U_{k+1}U_k\varphi)\left(\overset{1}{A_1}, \ldots, \overset{k+1}{A_{k+1}}, \overset{k+3}{A_{k+2}}, \ldots, \overset{n+1}{A_n}\right)\overset{k+2}{A} = \ldots$$

$$\ldots = (U_n \ldots U_k\varphi)\left(\overset{1}{A_1}, \ldots, \overset{n}{A_n}\right)\overset{n+1}{A} = (LU_n \ldots U_k\varphi)\left(\overset{1}{A_1}, \ldots, \overset{n}{A_n}\right) =$$

$$= (L_{(k)}\varphi)\left(\overset{1}{A_1}, \ldots, \overset{n}{A_n}\right),$$

où $L=(L_1, \ldots, L_n)$, $L_{(k)}=(L_{(k)_1}, \ldots, L_{(k)_n})$. Les opérateurs U_j étant inversibles et les opérateurs L_i de la représentation ordonnée définis de façon unique, l'opérateur $L_{(k)}$ est défini de façon unique par la propriété

$$\varphi\left(\overset{1}{A_1}, \ldots, \overset{k-1}{A_{k-1}}, \overset{k+1}{A_k}, \ldots, \overset{n+1}{A_n}\right)\overset{k}{A} = (L_{(k)}\varphi)\left(\overset{1}{A_1}, \ldots, \overset{n}{A_n}\right).$$

Comme

$$\varphi\left(\overset{1}{A_1}, \ldots, \overset{k-1}{A_{k-1}}, \overset{k+1}{A_k}, \ldots, \overset{n+1}{A_n}\right)\overset{k}{A}_{k-1} = (y_{k-1}\varphi)\left(\overset{1}{A_1}, \ldots, \overset{n}{A_n}\right).$$

on trouve que $L_{(k)_{k-1}} = y_{k-1}$, d'où

$$\sum_s L_s \circ \{U_n \ldots U_{j+1}]_{s_j} = y_j, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

c'est-à-dire que les opérateurs L_s sont solutions du système (9.34) puisque $L_n = y_n$. C.Q.F.D.

La résolution du système (9.34) dans le cas général est un problème très complexe. Cependant on peut le résoudre explicitement pour certains symboles $\Omega^s_{kj}(y)$ pas forcément linéaires si sont remplies des conditions bien spéciales.

Définition. On dira qu'un système de relations de commutation (9.31) est *résoluble* si toutes les matrices $\Omega_k(y)$ sont triangulaires inférieures, c'est-à-dire que $\Omega_{kj}(y) \equiv 0$ pour $s<j$, et si les fonctions $\Omega^s_{ks}(y)$ sont inversibles pour tous les k, s.

Théorème 9.2. *Si le système* (9.31) *admet une solution, il en est de même du système* (9.34) (la forme explicite de la solution est donnée plus bas dans la démonstration du théorème).

Démonstration. Transformons tout d'abord le système (9.34). Cherchons l'opérateur L_s sous la forme

$$L_s = \sum_{k=1}^{n} y_k M_{ks}, \tag{9.35}$$

où M_{ks} sont de nouveaux opérateurs inconnus. En portant (9.35) dans (9.34), on obtient

$$\sum_{k,s} y_k M_{ks} b_{sj} = y_j,$$

et par suite, pour déterminer les opérateurs M_{ks}, il suffit de résoudre le système d'équations

$$\sum_s M_{ks} b_{sj} = \delta_{kj}, \quad j, k = 1, \ldots, n. \tag{9.36}$$

Introduisons les opérateurs R_j

$$(R_j \varphi)(y_1, \ldots, y_n) = f(y_1, \ldots, y_j, (\Omega^j_{j+1,j})^{-1}(y_{j+1}), \ldots, (\Omega^j_{nj})^{-1}(y_n)),$$
$$j = 1, \ldots, n.$$

Posons maintenant

$$\begin{aligned} M_{ss} &= R_s, \quad s = 1, \ldots, n, \\ M_{sj} &= 0, \quad s < j, \\ M_{sj} &= -\sum_{l=j}^{s-1} R_s b_{sl} M_{lj}, \quad s > j. \end{aligned} \tag{9.37}$$

Les formules (9.37) permettent de déterminer par récurrence les opérateurs M_{sj} pour toutes les valeurs de s, j. Les opérateurs M_{sj} sont solutions du système d'équations (9.36). En effet, on remarquera que la fonction $f(A)$ de la matrice triangulaire inférieure A est encore une matrice triangulaire inférieure et $f(A)_{jj} = f(A_{jj})$ pour tous les $j = 1, \ldots, n$, donc $b_{sj} = 0$ pour $s < j$ et $b_{jj} \circ R_j = 1$, $j = 1, \ldots, n$. En portant les opérateurs M_{sj} définis par les formules (9.37) dans l'équation (9.36), on obtient la chaîne d'égalités suivante :

$$\sum_{s=1}^{n} M_{ks} b_{sj} = \sum_{s \leqslant k} M_{ks} b_{sj} = M_{kk} b_{kj} - \sum_{s=j}^{k-1} \sum_{l=s}^{k-1} R_k b_{kl} M_{ls} b_{sj} =$$

$$= M_{kk} b_{kj} - \sum_{l=j}^{k-1} R_k b_{kl} \left\{ \sum_{s=j}^{l} M_{ls} b_{sj} \right\}. \tag{9.38}$$

De (9.38) il s'ensuit que $\sum_{s=1}^{n} M_{ks} b_{sk} = M_{kk} b_{kk} = 1 = \delta_{kk}$, alors que $\sum_{s=1}^{n} M_{ks} b_{sj} = 0 = \delta_{kj}$ pour $k < j$. Pour prouver le théorème il nous faut maintenant montrer que $\sum_{s=1}^{n} M_{ks} b_{sj} = 0$ pour $k > j$. Raisonnons par récurrence sur la différence $k - j$. Pour $k - j = 1$, on obtient en vertu de (9.37).

$$\sum_{s=1}^{n} M_{ks} b_{sk-1} = M_{kk} b_{kk-1} - R_k b_{kk-1} = 0.$$

Supposons que les opérateurs définis à partir de (9.37) sont solutions des équations (9.36) pour tous les $k - j < p$, $p > 0$. Montrons que $\sum_{s=1}^{n} M_{ks} b_{sj} = 0$ pour $k - j = p + 1$. D'après l'hypothèse posée, on voit que

dans (9.38) chaque somme entre accolades est égale à δ_{ij}, puisque $l-j\leqslant p$, donc

$$\sum_{s=1}^{n} M_{ks}b_{sj}=M_{kk}b_{kj}-\sum_{l=j}^{k-1} R_k b_{kl}\delta_{lj}=M_{kk}b_{kj}-R_k b_{kj}=0.$$

Ce qui prouve le théorème.

Considérons maintenant un cas plus général lié à la construction du hamiltonien par rapport à l'opérateur étalon. Soit $[\![f_i]\!]=f_i\left(\overset{2}{A_1}, \ldots, \overset{n+1}{A_n}, \overset{1}{r}\right)\in M$. Considérons l'opérateur $\hat{F}=F\left([\![\overset{1}{f_1}]\!], [\![\overset{2}{f_2}]\!], \ldots, [\![\overset{k}{f_k}]\!]\right)$. Comme plus haut on trouve que la multiplication à gauche de l'opérateur $[\![y]\!]=g(A_1, \ldots, A_n, r)$, $g\in C^{\infty}_{\mathscr{L}}(\mathbf{R}^{n+1}\times M^m)$ par l'opérateur $\hat{F}$ induit dans $C^{\infty}_{\mathscr{L}}(\mathbf{R}^{n+1}\times M^m)$ l'opérateur

$$F\left([\![f_1(L_1, \ldots, L_n, \alpha)-r(G_1, \ldots, G_n, G_{n+1})+x_0]\!], \ldots\right.$$
$$\left.\ldots, [\![f_k(L_1, \ldots, L_n, \alpha)-r(G_1, \ldots, G_{n+1})+x_0]\!]\right).$$

Appelons cet opérateur *hamiltonien* de l'opérateur $\hat{F}$.

Dans ce cas, lorsque $r=0$ on peut indiquer une méthode de détermination d'un opérateur $\Psi=\Psi\left(\overset{1}{A_1}, \ldots, \overset{n}{A_n}, \overset{n+1}{B}\right)$ tel que $\Psi=\hat{F}$. En effet, la fonction $\Psi(x, \alpha)$ qui est solution de l'équation

$$\Psi(x, \alpha)=F\left(\overset{1}{[\![}f_1\left(\overset{1}{L_1}, \ldots, \overset{n}{L_n}, \overset{n+1}{\alpha}\right)]\!], \ldots, \overset{k}{[\![}f_k\left(\overset{1}{L_1}, \ldots, \overset{n}{L_n}, \overset{n+1}{\alpha}\right)]\!]\right)\cdot 1(x, \alpha)$$

est visiblement le symbole de l'opérateur Ψ. (Ici $1(x, \alpha)$ est la fonction identiquement égale à 1.)

3. Bicaractéristiques et conditions d'absorption. Dans le cas où la solution de l'équation peut être représentée par la somme d'un élément non différentiable ou oscillant rapidement et d'un élément différentiable ou régulier, il faut trouver l'équation à partir de laquelle sera déterminé l'élément oscillant ou non différentiable. L'élément non différentiable est donné par l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre que nous appellerons *équation de Hamilton-Jacobi* (*équation des caractéristiques*) et d'un système d'équations de Hamilton (*équations des bicaractéristiques*). Les solutions du système de bicaractéristiques peuvent être traitées comme les coordonnées d'un point mobile dans l'espace des phases engendré par x et p: x et p étant des coordonnées appartenant respectivement à une variété M^m et à un espace $\mathbf{R}^n$.

Dans le cas d'une fonction de générateurs ordonnés d'une algèbre de Lie nilpotente le symbole est donné comme une fonction de $n+m$ coordonnées, où m est la dimension de la variété M^m, c'est-à-dire le nombre de composantes de l'opérateur vectoriel B, et n le nombre des opérateurs $A_1, \ldots, A_n$. Donc, le symbole est défini sur l'espace $\mathbf{R}^n\times M^m=M_1^{n+m}$

Le problème de la détermination d'un opérateur quasi inverse de $f\left(\overset{1}{A_1}, \ldots, \overset{n}{A_n}, \overset{n+1}{B}\right)$ est lié à la construction des solutions d'un système de bicaractéristiques, donc à la détermination du hamiltonien associé au symbole $f(x_1, \ldots, x_n, \alpha)$, $\alpha \in M^m$.

Définition. On dira qu'une fonction $f \in \mathscr{L}^\infty(\mathbf{R}^s)$ est ρ-*quasi homogène* de degré $r>0$ s'il existe des nombres $\rho_1, \ldots, \rho_s \geqslant 1$ tels que pour tout $\lambda>0$

$$f(\lambda^{\rho_1} y_1, \ldots, \lambda^{\rho_s} y_s) = \lambda^r f(y).$$

On dira aussi qu'une fonction $v(y)$ est *subordonnée* à une fonction $f(y)$ ρ-quasi homogène de degré r si

$$\left|\frac{\partial^{|k|}\sigma(y)}{\partial y_1^{k_1} \ldots \partial y_s^{k_s}}\right| \leqslant C\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{s} y_i^{2/\rho_i}} + 1\right)^{r-1-|k|}$$

pour tous $k_1, \ldots, k_s$ naturels.

Définition. Si une fonction $F(y)$ se représente sous la forme $F(y) = \sum_{i=0}^{N} f_i(y) + \sigma(y)$, où $f_i(y)$ sont des fonctions ρ-quasi homogènes de degré $r_i > r_{i+1}$, $i = 1, \ldots, n-1$, et $\sigma(y)$ une fonction subordonnée à $f_0(y)$, on dira alors que $F(y)$ est *asymptotiquement quasi homogène*. La partie $f_0(y)$ sera dite *partie supérieure* de la fonction $F(y)$ et $\sum_{i=0}^{N} f_i(y)$, *partie essentielle* de $F(y)$.

Quatre étapes sont à distinguer dans la construction du hamiltonien de l'opérateur $A \in M$:

(1) (μ^{-1}). Choix des opérateurs $A_1, \ldots, A_n, B \in X$, et des symboles $r(x, \alpha)$, $f(x_0, x, \alpha) \in \mathscr{S}^\infty$ de telle sorte que l'opérateur A soit représentable sous la forme $A = f\left(\overset{1}{[\![} r\left(\overset{1}{A_1}, \ldots, \overset{n}{A_n}, \overset{n+1}{B}\right)\overset{1}{]\!]}, \overset{2}{A_1}, \ldots, \overset{n+1}{A_n}, \overset{n+2}{B}\right)$.

(2) $(A \to f)$. Construction du hamiltonien à l'aide de la représentation ordonnée.

(3) (ρ). Détermination de la partie supérieure $\pi(y, \eta, \alpha)$ du symbole du hamiltonien.

(4) $(\eta^{-1}) \cdot \xi \to (p, q)$. Détermination des variables hamiltoniennes de la fonction $\pi(y, \eta, \alpha)$ qui sera appelée *fonction de Hamilton*.

Les opérations (η^{-1}) et (ρ) ne sont pas généralement univoques*) et n'existent pas obligatoirement pour l'opérateur $A \in \mathscr{A}$ considéré. Passons à la dernière étape.

Supposons pour fixer les idées que ρ_i sont égaux à l'unité pour les s premières variables ($s \leqslant n$).

*) Par exemple, pour $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2$ on obtient $f(x_1, x_2) = f_0(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2$ si $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 1$ et $f_0(x_1, x_2) = x_1 x_2$, $f_1(x_1, x_2) = x_1^2$ si $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 2$.

Débaptisons les variables :

$$y_{s+1}=\omega_1, \ldots, y_n=\omega_{n-s}; \quad \eta_1=p_1, \ldots, \eta_s=p_s;$$
$$y_1=q_1, \ldots, y_s=q_s; \quad y_{h+i}=p_{s+i}, \quad 1\leqslant i\leqslant m, \quad \omega=(\omega_1, \ldots, \omega_{n-s});$$
$$\alpha_1=q_{s+1}, \ldots, \alpha_m=q_{s+m}; \quad \eta=(\eta_{s+1}, \ldots, \eta_n),$$
$$p=(p_1, \ldots, p_s).$$

Posons

$$\pi(y, \eta, \alpha)=\mathscr{H}(p, q, \eta, \omega), \qquad H=\operatorname{Re}\mathscr{H}, \qquad \tilde{H}=\operatorname{Im}\mathscr{H}.$$

Désignons d'autre part la partie essentielle du symbole $f(L_1, \ldots, L_n, \alpha)$ par $\mathscr{H}_0(p, q, \eta, \omega)$. Dans ce numéro nous supposerons que $\operatorname{Im}\mathscr{H}_0\leqslant 0$.

Soit dans l'espace engendré par p, q, η, ω une variété Ω_ε définie par les conditions : $(q_{s+1}, \ldots, q_{s+m})\in M^m$, $p_{s+1}=\ldots=p_{s+m}=0$,

$$\left|\sum_{i=1}^{s} q_i^2+\sum_{j=1}^{n-s}\omega_j^{2/\rho_j}-1\right|<\varepsilon;$$

$$\sum_{i=1}^{s} p_i^2+\sum_{j=1}^{n-s}\eta_j^2<\varepsilon, \qquad \left|\mathscr{H}(p, q, \eta, \omega)\big|_{p=\eta=0}\right|<\varepsilon.$$

Les solutions du système hamiltonien

$$\frac{dq_j}{d\tau}=\frac{\partial H}{\partial p_j}(p, q, \eta, \omega), \qquad q_j\big|_{\tau=0}=q_j^0,$$
$$\frac{dp_j}{d\tau}=-\frac{\partial H}{\partial q_j}(p, q, \eta, \omega), \qquad p_j\big|_{\tau=0}=p_j^0, \tag{9.39}$$
$$j=1, \ldots, s+m, \qquad (p^0, q^0, \eta, \omega)\in\Omega_\varepsilon$$

seront appelées *bicaractéristiques* de l'opérateur $f\left(\overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{n}{A}_n, \overset{n+1}{B}\right)$.

Citons des exemples dans lesquels les hamiltoniens et les bicaractéristiques seront construits d'après le schéma développé.

Exemples. 1) Soit $A=\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$. Choisissons les opérateurs

$$A_k=-i\frac{\partial}{\partial x_k}, \qquad B_k=x_k \quad \text{et} \quad r=0.$$

Alors

$$A=f\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}\right)=-\sum_{i=1}^{n} a_i\left(\overset{2}{B}\right)\left(\overset{1}{A}_i\right)^2.$$

La représentation de l'opérateur A_k est l'opérateur $L_k = y_k - i\dfrac{\partial}{\partial x_k}$ et celle de l'opérateur B_k, l'opérateur de multiplication par α_k. On en déduit

$$f\left(\overset{1}{L}_1, \ldots, \overset{n}{L}_n, \overset{n+1}{\alpha}\right) = -\sum_{i=1}^{n} a_k\left(\overset{2}{\alpha}\right)\left(y_k - i\frac{\partial}{\partial \alpha_k}\right)^2$$

Si $\rho_i = 1$, $i = 1, \ldots, n$, la fonction de Hamilton s'écrit

$$H(p, q, \omega) = \sum_{k=1}^{n} a_k(q_1, \ldots, q_n)(\omega_k - p_k + p_{n+k})^2$$

Les solutions du système hamiltonien

$$\dot{p}_{n+j} = 0, \quad \dot{p}_j = \frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad \dot{q}_j = -\frac{\partial H}{\partial p_j}$$

avec les conditions initiales $q(0) = q_0$, $p(0) = p_0$, $\sum_{k=1}^{n} \omega_k^2 = 1$, $H(q_0, 0, \omega) = 0$ sont les bicaractéristiques de l'opérateur $f\left(\overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{n}{A}_n, \overset{n+1}{B}\right)$.

Signalons que les bicaractéristiques peuvent être déterminées également à partir du système hamiltonien ($j = 1, \ldots, n$)

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H_1}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H_1}{\partial q_j},$$

où $H_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i(q) p_i^2$ avec les conditions initiales $q(0) = q_0$ et $p(0) = p_0$. (Donc la définition ci-dessus est compatible avec celle des bicaractéristiques de l'équation des ondes donnée au § 8.)

2) Trouvons le hamiltonien et les bicaractéristiques de l'opérateur de Schrödinger

$$\mathscr{L} = -ih^{-1}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + h^{-2}v(x), \quad m = \text{const} > 0, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Posons

$$A_1 = -i\frac{\partial}{\partial t}, \quad A_2 = -i\frac{\partial}{\partial x}, \quad A_3 = \frac{1}{h}, \quad B_1 = t, \quad B_2 = x.$$

L'opérateur $\mathscr{L}$ peut alors être mis sous la forme

$$\mathscr{L} = A_1 A_3 + \frac{1}{2m} A_2^2 + v(B) A_3^2.$$

Les représentations ordonnées des opérateurs $\overset{1}{A}_1, \overset{2}{A}_2, \overset{3}{A}_3$ sont respectivement les opérateurs

$$L_1 = -i\frac{\partial}{\partial \alpha_1} + y_1, \quad L_2 = -i\frac{\partial}{\partial \alpha_2} + y_2, \quad L_3 = y_3.$$

Donc le hamiltonien de l'opérateur $\mathscr{L}$ est l'opérateur

$$\hat{\mathscr{L}} = y_3\left(-i\frac{\partial}{\partial \alpha_1} + y_1\right) + \frac{1}{2m}\left(-i\frac{\partial}{\partial \alpha_2} + y_2\right)^2 + y_3.$$

Pour $\rho_i = 1$ la fonction de Hamilton $\mathscr{H}$ de l'opérateur $\mathscr{L}$ est définie par la formule

$$\mathscr{H} = (\omega_3 + p_6)(\omega_1 + p_1 + p_4) + \frac{1}{2m}(\omega_2 + p_2 + p_5)^2 + (\omega_3 + p_6)^2 v(q_i).$$

Ceci étant les bicaractéristiques sont solutions du système d'équations correspondant à la fonction de Hamilton

$$H_1(p, q) = \frac{p^2}{2m} + v(q); \quad \dot{E} = 0, \quad \dot{t} = 0, \quad p = -v'(q), \quad \dot{q} = \frac{p}{m}$$

avec les conditions initiales

$$q(0) = \frac{q_0}{\omega_3}, \quad p_0 = \frac{\omega_2}{\omega_3}$$

et la liaison suivante entre ces systèmes d'équations

$$\frac{p_2 + \omega_2}{\omega_3} = p, \quad \frac{q_1}{\omega_3} = t, \quad \frac{q_2}{\omega_3} = q.$$

L'analyse des problèmes de physique montre que la quasi-inversibilité de l'opérateur est souvent rattachée à l'absorption des ondes de hautes fréquences. L'effet d'absorption peut être modulé par l'introduction d'un puissant potentiel d'absorption dans l'équation décrivant la propagation des ondes. La définition qui suit plus bas généralise le phénomène d'absorption signalé dans les problèmes de physique.

Définition. On dira que les conditions d'absorption sont remplies pour la fonction de Hamilton $\mathscr{H}(p, q, \omega, \eta)$ s'il existe des constantes $T > 0$ et $\varepsilon > 0$ et un nombre $\tau' = \tau'(q^0, \omega, p^0, \eta)$, $0 < \tau' < T$, tels que

(1) le problème (9.39) admette une solution pour $0 \leqslant \tau \leqslant \tau'$:

$$q(q^0, \omega, p^0, \eta, \tau), \quad p(q^0, \omega, p^0, \eta, \tau)$$

appartenant à $C_{\mathscr{L}}^{\infty}$

(2) la fonction

$$\operatorname{Im} \mathscr{H}(p(q^0, \omega, p^0, \eta, \tau), \quad q(q^0, \omega, p^0, \eta, \tau), \omega, \eta)$$

soit positive pour $0 \leqslant \tau \leqslant \tau'$ et $(q^0, \omega, p^0, \eta) \in \Omega_\varepsilon$ et strictement positive pour $\tau = \tau'$.

Les conditions d'absorption sont directement liées à la quasi-inversibilité de l'opérateur $f\left(\overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{n}{A}_n, \overset{n+1}{B}\right)$. Ce lien est mis en évidence par la proposition suivante.

Théorème 9.3 (de quasi-inversibilité). *Si $A_1, \ldots, A_n, B$ sont générateurs d'une algèbre de Lie nilpotente et si les conditions d'absorption sont remplies pour le hamiltonien de l'opérateur $f\left(\overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{n}{A}_n, \overset{n+1}{B}\right)$, alors l'opérateur $f\left(\overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{n}{A}_n, \overset{n+1}{B}\right)$ est quasi inversible.*

Ce théorème est la conséquence du théorème fondamental qui sera énoncé au numéro suivant. Considérons maintenant quelques exemples mettant directement en évidence le lien existant entre la réalisabilité des conditions d'absorption et la possibilité de construire une suite quasi inverse.

Exemple. Considérons l'équation

$$-i\frac{\partial u}{\partial t} + i\frac{\partial u}{\partial y} = 1$$

et posons

$$A_1 = -i\frac{\partial}{\partial t}, \quad A_2 = -i\frac{\partial}{\partial x}, \quad B_1 = t, \quad B_2 = y.$$

Dans les notations usuelles, cette équation s'écrit :

$$(A_1 - A_2)u = 1.$$

Construisons une suite quasi inverse pour l'opérateur $A_1 - A_2$.

Les représentations des opérateurs A_1 et A_2 sont respectivement les opérateurs

$$L_1 = x_1 - i\frac{\partial}{\partial \alpha_1}, \quad L_2 = x_2 - i\frac{\partial}{\partial \alpha_2}.$$

On en déduit que le hamiltonien de l'opérateur $A_1 - A_2$ est l'opérateur

$$f\left(\overset{1}{L}_1, \overset{2}{L}_2\right) = \left(x_1 - i\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\right) - \left(x_2 - i\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\right).$$

Si l'on admet que $\rho_i = 1$, alors

$$\pi(y, \eta, \alpha) = \pi(y) = (y_1 + y_3) - (y_2 + y_4)$$

et les conditions d'absorption ne sont pas remplies, puisque $\operatorname{Im} \pi(y) = 0$. Donc, à première vue, l'opérateur $A_1 - A_2$ n'admet pas de quasi inverse.

Mais cet opérateur peut être modifié de telle sorte qu'il satisfasse les conditions du théorème de quasi-inversibilité. A cet effet considérons l'opérateur

$$f\left(\overset{1}{A_1}, \overset{1}{A_2}, \overset{2}{B}\right) = A_1 - A_2 - i\varphi\left(\overset{2}{B}\right) \overset{1}{[\![} \sqrt{1 + A_1^2 + A_2^2}\,]\!],$$

où le symbole $\varphi(\alpha_1, \alpha_2)$ est une fonction différentiable bornée, nulle dans un domaine fermé Δ et strictement positive en dehors de ce domaine. Le domaine Δ doit nécessairement être choisi pour que les conditions d'absorption soient satisfaites.

Le hamiltonien de l'opérateur $f\left(\overset{1}{A_1}, \overset{1}{A_2}, \overset{2}{B}\right)$ est de toute évidence de la forme

$$f\left(\overset{1}{L_1}, \overset{1}{L_2}, \overset{2}{\alpha}\right) = \left(x_1 - i\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\right) - \left(x_2 - i\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\right) -$$

$$- i\varphi\left(\overset{2}{\alpha}\right) \overset{1}{\left[\!\left[} \sqrt{\left(x_1 - i\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\right)^2 + \left(x_2 - i\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\right)^2 + 1}\,\right]\!\right],$$

et par suite pour $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = 1$ on a

$$\pi(y, \alpha) = (y_1 + y_3) - (y_2 + y_4) - i\varphi(\alpha_1, \alpha_2) \sqrt{(y_1 + y_3)^2 + (y_2 + y_4)^2 + 1}\,.$$

En passant aux variables hamiltoniennes, on obtient la fonction de Hamilton $\mathscr{H}(p, q, \omega)$ de l'opérateur $f\left(\overset{1}{A_1}, \overset{1}{A_2}, \overset{2}{B}\right)$:

$$\mathscr{H}(p, q, \omega) = (\omega_1 - p_1 + p_3) - (\omega_2 - p_2 + p_4) -$$

$$- i\varphi(q_3, q_4) \sqrt{(\omega_1 - p_1 + p_3)^2 + (\omega_2 - p_2 + p_4)^2 + 1}\,.$$

Le domaine Ω_ε est défini par les relations

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = 1, \quad p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 0, \quad q_1^2 + q_2^2 < \varepsilon, \quad |\mathscr{H}(p, q, \omega)| < \varepsilon.$$

Les bicaractéristiques de l'opérateur $f\left(\overset{1}{A_1}, \overset{1}{A_2}, \overset{2}{B}\right)$ sont solutions du problème de Cauchy

$$\frac{dq_j}{d\tau} = \frac{\partial \operatorname{Re} \mathscr{H}}{\partial p_j}, \qquad q_j(0) = q_j^0,$$

$$\frac{dp_j}{d\tau} = -\frac{\partial \operatorname{Re} \mathscr{H}}{\partial q_j}, \qquad p_j(0) = p_j^0.$$

Les solutions de ce problème sont visiblement les fonctions

$$p_j = 0, \qquad j = 1, 2, 3, 4,$$

$$q_j = q_j^0, \qquad j = 1, 2,$$

$$q_3 = q_3^0 + \tau, \quad q_4 = q_4^0 - \tau.$$

D'où

$$\operatorname{Im} \mathscr{H}(p(q^0, \tau), q(q^0, \tau)) = -\varphi(q_3^0+\tau_1, q_4^0-\tau)(\omega_1^2+\omega_2^2+1)^{1/2},$$

donc les conditions d'absorption seront remplies si pour domaine Δ on prend l'ensemble

$$\Delta = \{(q_1, q_2) \in R^2 : 0 \leqslant q_1 \leqslant Q\}, \quad Q>0. \tag{9.40}$$

Observons que dans notre exemple les conditions d'absorption sont remplies moyennant une hypothèse plus forte, plus exactement, lorsque $(q^0, p^0) \in \Omega_{1\varepsilon}$, où le domaine $\Omega_{1\varepsilon}$ est défini par les relations

$$\omega_1^2+\omega_2^2=1, \quad p_i=0, \quad i=1, 2, 3, 4,$$
$$(q_3, q_4) \in R^2, \quad q_1^2+q_2^2<\varepsilon.$$

Passons maintenant à la construction du symbole de l'opérateur quasi inverse de $f\left(\overset{1}{A}_1, \overset{1}{A}_2, \overset{2}{B}\right)$ et montrons le rôle des conditions d'absorption dans la résolution de ce problème. Soit Δ l'ensemble (9.40). Alors φ peut être choisi indépendamment de α_2. Supposons que $\varphi(\alpha_1, \alpha_2) = \nu(\alpha_1)$ et de plus que

$$g\left(\overset{1}{A}_1, \overset{1}{A}_2, \overset{2}{B}\right) = A_1 - A_2 - i\nu\left(\overset{2}{B}_1\right) \overset{1}{[\![} \sqrt{1+A_1^2+A_2^2} \overset{1}{]\!]}.$$

Pour construire l'opérateur quasi inverse par réduction du problème fondamental, nous devons trouver une fonction $\Psi_N(x, \eta, \alpha, \tau)$ qui soit solution du problème suivant :

$$\left[\!\!\left[-i\frac{\partial}{\partial\tau} + g\left(\overset{1}{L}_1, \overset{1}{L}_2, \overset{2}{\alpha}\right)\right]\!\!\right] \Psi_N\left(\overset{1}{x}, -i\overset{2}{\frac{\partial}{\partial x}}, \alpha, \tau\right) \doteq$$

$$\doteq B_N\left(\overset{1}{x}, -i\overset{2}{\frac{\partial}{\partial x}}, \alpha, \tau\right), \tag{9.41}$$

$$\Psi_N\left(\overset{1}{x}, -i\overset{2}{\frac{\partial}{\partial x}}, \alpha, 0\right) = \rho\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

$$B_N(x, \eta, \alpha, \tau) \in O_{\mathscr{L}}(|x|^{-N}).$$

Comme de coutume, on cherchera la solution du problème (9.41) sous la forme

$$\Psi_N\left(\overset{1}{x}, -i\overset{2}{\frac{\partial}{\partial x}}, \alpha, \tau\right) = e^{-i\overset{1}{\Lambda} S\left(\overset{1}{x}, -i\overset{2}{\frac{\partial}{\partial x}}, \alpha, \tau\right)} \theta\left(\overset{1}{x}, -i\overset{2}{\frac{\partial}{\partial x}}, \alpha_1, \tau\right), \tag{9.42}$$

où $\Lambda = (x_1^2+x_2^2)^{1/2}$ et les fonctions S et θ vérifient les conditions initiales

$$S(x, \eta, \alpha, 0) = 0, \quad \theta_N(x, \eta, \alpha, 0) = \rho(\eta).$$

En portant l'expression (9.42) de Ψ_N dans l'équation (9.41) et en utilisant les formules de commutation, on est conduit à l'équation

$$e^{i\Lambda S\left(\overset{1}{x}_1-i\partial/\partial\overset{4}{x},\overset{4}{\alpha},\tau\right)}\left[\!\!\left[\overset{3}{\Lambda}\frac{\partial S}{\partial\tau}-i\frac{\partial}{\partial\tau}+x_1+\overset{1'}{\Lambda}\frac{\partial S}{\partial\alpha_1}-\overset{1'}{\Lambda}\frac{\partial S}{\partial\eta_1}-\right.\right.$$

$$-i\frac{\partial}{\partial\alpha_1}-x_2+\overset{1'}{\Lambda}\frac{\partial S}{\partial\eta_2}-\overset{1'}{\Lambda}\frac{\partial S}{\partial\alpha_2}-i\frac{\partial}{\partial\alpha_2}-i\nu(\alpha_1^2)\left[\left(x+\overset{1'}{\Lambda}\frac{\partial S}{\partial\alpha_1}-\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\overset{1'}{\Lambda}\frac{\partial S}{\partial\eta_1}-i\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\right)^2+\left(x_2+\overset{1'}{\Lambda}\frac{\partial S}{\partial\alpha_2}-\overset{1'}{\Lambda}\frac{\partial S}{\partial\eta_2}-i\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\right)^2+1\right]^{1/2}\right]\!\!\right]\theta_N=0.$$

Appliquons la K-formule pour ordonner les opérateurs dans $\overset{3}{[\![\ldots]\!]}$. On obtient

$$\overset{3}{[\![\ldots]\!]}=\overset{1}{\Lambda}\left\{\frac{\partial S}{\partial\tau}+\omega_1+\frac{\partial S}{\partial\alpha_1}-\frac{\partial S}{\partial\eta_1}-\omega_2-\frac{\partial S}{\partial\eta_2}-\frac{\partial S}{\partial\alpha_2}-i\nu(\alpha_1)\left[\left(\omega_1+\frac{\partial S}{\partial\alpha_1}-\frac{\partial S}{\partial\eta_1}\right)^2+\right.\right.$$

$$\left.+\left(\omega_2+\frac{\partial S}{\partial\alpha_2}-\frac{\partial S}{\partial\eta_2}\right)^2\right]^{1/2}+\sum_{k=0}^{N-1}\left(-i\overset{1}{\Lambda}^{-1}\right)^{k+1}R_k\Bigg\}\theta_N\left(\overset{1}{x},-i\frac{\overset{2}{\partial}}{\partial x},\alpha,\tau\right)+$$

$$+R_N\left(\overset{3}{x},-i\frac{\overset{2}{\partial}}{\partial x},\overset{1}{x},\alpha,\tau\right),$$

où $R_N(y,\eta,x,\alpha,t)=O_{\mathscr{E}}((|x|+|y|)^{-N})$ et R_k, $k=0,\ldots,N-1$, sont des opérateurs différentiels d'ordre $\leqslant k$ dont les coefficients sont des fonctions différentiables de x,α,τ. Supposons que $\omega_1=x_1\Lambda^{-1}$, $\omega_2=x_2\Lambda^{-1}$, $S_1=\operatorname{Re}S$, $S_2=\operatorname{Im}S$. En annulant les coefficients de Λ, on obtient l'équation

$$\frac{\partial S}{\partial\tau}+\omega_1+\frac{\partial S}{\partial\alpha_1}-\frac{\partial S}{\partial\eta_1}-\omega_2-\frac{\partial S}{\partial\alpha_2}-\frac{\partial S}{\partial\eta_2}-i\nu(\alpha_1)\left[\left(\omega_1+\frac{\partial S}{\partial\alpha_1}-\frac{\partial S}{\partial\eta_1}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\left(\omega_2+\frac{\partial S}{\partial\alpha_2}-\frac{\partial S}{\partial\eta_2}\right)^2+1\right]^{1/2}=0. \qquad (9.43)$$

L'équation (9.43) est une équation de Hamilton-Jacobi à dissipation dont la fonction de Hamilton $\mathscr{H}$ de l'opérateur $g\left(\overset{1}{A}_1,\overset{1}{A}_2,\overset{2}{B}\right)$ est :

$$\mathscr{H}(p,q,\omega)=(\omega_1-p_1+p_3)-(\omega_2-p_2+p_4)-$$

$$-i\nu(q_3)[(\omega_1-p_1+p_3)^2+(\omega_2-p_2+p_4)^2+1]^{1/2}.$$

Soit

$$D=-\int_0^{\tau}\operatorname{Im}\mathscr{H}\left(p\left(q^0,\tau'\right),q\left(q^0,\tau'\right),\omega\right)\Big|_{q^0=\varphi^0(\alpha,\tau)}d\tau'. \tag{9.44}$$

Au chapitre IV on montrera que la solution de l'équation (9.43) vérifie l'inégalité de dissipation

$$\operatorname{Im} S(x,\alpha,\tau)\geqslant\gamma D,$$

où γ est une constante.

A noter que pour $\tau=2Q+1=T$, il résulte de (9.44) que $D>0$. Donc, les conditions de dissipation sont remplies. Par ailleurs, la fonction

$$\Psi_N(x,\eta,\alpha,\tau)=e^{i\Lambda S(x,\eta,\alpha,\tau)}\theta_N(x,\eta,\alpha,\tau)$$

est justiciable de la majoration

$$\left|\Psi_N(x,\eta,\alpha,T)\right|\leqslant\text{const}\,e^{-S_1|x|}.$$

Donc la fonction

$$\varkappa_N(x,\alpha)=i\int_0^1\left(\left[\left[e^{i\Lambda S\left(\overset{1}{x},-i\frac{\partial}{\partial x},\alpha,\tau\right)}\theta_N\left(\overset{1}{x},-i\frac{\partial}{\partial x},\alpha,\tau\right)\right]\right]1(x)\right)d\tau$$

est, conformément à la méthode de réduction, le symbole de l'opérateur quasi inverse de l'opérateur $g\left(\overset{1}{A_1},\overset{1}{A_2},\overset{2}{B}\right)$.

Remarque. La construction du premier terme de la suite quasi inverse dans le cas général sera réalisée au quatrième chapitre, mais pour comprendre le fond du problème nous nous proposons d'effectuer cette construction dans un cas particulier. Supposons que sont remplies les conditions suivantes:

(1) La fonction de Hamilton H est une fonction homogène par rapport à p de degré k indépendante de ζ_n et de η.

(2) L'opérateur $f\left(\overset{1}{L_1},\ldots,\overset{n}{L_n},\overset{n+1}{\alpha}\right)$ est invariant par le changement suivant de l'ordre d'action des opérateurs: $1\to n+1$, $2\to n$, ..., $n+1\to 1$.

(3) Le jacobien $\dfrac{\partial q}{\partial q_0}\neq 0$ pour $t\in[0,T]$ et le jacobien $J(q_0,t)=\dfrac{d(q+z)}{dq_0}\neq 0$ dans un domaine. Ici z est solution du système d'équations linéaires appelées équations du germe

$$\dot z=i\tilde H_p(q,p)+\mathscr{H}_{pq}(q,p)z+\mathscr{H}_{pp}(q,p)\omega,$$

$$\dot\omega=-i\tilde H_q(q,p)-\mathscr{H}_{qq}(q,p)z-\mathscr{H}_{qq}(q,p)\omega,$$

avec les conditions initiales $z(0)=\omega(0)=0$, où q et p sont à leur tour solutions du système de Hamilton

$$\dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q}, \quad q|_{t=0}=q^0, \quad p|_{t=0}=p^0.$$

Construisons le symbole $g_1(y, \alpha)$, c'est-à-dire le premier terme de la suite quasi inverse. A noter que toutes les intégrales par rapport à t sont définies comme des intégrales le long des trajectoires du système de Hamilton. Soit

$$D=-\int_0^t \tilde{H}dt=-\int_0^t \tilde{H}(p(q^0, t'), \quad q(q_0, t'))dt'.$$

D'autre part,

$$\mu=\langle z, C^{-1}Bz\rangle,$$

où

$$C_{ij}=\frac{\partial(q_j+z_j)}{\partial q_i^0}; \quad B_{ij}=\frac{\partial(p_j+\omega_j)}{\partial q_i^0}.$$

Introduisons la fonction

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}\left[\langle p, H_p\rangle+\langle q, H_q\rangle-i\langle\tilde{H}_p, \omega\rangle-i\langle\tilde{H}_q, z\rangle+\frac{d}{dt}(\langle p, q\rangle-\langle\omega, z\rangle)\right]$$

et posons

$$\Phi(q^0, t)=\mu(q^0, t)+\int_0^t \mathscr{L}dt.$$

Les conditions d'absorption sont liées à une importante inégalité dite *inégalité de dissipation*

$$\operatorname{Im}\Phi\geqslant c_1 D-c_2 D^{3/2-\varepsilon} \tag{9.45}$$

qui est valable pour certains $c_1>0$, $c_2>0$, $\varepsilon>0$. Soit M un minorant des valeurs de c_2 pour lesquelles (9.45) a lieu. Alors

$$g_1(y_1, \ldots, y_n, \alpha)=i\int_0^T \frac{p(q_0)}{\sqrt{|J(q_0, t)|}} e^{i\{\Phi(q^0, t)+tMD^{3/2-\varepsilon}(q_0, t)\}}\Big|_{q^0=q^0(\alpha, y, t)} dt, \tag{9.46}$$

où $q^0(\alpha, y, t)$ est solution des équations algébriques

$$\begin{cases} q_i(q^0, t)=y_i, & 1\leqslant i\leqslant n, \\ q_i(q^0, t)=\alpha_i, & m+n\geqslant i>n, \end{cases}$$

et la fonction $p(q_0)$ est définie dans la remarque suivant le théorème fondamental.

Exemple. Considérons l'opérateur abstrait

$$\overset{1}{A}_1 - i\varphi\left(\overset{2}{B}\right)\overset{1}{A}_2$$

de symbole $y_1 - i\varphi(\alpha) y_2$, où

$$\varphi(\alpha) = 0 \quad \text{pour} \quad |\alpha| < T/2,$$
$$\varphi(\alpha) > 0 \quad \text{pour} \quad |\alpha| > T/2.$$

Si les opérateurs A_1, A_2, B commutent, il est évident que l'opérateur $\overset{1}{A}_1 - i\varphi\left(\overset{2}{B}\right)\overset{2}{A}_2$ n'est pas quasi inversible.

Supposons réalisées les relations de commutation suivantes :

$$[A_1, B] = i, \quad [A_2, A_1] = 0, \quad [A_2, B] = 0$$

et que le spectre de l'opérateur A_2 appartient à l'ensemble $]\delta, +\infty[$, où $\delta > 0$.

Supposons pour fixer les idées que $A_1 = -i\dfrac{\partial}{\partial x}$, $B = x$, $A_2 = k$, où k est une variable dont le domaine de variation est l'ensemble $]\delta, +\infty[$. Soit $P(x)$ une fonction à support compact égale à 1 sur un ensemble compact Ω. Considérons l'équation pour la fonction $u(x, k)$:

$$\left(\overset{1}{A}_1 - i\varphi\left(\overset{2}{B}\right)\overset{1}{A}_2\right) u(x, k) = p(B) F(x, k), \tag{9.47}$$

où $F(x, k)$ est une fonction connue vérifiant la condition

$$p(x) F(x, k) = F(x, k).$$

Le hamiltonien de l'opérateur $\overset{1}{A}_1 - i\varphi\left(\overset{2}{B}\right)\overset{1}{A}_2$ est l'opérateur

$$y_1 - i\frac{\partial}{\partial \alpha} - i\varphi(\alpha)|y_2|. \tag{9.48}$$

La fonction de Hamilton correspondant au hamiltonien (9.48) peut être mise sous la forme

$$\mathscr{H} = \omega_1 - p_1 + p_3 - i\varphi(q_1)|\omega_2 - p_2 + p_4|; \quad \omega_2 > 0.$$

Les systèmes d'équations de Hamilton et du germe s'écrivent ici :

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = 1, & \dot{q}_2 = \dot{q}_3 = \dot{q}_4 = 0; \quad q(0) = q^0, \\ \dot{p} = 0, & p(0) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \dot{z}_3 = 0, & \dot{z}_2 = \dot{z}_4 = -i\varphi(q_1); \quad z(0) = 0, \\ \dot{w}_1 = i\varphi'(q) w_2; & w_2 = w_3 = w_4 = 0; \quad w(0) = 0. \end{cases}$$

Effectuons les calculs nécessaires pour appliquer la formule (9.46). On a

$$\Phi(q_0, w, t) = -w_1 t + iw_2 \int_0^t \varphi(q_1^0 - \tau)\, d\tau. \tag{9.49}$$

On voit que $z(q^0, t)\equiv 0$. Donc $\mu(q^0, t)=0$. Calculons la dissipation D. Des définitions il résulte que

$$D(q^0, t)=-\int_0^t \tilde{H}dt=\omega_2\int_0^t \varphi(q^0+t)\,dt. \tag{9.50}$$

On voit sur (9.49), (9.50) que l'inégalité de dissipation sera réalisée pour $c_1=1$, $c_2=0$. Cherchons la solution de l'équation $q_3(q^0, t)=\alpha$. La résolution du système de Hamilton nous donne $q_3=q_3^0-t=\alpha$, d'où $q_3^0=\alpha-t$. Il est immédiat de voir que $J(q^0, t)=1$.

En portant les fonctions nécessaires dans (9.46), on trouve le symbole de l'opérateur qui est le premier membre de la suite quasi inverse

$$g_1(y, \alpha)=i\int_0^T e^{-iy_1 t-|y_2|\int_{\alpha-t}^{\alpha}\varphi(\xi)d\xi}p(\alpha-t)\,dt=$$

$$=i\int_0^{\infty} e^{-iy_1 t-|y_2|\int_{\alpha-t}^{\alpha}\varphi(\xi)d\xi}p(\alpha-t)\,dt+O(|y_2|^{-\infty}).$$

Faisons la substitution $\alpha-t=\beta$ dans l'intégrale du second membre

$$g_1(y, \alpha)=-i\int_{\alpha}^{-\infty} e^{-iy_1(\alpha-\beta)-y_2\int_{\beta}^{\alpha}\varphi(\xi)d\xi}p(\beta)\,d\beta=$$

$$=ie^{-iy_1\alpha-|y_2|\int_0^{\alpha}\varphi(\xi)d\xi}\int_{-\infty}^{\alpha} p(\beta)e^{iy_1\beta-|y_2|\int_{\beta}^{0}\varphi(\xi)d\xi}d\beta. \tag{9.51}$$

Le calcul du symbole $g_1(y, \alpha)$ à l'aide de la formule (9.51) nous a donné le premier terme de la suite quasi inverse:

$$g_1\left(\overset{1}{A}_1, \overset{1}{A}_2, \overset{2}{B}\right)F(x)=ie^{-k\int_0^x\varphi(\xi)d\xi}\int_{-\infty}^{x} e^{k\int_0^{\beta}\varphi(\xi)d\xi}F(\beta)\,d\beta+O(k^{-\infty}). \tag{9.52}$$

Il est immédiat de vérifier que le premier terme du second membre de (9.52) est la solution exacte de l'équation (9.47).

Dans cet exemple, le premier terme de la représentation asymptotique est donc confondu avec la solution exacte du problème.

Considérons la situation suivante: supposons que $F(x)=0$ pour $x<0$. Alors pour $0<x<T/2$, on déduit de (9.52) que

$$g_1\left(\overset{1}{A}_1, \overset{1}{A}_2, \overset{2}{B}\right)F(x)=i\int_0^x F(\beta)\,d\beta=u(x).$$

Donc, $u(x)$ est solution du problème

$$-i\frac{\partial u}{\partial x}=F(x), \qquad u|_{x=0}=0, \qquad 0\leqslant x<T/2.$$

Considérons encore un exemple, intéressant par le phénomène de «potentiel absorbant» sur la solution du problème primitif.

Exemple. Considérons l'opérateur des ondes

$$\hat{H}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c^2(x)\,\Delta.$$

Le système hamiltonien correspondant s'écrit

$$\begin{aligned}
&\dot{p}_4=0,\\
&\dot{p}=2c\nabla c|p|^2, \quad p_4^0=\pm c(x^0)|p^0|,\\
&\dot{t}=2p_4,\\
&\dot{x}=2pc^2(x), \quad (p_4^0)^2+|p^0|^2=1,
\end{aligned} \tag{9.53}$$

où $x=(x_1, x_2, x_3)$, $p=(p_1, p_2, p_3)$. Des équations (9.34) il s'ensuit que

$$(c^2(x^0)+1)|p^0|^2=1, \quad p_4^0=\sqrt{\frac{c^2(x^0)}{1+c^2(x^0)}}.$$

D'où

$$t=\pm 2\frac{|c(x^0)|}{1+|c(x^0)|}\tau+t_0.$$

Ajoutons à l'opérateur des ondes une partie imaginaire de la forme

$$i\tilde{H}=-i\varphi_1\binom{2}{t^2}\overset{1}{p^2}\varphi_2\binom{1}{p^2}, \quad p=i\nabla,$$

où $\varphi_{1,2}(t^2)=0$ pour $|t|\leqslant T$ et $\varphi_{1,2}(t^2)=\alpha>0$ pour $t=T+1$. La condition d'absorption de chaque trajectoire sera alors remplie, puisque $p^2\neq 0$ sur chaque trajectoire ainsi qu'il découle des équations (9.53).

Donc, l'opérateur $\hat{H}+i\tilde{H}$ est quasi inversible. Il est aisé de voir que la solution du problème

$$\left[\hat{H}+i\tilde{H}\binom{1}{p, t}\right]u=F(x, t),$$

où $F(x, t)$ est une fonction à support borné, ne dépend pas de la forme de $\varphi(t^2)$ pour $t^2<T^2$.

Donc, l'adjonction d'un terme absorbant à l'opérateur des ondes ne se répercute pas sur la solution du problème pour $t<T$ fini.

Remarque. L'adjonction du terme $i\varphi(x)p^2\varphi(p)$, où $\varphi(x)=0$ pour $|x|<M$ et $\varphi(x)=\alpha>0$ pour $|x|=M+1$, conduit aussi à la condition d'absorption de chaque trajectoire, puisque, en vertu des équations (9.53), $|x(x^0, \tau)|>M+1$ pour τ assez grand.

Fermons ce numéro en attirant l'attention sur le fait suivant: les conditions d'absorption ne seront pas remplies pour l'opérateur du second ordre

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2k\varphi(x)\frac{\partial}{\partial x}-k^2\varphi^2(x)=-\left(\frac{\partial}{\partial x}-k\varphi(x)\right)^2.$$

Il n'empêche que cet opérateur est quasi inversible. Ce qui plaide pour une généralisation possible du théorème de quasi-inversibilité. Au numéro suivant, nous formulerons un théorème fondamental qui, à défaut de fournir des conditions nécessaires de quasi-inversibilité, est une généralisation importante du théorème de quasi-inversibilité. C'est ainsi qu'en vertu du théorème fondamental, l'opérateur envisagé ci-dessus est quasi inversible.

4. Théorème fondamental. Dans ce numéro nous introduisons quelques notions nouvelles telles les algèbres de Poisson et leurs représentations asymptotiques, la notion de variété symplectique d'une algèbre de Poisson et de variété symplectique quantifiée. En nous plaçant sur le terrain de la géométrie différentielle nous pouvons, d'une part, donner une interprétation géométrique au problème fondamental et, de l'autre, appliquer les méthodes de géométrie différentielle à la résolution du problème de quasi-inversibilité.

Nous passerons sur les définitions de variété différentiable, fibré vectoriel, champ de vecteurs, forme différentielle, etc., les supposant connues du lecteur.

Soit N une variété différentiable de dimension n, et soit donné un homomorphisme différentiable $\Omega: T^*N \to TN$ de fibrés vectoriels au-dessus de N (c'est-à-dire que Ω envoie linéairement la fibre T_y^*N au-dessus d'un point $y \in N$ dans la fibre T_yN au-dessus du même point. On désignera par la même lettre l'homomorphisme induit des espaces des sections de ces fibrés.

Associons à une fonction arbitraire $f \in C^\infty(N)$ un champ de vecteurs sur N

$$Y_f = \Omega(df) \tag{9.54}$$

et définissons sur $C^\infty(N)$ l'opération bilinéaire

$$\{f, g\} \equiv \{f, g\}_\Omega = Y_f(g). \tag{9.55}$$

Définition. On dit qu'un espace $C^\infty(N)$ muni de l'opération bilinéaire (9.54) est une *algèbre de Poisson sur* N si pour toutes fonctions f, g, $h \in C^\infty(N)$ on a les relations:

$$\{f, g\} = -\{g, f\}; \qquad \{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0. \tag{9.56}$$

On désignera cette algèbre de Poisson par $P(N) \equiv P(N, \Omega)$.

Soient $(y_1, \ldots, y_n)$ des coordonnées locales dans un voisinage $U \subset N$. Dans les fibres T^*U et TU utilisons les coordonnées standards correspon-

dant à la décomposition par rapport aux bases duales $(dy_1, \ldots, dy_n)$ et $\left(\frac{d}{dy_1}, \ldots, \frac{d}{dy_n}\right)$ respectivement pour associer à l'application Ω la fonction matricielle $\|\Omega_{ik}(y)\|_1^n$ dans U.

Les conditions (9.56) sont équivalentes aux conditions suivantes en coordonnées locales:

$$\Omega_{ik}(y) = -\Omega_{ki}(y),$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\Omega_{ik}(y)\frac{\partial\Omega_{js}(y)}{\partial y_k}+\Omega_{jk}(y)\frac{\partial\Omega_{si}(y)}{\partial y_k}+\Omega_{sk}(y)\frac{\partial\Omega_{ij}(y)}{\partial y_k}\right]=0,$$

ce qu'on vérifie immédiatement.

On admettra dans la suite que les conditions (9.56) de la définition précédente sont remplies.

Définition. La fonction (9.55) s'appelle *crochet de Poisson* des fonctions f et g et le champ de vecteurs Y_f défini par (9.54), *champ de vecteurs eulérien* associé à la fonction f.

De façon générale, on dira qu'un champ de vecteurs Y est eulérien si localement il est représentable sous la forme Y_f.

Lemme 9.1. *Le crochet de Poisson et les champs de vecteurs eulériens sont doués des propriétés suivantes*:

$$Y_f\{g, h\} = \{Y_f g, h\} + \{g, Y_f h\}, \tag{9.57}$$

$$[Y_f, Y_g] \equiv Y_f Y_g - Y_g Y_f = Y_{\{f, g\}}, \tag{9.58}$$

$$\mathcal{L}_{Y_f}(\Omega) = 0, \tag{9.59}$$

où $\mathcal{L}_Y$ est la dérivée de Lie le long du champ de vecteurs Y. En coordonnées locales, le crochet de Poisson et les champs de vecteurs eulériens sont donnés par les formules:

$$Y_f = \sum_{i,k=1}^{n} \Omega_{ik}\frac{\partial f}{\partial y_k}\frac{\partial}{\partial y_i}, \tag{9.60}$$

$$\{f, g\} = \sum_{i,k=1}^{n} \Omega_{ik}\frac{\partial f}{\partial y_k}\frac{\partial g}{\partial y_i}. \tag{9.61}$$

Démonstration. Les égalités (9.60) et (9.61) découlent immédiatement des définitions, l'égalité (9.57) est réalisée en vertu de (9.54) et (9.56).

Pour prouver (9.58), considérons une fonction $h \in C^\infty(N)$. En lui appliquant le commutateur $[Y_f, Y_g]$ on obtient

$$[Y_f, Y_g]\, h = +\{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\} =$$

$$= -\{\{g, h\}, f\} - \{\{h, f\}, g\} = \{\{f, g\}, h\} = Y_{\{f, g\}}\, h$$

(on s'est servi de l'identité de Jacobi).

Prouvons (9.59). Soit φ_t le groupe local à un paramètre de difféomorphismes N engendré par le champ Y_f. Montrons que $\varphi_t^* \Omega = \Omega$. En effet, de (9.57) il s'ensuit que φ_t préserve le crochet de Poisson:

$$\varphi_t^* \{g, h\} = \{\varphi_t^* g, \varphi_t^* h\}.$$

Nous pouvons traiter Ω comme une section du fibré vectoriel $TN \otimes TN$, le crochet de Poisson prenant alors la forme

$$\{g, h\} = \langle \Omega, dg \otimes dh \rangle$$

(les crochets $\langle , \rangle$ désignent la convolution d'un champ tensoriel covariant et d'un champ tensoriel contravariant). Cette formule nous dit que l'invariance du crochet de Poisson entraîne celle de Ω. Ce qui prouve le lemme.

Un exemple bien connu d'algèbre de Poisson est l'algèbre de Poisson des fonctions définies sur une variété symplectique M. Une variété M est dite *symplectique* si une forme symplectique ω^2 est définie sur elle. Du théorème de Darboux il résulte qu'au voisinage de tout point $y \in M$, il existe un système de coordonnées locales dans lequel la forme symplectique ω^2 devient

$$\omega^2 = \sum_{j=1}^{n} dp_j \wedge dq_j = dp \wedge dq.$$

La forme symplectique ω^2 définit de toute évidence un isomorphisme linéaire d'espaces de champs de vecteurs $\mathcal{T}M$ et de 1-formes différentielles $\mathcal{T}^*M$ sur M envoyant un champ de vecteurs $Y \in \mathcal{T}M$ dans une 1-forme:

$$\alpha(Y) = Y \lrcorner \omega^2$$

(le fait que α est un isomorphisme résulte de la non-dégénérescence de la forme ω^2). Désignons par Ω: $\mathcal{T}^*M \to \mathcal{T}M$ l'application réciproque

$$\Omega = \alpha^{-1}.$$

Donc, on peut définir naturellement sur une variété symplectique une algèbre de Poisson d'application non dégénérée Ω. Réciproquement, supposons que l'application Ω: $\mathcal{T}^*M \to \mathcal{T}M$ qui définit une algèbre de Poisson est non dégénérée. Alors, la variété M est de dimension paire, orientable et on peut la munir d'une structure symplectique en posant

$$\omega^2(Y, X) = \Omega^{-1}(Y)(X).$$

Lemme 9.2. *Dans le système de coordonnées* $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ *un champ de vecteurs hamiltonien et le crochet de Poisson sont définis par les égalités suivantes:*

$$Y_f = \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p} \equiv \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial}{\partial q_j} - \frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial}{\partial p_j}\right), \tag{9.62}$$

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} \equiv \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial g}{\partial q_j} - \frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial g}{\partial p_j}\right). \tag{9.63}$$

Démonstration. En calculant $Y_f \lrcorner \omega^2$, où Y_f est défini par la formule (9.62), on obtient

$$Y_f \lrcorner \omega^2 = \sum_{j=1}^{n}(dq_j(Y_f) \wedge dp_j - dp_j(Y_f) \wedge dq_j) - \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial p_j}dp_j + \frac{\partial f}{\partial q_j}dq_j\right) = df,$$

c'est-à-dire qu'on est conduit à l'égalité (9.50). La formule (9.63) résulte de (9.62). Ce qui prouve le lemme.

On obtient d'importants exemples d'algèbres de Poisson en considérant des relations de commutation non linéaires avec un petit paramètre $h \to 0$.

Soit donné dans un espace vectoriel H (supposé en général hilbertien) un ensemble de n opérateurs $A_1 = A_1(h), \ldots, A_n = A_n(h)$ dépendant différentiablement d'un paramètre $h \in [0, 1]$ et vérifiant les relations de commutation:

$$\{A_j, A_k] = ih\Omega_{jk}(A), \quad j, k = 1, \ldots, n, \tag{9.64}$$

où $\Omega_{jk}(y_1, \ldots, y_n)$ sont des symboles donnés. Posons pour abréger

$$\Omega_{jk}(A) = \Omega_{jk}\left(\overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{n}{A}_n\right).$$

Faisons le changement de variables

$$z_1 = \varphi_1(y), \quad \ldots, z_n = \varphi_n(y)$$

et introduisons les opérateurs

$$B_1 = \varphi_1(A), \ldots, B_n = \varphi_n(A).$$

Alors

$$[B_j, B_k] = ih\sum_{r,s}\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y_r}\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_s}\Omega_{rs}\right)(A) + O(h^2) =$$

$$= ih\sum_{r,s}\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y_r}\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_s}\Omega_{rs}\right)(\varphi^{-1}(B)) + O(h^2)$$

(pour établir cette formule il suffit d'appliquer la formule de permutation des indices et la K-formule). De là il s'ensuit que par ce changement de variables les fonctions $\Omega_{jk}(y)$ se transforment comme un tenseur contravariant de rang 2. Il s'avère que les conditions (9.56) sont canoniques. Plus exactement, pour que

$$\{A_j, A_k\}+[A_k, A_j]=0,$$

il est naturel d'exiger que

$$\Omega_{jk}(y)+\Omega_{kj}(y)=0.$$

Les raisonnements précédents soulignent l'émergence naturelle des algèbres de Poisson en théorie asymptotique. Passons maintenant aux formulations exactes et aux discussions.

Supposons que sur une variété différentiable N évolue librement le groupe R_+ des nombres strictement positifs pour la multiplication et que l'espace quotient N/R_+ est muni d'une structure de variété différentiable compatible avec la projection $N\to N/R_+$. Supposons encore qu'est donné un morphisme différentiable de fibrés vectoriels $\Omega: T^*N\to TN$ qui transforme $C^\infty(N)$ en algèbre de Poisson. Posons quelques hypothèses.

Considérons dans $C^\infty(N)$ une sous-algèbre de Poisson $\mathscr{P}=\bigoplus_{k=-\infty}^{k=\infty}\mathscr{P}_k$ telle que les éléments $\mathscr{P}_k$ soient des fonctions homogènes de degré k pour de grands $t\in R_+$ et

$$\{\mathscr{P}_k, \mathscr{P}_l\}\subset\mathscr{P}_{k+l-1}, \qquad k, l\in Z.$$

Soit Λ_0 un opérateur fermé dans un espace hilbertien H.

Définition. On dira qu'une algèbre $\mathscr{L}(H_{\Lambda_0})$ d'opérateurs agissant dans l'échelle $\{H_{\Lambda_0}\}$ (cf. plus bas) est une *algèbre* Λ_0*-asymptotique* si elle est l'image de l'algèbre $\mathscr{P}$ par une application linéaire

$$\mu: \mathscr{P}\to\mathscr{L}(H_{\Lambda_0})$$

de telle sorte que soient remplies les conditions suivantes:

(a) Pour une fonction $\Psi\in\mathscr{P}_1$, on a

$$\Lambda_0=\mu\Psi.$$

(b) Si $f\in\mathscr{P}_k$, $g\in\mathscr{P}_l$, alors

$$[\mu(f), \mu(g)]=i\mu(\{f, g\})+O(\Lambda_0^{k+l-2}).$$

(c) Si $(x_1, \ldots, x_n): U\to R^n$ est un système de coordonnées sur un ensemble R_+-invariant $U\subset N$ et x_i une fonction homogène de degré ρ_i, $i=1, \ldots, n$, alors pour tout sous-ensemble ouvert R_+-invariant $U_1\subset U$, il existe des fonctions $\varphi_i\in\mathscr{P}_{\rho_i}$ de support dans U égales à x_i dans U_1 et des opérateurs hermitiens A_i, $i=1, \ldots, n$, tels que

$$A_i=\mu(\varphi_i)+\hat{O}(\Lambda_0^{\rho_i-1})$$

et pour toute fonction $f \in \mathscr{P}_n$ de support dans U_1

$$\mu(f) = (f \circ x^{-1})(A) + \hat{O}(\Lambda_0^{m-1})$$

(ici et plus haut la notation $B = \hat{O}(\Lambda_0^N)$ signifie que B est un opérateur continu de $H^s_{\Lambda_0}$ dans $H^{s-N}_{\Lambda_0}$ pour tous les $s \geqslant \max(N, O)$; $H^s_{\Lambda_0}$ désigne le domaine de définition de l'opérateur Λ_0^s, muni de la norme

$$\|u\|_s = \|u\|_{s-1} + \|\Lambda_0 u\|_{s-1};$$

pour $s=0$, on admet que $\|u\|_0 = \|u\|_H$.

Soient $\Omega^{(0)}_{jk}(x)$ les composantes du tenseur Ω dans le système de coordonnées $x_1, \ldots, x_n$. De la définition il résulte que toute fonction $\varphi \in \mathscr{P}_0$ de support dans U_1 est justiciable des relations de commutation

$$\varphi(A)[A_j, A_k] = (\varphi \Omega^{(0)}_{jk})(A) + \hat{O}(\Lambda_0^{p_j + p_k - 2}).$$

Dans la suite, on admettra qu'est remplie une condition plus forte: pour tout m naturel on a

$$[\mu(f), \mu(g)] = -i\mu(\{f, g\}) + \mu(r_m) + \hat{O}(\Lambda_0^{(k+l-2-m)}), \qquad (9.65)$$

où $r_m = r_m[f, g] \in \bigoplus_{j \leqslant k+l-2} \mathscr{P}_j$.

Définition. Si la condition (9.65) est remplie, on dira que μ est une *représentation asymptotique de l'algèbre de Poisson* $\mathscr{P}$.

La condition (9.65) exprime que l'espace des opérateurs de représentation de l'algèbre de Poisson est asymptotiquement fermé pour l'opération de commutation. Pour construire les opérateurs asymptotiquement réciproques, il faut étudier la structure de l'opération de multiplication dans cet espace. Faisons-le dans le cas élémentaire où la variété $N = \mathbf{R}^n$.

Soient $A_1, \ldots, A_n$ des opérateurs hermitiens dans l'espace H. Supposons réalisées les relations de commutation

$$[A_j, A_k] = i\Psi_{jk}\left(\overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{n}{A}_n\right),$$

où $\Psi_{jk}(y_1, \ldots, y_n)$ sont des symboles donnés $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_s)$-asymptotiquement quasi homogènes de degré m_{jk} par rapport aux variables $y = (y_1, \ldots, y_s)$, c'est-à-dire que

$$\Psi_{jk}(\lambda^{\rho_1} y_1, \ldots, \lambda^{\rho_s} y_s, y_{s+1}, \ldots, y_n) = \lambda^{m_{jk}} \Psi_{jk}(y_1, \ldots, y_n)$$

pour les grands $|y_1| + \ldots + |y_s|$, $\lambda \geqslant 1$. Pour la commodité on posera $\rho_{s+1} = \ldots = \rho_n = 0$. Supposons remplie la condition:

$$m_{jk} \leqslant \rho_j + \rho_k - 1. \qquad (9.66)$$

La condition (9.66) sera appelée *condition d'asymptoticité*.

En passant aux nouveaux opérateurs $B_1, \ldots, B_n$ définis par les formules

$$B_j = h^{\rho_j} A_j, \quad j = 1, \ldots, n, \qquad (9.67)$$

on obtient les relations de commutation :

$$[B_j, B_k] = ih\Psi_{jk}\left(\overset{1}{B}_1, \ldots, \overset{n}{B}_n, h\right),$$

où

$$\Psi_{jk}(y, h) = h^{\rho_j+\rho_k-m_{jk}}\Psi_{jk}(h^{-\rho_1}y_1, \ldots, h^{-\rho_s}y_s, y_{s+1}, \ldots, y_n)$$

est un symbole dépendant différentiablement d'un petit paramètre $h \in]0, 1]$ pour $|y_1| + \ldots + |y_k| \neq 0$. A partir de là on démontre sans peine que la représentation asymptotique par rapport au petit paramètre est équivalente par la substitution (9.67) à celle suivant les puissances de l'opérateur $\left(\sum_j A_j^{2/\rho_j}\right)^{1/2}$ dans les problèmes primitifs. Désignons les opérateurs B de nouveau par $A_j = A_j(h)$. Supposons maintenant qu'il existe des ensembles d'opérateurs

$$L_j = L_j\left(\overset{2}{\xi}, -ih\frac{\partial}{\partial \overset{1}{\xi}}, h\right) \quad \text{et} \quad R_j = R_j\left(\overset{2}{\xi}, -ih\frac{\partial}{\partial \overset{1}{\xi}}, h\right)$$

vérifiant sur un ensemble partout dense $D \subset H$ les relations

$$(L_j\varphi)(A) = A_j\varphi(A),$$
$$(R_j\varphi)(A) = \varphi(A)A_j$$

pour tout $\varphi \in S^\infty(\mathbf{R}^n)$. Supposons aussi que les symboles L_j, R_j sont différentiables, à croissance lente, réels pour $h = 0$ et

$$L_j(\xi, 0, 0) = R_j(\xi, 0, 0) = \xi_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Supposons que les opérateurs

$$\hat{L} = \left(\overset{1}{\hat{L}}_1, \ldots, \overset{n}{\hat{L}}_n\right) \quad \text{et} \quad \hat{R} = \left(\overset{1}{\hat{R}}_1, \ldots, \overset{n}{\hat{R}}_n\right)$$

satisfont les conditions de compatibilité ainsi que les relations de commutation

$$[\hat{L}_j, \hat{L}_k] = ih\Psi_{jk}(\hat{L}), \quad [\hat{R}_j, \hat{R}_k] = -ih\Psi_{jk}(R),$$
$$[\hat{R}_j, \hat{L}_k] = 0, \quad j, k = 1, \ldots, n. \tag{9.68}$$

Posons $l_j = L_j|_{h=0}$, $r_j = R_j|_{h=0}$.

Lemme 9.3. *Les symboles $l_j(\eta, X)$ et $r_j(\eta, X)$ sur $\mathbf{R}^n_\eta \times \mathbf{R}^n_X$ vérifient les relations*

$$\frac{\partial l_j}{\partial \eta}\frac{\partial l_k}{\partial X} - \frac{\partial l_k}{\partial \eta}\frac{\partial l_j}{\partial X} = \Psi^{(0)}_{jk}(l(\eta, X)),$$
$$\frac{\partial r_j}{\partial \eta}\frac{\partial r_k}{\partial X} - \frac{\partial r_k}{\partial \eta}\frac{\partial r_j}{\partial X} = -\Psi^{(0)}_{jk}(r(\eta, X)), \tag{9.69}$$
$$\frac{\partial l_j}{\partial \eta}\frac{\partial r_k}{\partial X} - \frac{\partial r_k}{\partial \eta}\frac{\partial l_j}{\partial X} = 0.$$

Démonstration. En portant $\hat{L}_j$ et $\hat{R}_j$ dans (9.68) et en se servant des formules de commutation classiques des opérateurs $1/h$-pseudo-différentiels, on obtient les formules (9.69) dans le terme principal en h.

Si donc les opérateurs de la représentation ordonnée existent, les termes principaux de leurs symboles vérifient (9.69). Réciproquement, si les équations (9.69) admettent une solution globale, alors moyennant des conditions subsidiaires cette solution nous donne les principaux symboles des opérateurs de la représentation ordonnée.

Explicitons les symboles $l(\eta, X)$ des opérateurs de la représentation ordonnée gauche. Pour chaque $k=1, \ldots, n$, désignons par $\Xi(\eta, t)\in\mathbf{R}^n$ la solution du problème de Cauchy

$$(\dot{\Xi}^{(k)})_s = \Psi_{ks}(\Xi^{(k)}),\ \Xi^{(k)}(\eta, t)\in\mathbf{R}^n, \qquad \Xi^{(n)}|_{t=0}=\eta.$$

Posons

$$\begin{aligned}&\Phi_n(\eta, X)=\eta_n,\\ &\Phi_j(\eta, X)=\Xi^{(j+1)}(\ldots\Xi^{(n)}(\eta, X_n), \ldots, X_{j+1})_j\end{aligned} \tag{9.70}$$

pour $1\leqslant j\leqslant n-1$.

Exercice. Prouver que le symbole principal $l(\eta, X)$ des opérateurs de la représentation ordonnée gauche est solution de l'équation fonctionnelle

$$\Phi(l, X)=\eta.$$

Les notions introduites ci-dessus permettent de reformuler le problème de quasi-inversibilité. Soient donnés une représentation Λ_0-asymptotique d'une algèbre de Poisson $\mathscr{P}$ dans un espace hilbertien H, et f un élément de $\mathscr{P}$.

Problème de quasi-inversibilité. Trouver dans l'espace H un opérateur G_N tel que les opérateurs

$$\mu(f)\circ G_{N-1}, \qquad G_N\circ\mu(f)-1$$

soient des opérateurs continus de $H^s_{\Lambda_0}$ dans $H^{s+N}_{\Lambda_0}$ pour $s=0, 1, \ldots, n$.

Ce problème sera appelé *problème de Λ_0-quasi-inversion* pour mettre en évidence l'opérateur dont on cherche le quasi inverse.

Avant de formuler le théorème fondamental il est nécessaire d'introduire encore deux notions : les notions de variété symplectique d'une algèbre de Poisson et de variété symplectique quantifiée.

Nous voulons en effet énoncer les conditions de quasi-inversibilité d'un opérateur évoluant dans l'espace de fonctions définies sur une variété. En se donnant des coordonnés locales, on peut représenter l'opérateur considéré comme un opérateur agissant sur des fonctions de variables. Mais un tel opérateur doit être invariant par un changement de coordonnés. Les conditions de quantification qui seront introduites plus bas sont en fait des conditions d'invariance.

Soit M une variété différentiable de dimension $2n$ sur laquelle est définie une forme symplectique ω^2. Soit un atlas canonique sur M:

$$\{U_\alpha;\ \gamma_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha \subset R^{2n}_{(q,p)}\}_{\alpha \in I}$$

tel que $\gamma_\alpha^*(dp \wedge dq) = \omega^2$ pour tous les $\alpha \in I$. Le théorème de Darboux affirme l'existence d'un tel atlas.

Sur l'intersection des cartes $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$ sont définies de façon naturelle les applications

$$g_{\alpha\beta} = \gamma_\alpha \circ \gamma_\beta^{-1} : V_{\beta\alpha} \to V_{\alpha\beta},$$

où

$$V_{\alpha\beta} = \gamma_\alpha(U_{\alpha\beta}), \qquad V_{\beta\alpha} = \gamma_\beta(U_{\alpha\beta}).$$

Des propriétés de l'atlas choisi il résulte que $g_{\alpha\beta}^*(dp \wedge dq) = dp' \wedge dq'$, où (p, q), (p', q') sont respectivement les coordonnées dans les cartes U_α et U_β.

Soit $\tilde{V}_{\beta\alpha}$ un voisinage simplement connexe de l'ensemble $V_{\beta\alpha}$. On admettra que la variété

$$\Gamma(y_{\alpha\beta}) = \{(q', p', q, p) \in \mathbf{R}^{2n} \times \mathbf{R}^{2n} \,|\, (q, p) = g_{\alpha\beta}(q', p'),\ (q', p') \in \tilde{V}_{\beta\alpha}\},$$

qui est le graphique de l'application canonique $g_{\alpha\beta}$ peut être définie par les équations

$$\begin{cases} p = \dfrac{\partial S_{\alpha\beta}}{\partial q}(q, q'), \\ p' = -\dfrac{\partial S_{\alpha\beta}}{\partial q'}(q, q'), \end{cases}$$

où $S(q', q)$ est la fonction génératrice de la variété $\Gamma(g_{\alpha\beta})$.

Sur la variété $\Gamma(g_{\alpha\beta})$ définissons l'opérateur canonique $K_{g_{\alpha\beta}}$ qui agit sur les fonctions $\varphi \in C_0^\infty(\Gamma(g_{\alpha\beta}))$ par la formule

$$[K_{g_{\alpha\beta}}\varphi](g', g, h) = e^{\frac{i}{h} S_{\alpha\beta}(q', q)} \varphi\left(q', -\frac{\partial S}{\partial q'}(q', q)\right) \left\{\det \frac{\partial^2 S}{\partial q\, \partial q'}\right\}^{-1/2}.$$

Associons maintenant à chaque application canonique $g_{\alpha\beta}$ un opérateur $T_{\alpha\beta}$ agissant sur l'espace des fonctions définies sur $\mathbf{R}^n \times [0, 1]$ de la manière suivante

$$[T_{\alpha\beta} f](g, h) = e^{-i\frac{\pi}{4}n} (2\pi h)^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^n} [K_{g_{\alpha\beta}}\varphi](q', q, h) f(q', h)\, dq'; \tag{9.71}$$

on admet que $\varphi(q', p') \equiv 1$ pour tous les $(q', p') \in V_{\beta\alpha}$, $\operatorname{supp} \varphi \subset \tilde{V}_{\beta\alpha}$.

Nous n'aborderons pas toutes les propriétés fondamentales des opérateurs $T_{\alpha\beta}$ définis par la formule (9.71), remettant leur étude au chapitre V. Notre but immédiat est d'établir une propriété algébrique de la correspondance $g_{\alpha\beta} \to T_{\alpha\beta}$. Si $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma = U_{\alpha\beta\gamma} = \varnothing$, il est évident que $g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\beta}$. Il

s'avère (ce qui sera démontré au chapitre V) qu'à $O(h)$ près

$$T_{\alpha\beta} \circ T_{\beta\gamma} = T_{\alpha\gamma} \exp\left\{ i \frac{\varepsilon^{(1)}_{\alpha\beta\gamma}}{h} + i\pi\varepsilon^{(2)}_{\alpha\beta\gamma} \right\}, \tag{9.72}$$

où $\varepsilon^{(1)}_{\alpha\beta\gamma}$ est un réel et $\varepsilon^{(2)}_{\alpha\beta\gamma}$ un entier.

On voit sur (9.71) et (9.72) que le changement de coordonnées dans l'intersection des cartes laisse invariant l'opérateur $T_{\alpha\gamma}$, que ce dernier soit calculé avec la formule (9.71) ou comme la composition $T_{\alpha\beta} \circ T_{\beta\gamma}$ si $\frac{\varepsilon^{(1)}_{\alpha\beta\gamma}}{h} + \pi\varepsilon^{(2)}_{\alpha\beta\gamma} = 2\pi k$. Cette condition sur le paramètre h permet de construire «correctement» les opérateurs $1/h$-différentiels sur une variété symplectique, c'est-à-dire invariants par un changement de coordonnées.

Définition. On dira que la condition de quantification est remplie sur (M, ω^2) si pour un $h \in]0, 1]$ on a

$$\frac{1}{\pi h} \varepsilon^{(1)}_{\alpha\beta\gamma} + \varepsilon^{(2)}_{\alpha\beta\gamma} \equiv 0 \pmod 2$$

pour tous α, β, γ tels que $U_{\alpha\beta\gamma} = \varnothing$. Appelons *variété symplectique quantifiée* la variété symplectique sur laquelle sont satisfaites les conditions de quantification.

Passons maintenant à la définition d'une variété symplectique d'une algèbre de Poisson.

Définition. Une variété symplectique (M, ω^2) s'appelle *variété symplectique d'une algèbre de Poisson* $\mathscr{P}(N)$ si sont réalisées les conditions suivantes :

(1) Il existe une application différentiable $l : M \to N$ de rang maximal préservant le crochet de Poisson.

(2) Il existe un atlas $\{U_\alpha\}$ de la variété M et un système d'applications canoniques $\varkappa_\alpha : U_\alpha \to T^*N$.

(3) Pour toute fonction réelle $f \in C_0^\infty(N)$, la fonction l^*f engendre un flot hamiltonien global sur (M, ω^2).

(4) Les opérateurs

$$\Lambda^\alpha_j = \lambda^\alpha_j \left(\overset{2}{q}, -ih \frac{\partial}{\partial \overset{1}{q}} \right),$$

où $\lambda^\alpha_j(q, p)$ sont les composantes de l'application $\lambda^\alpha = l_0 (\varkappa_\alpha)^{-1}$ dans les coordonnées locales sur T^*N, vérifient les relations de commutation

$$[\Lambda^\alpha_j, \Lambda^\alpha_k] = -ih \Psi_{jk} \left(\overset{1}{\Lambda^\alpha_1}, \ldots, \overset{n}{\Lambda^\alpha_n} \right),$$

où Ψ_{jk} sont des fonctions définies sur N dans les mêmes coordonnées locales.

(5) Pour tout symbole $g_h \in C_0^\infty(N)$ tel que $g_h = O(h^0)$

$$\Lambda^\alpha_j \cdot g_h \left(\overset{1}{\Lambda^\alpha_1}, \ldots, \overset{n}{\Lambda^\alpha_n} \right) = (\Lambda^\alpha_j g_h) \left(\overset{1}{\Lambda^\alpha_1}, \ldots, \overset{n}{\Lambda^\alpha_n} \right)$$

(6) La restriction de l'application $\varkappa_\beta \circ \varkappa_\alpha^{-1}$ à la section nulle T^*N est l'application identique.

De la condition (5) il s'ensuit que Λ_j^α sont des opérateurs asymptotiques de la représentation ordonnée gauche pour les relations de commutation définies par les fonctions Ψ_{jk}.

Soit μ une représentation d'une algèbre de Poisson $\mathscr{P}(N)$. Appelons *hamiltonien* de l'opérateur $P=\mu(p)$, $p\in\mathscr{P}(N)$, la fonction $H=l^*p$ *sur* M, *subhamiltonien*, la fonction $H_{\text{sub}}=l^*p_{\text{sub}}$, où p_{sub} est une fonction sur N telle que

$$\frac{p-p^*}{2i}=\mu(p_{\text{sub}})+R,$$

R est un opérateur d'ordre moindre par rapport à Λ_0 et p_{sub} est le symbole *subprincipal* de l'opérateur P.

Soit $\tilde{\lambda}=l^*\lambda$ et soit M une variété symplectique quantifiée d'une algèbre de Poisson.

Théorème fondamental. *Supposons remplies les conditions suivantes*:

a) *Le système hamiltonien sur* M *associé à* Re H *admet une solution* $z=z(z_0, t)$, $t\in[0, T]$, *vérifiant les conditions initiales* $z_0\in\Omega_\varepsilon\subset M$

$$\Omega_\varepsilon=\{z\in M\,|H|<\varepsilon,\quad |\lambda-1|<\varepsilon\},\quad \varepsilon>0.$$

b) *Sur cette solution* Im H *satisfait la condition*

$$\operatorname{Im} H(z(z_0, t), t)\leqslant 0.$$

c) *Pour* $t=T$

$$\operatorname{Im} H(z(z_0, T))<-\varepsilon.$$

d) *L'intégrale*

$$\int_0^t H_{\text{sub}}(z(z_0, t))\,dt,\quad t\in[0, T],$$

est uniformément bornée en $z_0\in\Omega_\varepsilon$.

e) *Les éléments* $\partial z_i/\partial z_{0j}$ *de la matrice de Jacobi* $\dfrac{\partial z(z_0, t)}{\partial z_0}$ *sont uniformément bornés en* $z\in\Omega_\varepsilon$.

Sous ces conditions l'opérateur $\mu(p)$ *est quasi inverse à droite et l'opérateur quasi inverse est de la forme*

$$\tilde{\mu}\int_0^T[K_{g(\tau)}\varphi](\tau)\,d\tau,$$

où $K_{g(\tau)}$ *est un opérateur canonique sur la famille des sous-variétés lagrangiennes de* M *associée au champ de vecteurs hamiltonien correspondant à l'opérateur* $\mu(p)$.

La démonstration de ce théorème sera donnée au chapitre VII.

CHAPITRE I

ESPACES ABSTRAITS

§ 1. Systèmes algébriques

Soit X un ensemble sur lequel est définie une *opération binaire*, c'est-à-dire une loi qui à tout couple (x_1, x_2) d'éléments x_1 et x_2 de X associe un seul élément x de X. Le résultat de cette opération est souvent noté $x_1 x_2$ et cette opération, appelée *multiplication*.

Définition. Un ensemble X sur lequel est définie une opération binaire $(x_1, x_2) \to x_1 x_2$ est muni d'une *structure de groupe* si sont réalisés les axiomes suivants:

1) cette opération est *associative*, c'est-à-dire $(xy)\,z = x\,(yz)$;

2) X possède un *élément neutre*, ou *unité*, c'est-à-dire un élément e tel que $xe = ex = x$ pour tout $x \in X$;

3) pour tout $x \in X$, il existe un élément inverse $x^{-1} \in X$ tel que $xx^{-1} = e$.

Des axiomes ci-dessus on déduit que l'élément unité est unique, que l'élément x^{-1} est lui aussi unique pour tout $x \in X$ et que $x^{-1}x = e$, d'où $(x^{-1})^{-1} = x$. Ces propriétés de l'élément x^{-1} entraînent que

$$(xz = yz) \Rightarrow (x = y); \qquad (zx = zy) \Rightarrow (x = y).$$

Un groupe est dit *commutatif*, ou *abélien*, si l'opération est commutative, c'est-à-dire si $xy = yx$ pour tous x, $y \in X$.

Dans le cas d'un groupe abélien, l'opération binaire est appelée *addition* et notée $x + y$. L'élément neutre est le zéro. L'élément x^{-1} est noté $-x$ et appelé *élément opposé* de x.

Supposons que le corps de base K est le corps $\mathbf{R}$ des réels ou le corps $\mathbf{C}$ des complexes.

Définition. Un groupe abélien E s'appelle *espace vectoriel* (sur le corps K) si pour tous $x \in X$ et $\alpha \in K$ le produit $\alpha x \in X$ est défini de façon unique, les axiomes suivants étant réalisés:

1) $(\alpha + \beta)\,x = \alpha x + \beta x$;

2) $\alpha\,(x + y) = \alpha x + \alpha y$;

3) $\alpha\,(\beta x) = (\alpha\beta)\,x$;

4) $1x = x$.

Un espace vectoriel est appelé *complexe* ou *réel* selon que le corps de base est $\mathbf{C}$ ou $\mathbf{R}$.

Des axiomes 1) à 4) il s'ensuit que $-x=(-1)x$ et $0x=0$. Dans la dernière égalité, le 0 du premier membre est un scalaire, tandis que celui du second est l'élément nul de E.

Les éléments d'un espace vectoriel sont appelés *vecteurs*. On dit que des vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ sont *linéairement indépendants* si

$$(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0) \Rightarrow (\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0).$$

Dans le cas contraire ces vecteurs sont dits *linéairement dépendants*. Si E contient n vecteurs linéairement indépendants mais $n+1$ quelconques de ses vecteurs sont linéairement dépendants, on dit que E est *de dimension n*. Si E contient un nombre arbitrairement grand de vecteurs linéairement indépendants, on dit qu'il est *de dimension infinie*. On appelle *base* d'un espace E de dimension n tout système $\{e_k\}$ de n vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ linéairement indépendants; tout vecteur $x \in E$ se représente de façon unique sous la forme

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \qquad \alpha_i \in K.$$

Un ensemble $L \subset E$ s'appelle *variété linéaire* de E si pour tous $\alpha, \beta \in K$

$$(x \in L \text{ et } y \in L) \Rightarrow (\alpha x + \beta y \in L).$$

Pour tout ensemble $F \subset E$ il existe une variété linéaire minimale $L(F) \subset E$ contenant F; cette variété est composée de tous les éléments de la forme $\Sigma \alpha_i x_i$, $x_i \in F$. L'ensemble $L(F)$ s'appelle *enveloppe linéaire* de l'ensemble F.

Un sous-ensemble C d'un espace vectoriel E s'appelle *ensemble convexe* si

$$(x_1 \in C \text{ et } x_2 \in C) \Rightarrow (\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2 \in C)$$

pour tout $\alpha \in [0, 1]$. Pour tout ensemble $F \subset E$ il existe un plus petit ensemble convexe contenant F, qui est composé de tous les éléments de la forme $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$, où $\alpha_k \geqslant 0$, $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$, $x_k \in F$, et appelé *enveloppe convexe* de l'ensemble F.

Soient $E_1, \ldots, E_n$ des espaces vectoriels sur un même corps K. On appelle *produit* de ces espaces l'ensemble de toutes les séquences $(x_1, \ldots, x_n)$, où $x_k \in E_k$; ce produit est désigné par $E_1 \times \ldots \times E_n$. Sur $E_1 \times \ldots \times E_n$ les opérations algébriques sont définies par les égalités

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n);$$
$$\alpha (x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n).$$

Définition. Un espace vectoriel A s'appelle *algèbre* (sur K) s'il est muni d'une opération binaire $(x, y) \to xy$ appelée *multiplication* et vérifiant les axiomes suivants:

A_1) elle est associative, c'est-à-dire que $(xy)z = x(yz)$;

A_2) elle est distributive pour l'addition, c'est-à-dire que $x(y+z) = xy + xz$; $(y+z)x = yx + zx$;

A_3) elle permute à la multiplication par des nombres, c'est-à-dire que $(\alpha x)(\beta y)=(\alpha\beta)(xy)$.

Une algèbre $\mathscr{A}$ est dite *unitaire* si sont réalisés les axiomes suivants :

A_4) il existe un élément $e\in A$ appelé *unité* tel que $ex=xe=x$ pour tout $x\in A$.

Une algèbre $\mathscr{A}$ est dite *abélienne* ou *commutative* si

A_5) la multiplication est commutative, c'est-à-dire que $xy=yx$ pour tous les $x, y\in A$.

En d'autres termes, le crochet de Lie $[x, y] \stackrel{\text{déf}}{=} xy-yx$ de deux éléments quelconques x, y de $\mathscr{A}$ est nul.

Exemple. Algèbre de séries entières formelles (de variables permutables). Soit M l'ensemble des suites $\{s_n\}_1^\infty$ à termes entiers positifs dont un nombre fini seulement sont non nuls. Supposons qu'à toute suite $s=\{s_n\}$ de M est associé un nombre α_s du corps K. Cette correspondance définit une *série entière formelle* à coefficients dans K, notée

$$\sum_{s\in M} \alpha_s \prod_{n=1}^{\infty} x_n^{s_n},$$

où $x_1, x_2, \ldots$ sont des variables.

Remarque. On omet généralement d'écrire les termes associés à $s_n=0$ dans le produit $\prod_{n=1}^{\infty} x_n^{s_n}$.

Les séries entières formelles sont additionnées, multipliées par un scalaire et multipliées entre elles de la manière suivante :

$$\left(\sum_{s\in M} \alpha_s \prod_{n=1}^{\infty} x_n^{s_n}\right)+\left(\sum_{s\in M} \beta_s \prod_{n=1}^{\infty} x_n^{s_n}\right) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{s\in M} (\alpha_s+\beta_s) \prod_{n=1}^{\infty} x_n^{s_n};$$

$$\beta \sum_{s\in M} \alpha_s \prod_{n=1}^{\infty} x_n^{s_n} \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{s\in M} \beta\alpha_s \prod_{n=1}^{\infty} x_n^{s_n}, \qquad \beta\in K;$$

$$\left(\sum_{s\in M} \alpha_s \prod_{n=1}^{\infty} x_n^{s_n}\right)\left(\sum_{s\in M} \beta_s \prod_{n=1}^{\infty} x_n^{s_n}\right) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{s\in M} \gamma_s \prod_{n=1}^{\infty} x_n^{s_n},$$

où

$$\gamma_s=\sum_{s', s''} \alpha_{s'} \beta_{s''},$$

la sommation dans la dernière formule étant étendue à des couples de suites $s'=\{s'_n\}$, $s''=\{s''_n\}$, vérifiant la condition $s'_n+s''_n=s_n$ pour tout entier naturel n. A noter que même si γ_s est représenté par une somme infinie, seul un nombre fini de termes de cette somme est non nul.

On laisse au lecteur le soin de vérifier que l'ensemble de toutes les séries entières formelles à coefficients dans K muni des opérations d'addition, de multiplication des séries entre elles et par un nombre est une algèbre unitaire commutative.

Définition. Soit $\mathscr{A}$ une algèbre. On dit qu'une variété linéaire $\mathscr{I}$ de $\mathscr{A}$ est un *idéal à gauche* (resp. *à droite*) de l'algèbre $\mathscr{A}$ si $xv \in \mathscr{I}$ (resp. $vx \in \mathscr{I}$) pour tous $x \in \mathscr{A}$ et $v \in \mathscr{I}$.

Dans une algèbre commutative il y a équivalence entre idéal à droite et idéal à gauche.

Les groupes, espaces vectoriels et algèbres sont des exemples de systèmes algébriques. On appelle *système algébrique* (sur un corps K) un ensemble X muni de *lois de composition internes* (d'opérations binaires sur X):

$$(x, y) \to x \perp y, \quad (x, y) \to x \top y, \ldots$$

et de *lois de composition externes* (d'applications $K \times X \to X$):

$$(\alpha, x) \to \alpha \circ x, \quad (\alpha, x) \to \alpha \bullet x, \ldots$$

Soient X et Y deux systèmes algébriques munis d'ensembles N_X et N_Y de lois de composition internes et d'ensembles M_X et M_Y de lois de composition externes. On dit que les systèmes X et Y sont *de même type* si l'on a les bijections $M_X \leftrightarrow M_Y$, $N_X \leftrightarrow N_Y$.

Définition. Soient X et X' deux systèmes algébriques de même type. On dit qu'une application $A : x \to Ax$ de X dans X' est un homomorphisme si

$$A(x \perp y) = (Ax) \perp (Ay), \quad A(x \top y) = (Ax) \top (Ay), \ldots,$$
$$A(\alpha \circ x) = \alpha \circ (Ax), \quad A(\alpha \bullet x) = \alpha \bullet (Ax), \ldots$$

Soit X un système algébrique muni des lois de composition internes $\perp$, $\top, \ldots$ et des lois de composition externes $\circ$, $\bullet, \ldots$ Soit $Y \subset X$ un sous-ensemble tel que

$$x \perp y \in Y, \quad x \top y \in Y, \ldots \quad \alpha \circ X \in Y, \quad \alpha \bullet x \in Y$$

pour tous $x, y \in Y$ et $\alpha \in K$. Les lois $\perp, \top, \ldots, \circ, \bullet, \ldots$ *induisent* sur Y des lois de composition $\perp', \top', \ldots, \circ', \bullet', \ldots$ telles que

$$x \perp' y = x \perp y, \quad x \top' y = x \top y, \ldots, \quad \alpha \circ' x = \alpha \circ x, \quad \alpha \bullet' x = \alpha \bullet x, \ldots$$

Le sous-ensemble Y est un système algébrique de même type que X pour ces lois induites. On dit que Y est un *sous-système* de X. Par exemple, une variété linéaire L d'un espace vectoriel E est un espace vectoriel pour les opérations d'addition et de multiplication par un nombre, induites de E. Munie de cette structure, L est un *sous-espace* de E.

Les symboles $\perp$, $\top$, $\circ$, $\bullet$ représentent les lois de composition respectivement dans X et X'. On appelle *isomorphisme* un homomorphisme bijectif de X sur X'.

Des systèmes algébriques X et X' sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme $X \to X'$. Les systèmes algébriques isomorphes sont généralement identifiés s'ils ne sont considérés que du point de vue de leurs propriétés algébriques, c'est-à-dire des propriétés liées aux lois de composition.

§ 2. Espaces de Banach

Définition. Une fonction réelle $x \to \|x\|$ définie sur un espace vectoriel E est une *norme* si elle satisfait les axiomes suivants:

$N_1)$ $\|x\| \geqslant 0$; $\quad (\|x\| = 0) \Leftrightarrow (x = 0)$;

$N_2)$ $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$;

$N_3)$ $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Un espace vectoriel muni d'une norme s'appelle *espace (vectoriel)* normé.

Dans tout espace normé B, on peut définir une *distance* $\rho(x, y)$ entre des éléments x, $y \in B$ comme suit:

$$\rho(x, y) = \|x - y\|.$$

Des axiomes de l'espace normé il résulte que la distance ρ vérifie les conditions suivantes:

$R_1)$ $\rho(x, y) \geqslant 0$; $\quad (\rho(x, y) = 0) \Leftrightarrow (x = y)$;

$R_2)$ $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

$R_3)$ $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

On dit qu'un ensemble R est un *espace métrique* si à tout couple x, $y \in R$ est associé un nombre $\rho(x, y)$ satisfaisant les axiomes R_1, R_2, R_3.

Ainsi, les espaces normés peuvent être traités comme des cas particuliers d'espaces métriques. On dit qu'une suite $\{x_n\} \subset R$ *converge* vers un élément $x \in R$ si $\lim\limits_{n \to \infty} \rho(x, x_n) = 0$. Cet élément est unique s'il existe. Une suite $\{x_n\} \subset R$ est *fondamentale* ou de *Cauchy* si $\lim\limits_{n, m \to \infty} \rho(x_n, x_m) = 0$. Toute suite convergente est visiblement de Cauchy. La réciproque est généralement fausse. Si toute suite de Cauchy converge, l'espace R est dit *complet*. On appelle *espace de Banach* un espace normé complet.

Citons brièvement quelques faits fondamentaux sur les espaces métriques (faits qui sont accessibles dans tout manuel d'analyse fonctionnelle suffisamment complet).

On appelle *boule* (ouverte) de R l'ensemble $S(x_0, r) = \{x \in R: \rho(x_0, x) < r\}$. Le point x_0 est le centre et $r > 0$, le rayon de la boule. Un ensemble $X \subset R$ est un *ouvert* si pour tout point $x_0 \in X$ il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $S(x_0, \varepsilon) \subset X$. La réunion de toute famille d'ouverts est un ouvert. Un ensemble Y complémentaire d'un ouvert est *fermé*. Cet ensemble est caractérisé par la propriété suivante: si $x_k \in Y$ et $x_k \to x$ (c'est-à-dire que $\rho(x_k, x) \to 0$), alors $x \in Y$. L'intersection de toute famille d'ensembles fermés est un fermé. En particulier, le plus petit ensemble fermé contenant un ensemble $A \subset R$ est un ensemble appelé *adhérence* de A et noté $\overline{A}$.

On appelle *boule fermée* de rayon $r \geqslant 0$ et de centre x_0 l'ensemble $\{x \in R: \rho(x, x_0) \leqslant r\}$. La boule fermée est un ensemble fermé; elle contient

l'adhérence de la boule $S(x_0, r)$ (mais elle peut être plus large, notamment lorsque l'espace R ne contient qu'un nombre fini de points).

La propriété de l'espace R d'être complet peut être caractérisée adéquatement en termes de boules fermées : *l'espace R est complet si et seulement si l'intersection de toute suite de boules fermées emboîtées $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$ dont les rayons tendent vers 0 n'est pas vide* (est visiblement composée d'un seul point qui est commun à toutes ces boules). La condition que les rayons tendent vers 0 (lorsque l'espace est complet), condition qui est essentielle pour les espaces métriques, peut être omise dans le cas d'espaces de Banach. Du critère de complétude on déduit l'important *théorème de Baire : si un espace métrique complet R se représente par une réunion dénombrable d'ensembles fermés, l'un au moins de ces ensembles contient entièrement une boule $S(x_0, r)$*.

Un espace métrique R est dit *compact* si de toute suite $\{x_n\}$ on peut extraire une suite partielle de Cauchy $\{x_{n_k}\}$.

Dans les espaces euclidiens de dimension finie, les ensembles bornés et eux seuls forment des sous-espaces compacts (pour la métrique induite). Si dans un espace normé la boule $\{x : \|x\| < 1\}$ est compacte, cet espace est de dimension finie et réciproquement. Pour qu'un espace R soit compact, il est nécessaire et suffisant qu'existe un ε-*réseau* fini pour tout $\varepsilon > 0$, c'est-à-dire une collection finie d'éléments $x_1, \ldots, x_N \in R$, où $N = N(\varepsilon)$, tel que la réunion des boules $S(x_i, \varepsilon)$ contienne R tout entier (on dit encore soit un *recouvrement* de R). Un espace compact complet R s'appelle un *compact*. Pour qu'un espace R soit un compact, il est nécessaire et suffisant que de tout recouvrement de R par des boules ou des ensembles ouverts (d'un recouvrement ouvert) on puisse extraire un sous-système fini formant aussi un recouvrement.

Revenons aux espaces normés. Soient a et b deux points d'un espace vectoriel B. On appelle *segment* $[a, b]$ l'ensemble des points $x \in B$ tels que $at + (1-t)b$, où $t \in [0, 1]$. Un ensemble $Y \subset B$ est *convexe* si de $a, b \in Y$ il s'ensuit que $[a, b] \subset Y$. Un ensemble $Y \subset B$ est *symétrique* (par rapport à un point 0) si $a \in Y$ entraîne $(-a) \in Y$. Un ensemble Y d'un espace B sur le corps $\mathbf{C}$ est *arrondi* si de $a \in Y$ et $|\lambda| = 1$ il résulte que $\lambda a \in Y$. Il est clair que tout ensemble arrondi est symétrique. Un ensemble $Y \subset B$ est *absorbant* si pour tout $a \in B$, il existe un $\lambda \neq 0$ tel que $\lambda a \in Y$. Il est clair que toute boule $\|x\| < r$ d'un espace normé B est un ensemble arrondi, convexe et absorbant.

Un ensemble $Y \subset B$ est un *tonneau* s'il est fermé, convexe, arrondi (symétrique dans le cas réel) et absorbant. Toute boule *fermée* $\|x\| \leqslant r$ est un tonneau.

Le lemme suivant est un outil assez efficace pour la démonstration de divers théorèmes relatifs aux espaces de Banach.

Lemme 2.1 (lemme du tonneau). *Tout tonneau Y d'un espace de Banach B contient une boule $\|x\| < r$.*

Démonstration. Posons $Y_N=\{x\in B: x=Ny, y\in Y\}$. Puisque $0\in Y$ et que Y est convexe, arrondi et absorbant, il vient $\bigcup_{N=1}^{\infty} Y_N=B$. Chaque ensemble Y_N est fermé (avec Y). Comme B est complet, le théorème de Baire nous dit qu'un ensemble Y_N contient une boule $\{x: \|x-x_0\|<R\}$. L'ensemble Y_N contient une boule $\|x\|<R$, puisqu'il est convexe et arrondi. Donc, Y contient la boule $\|x\|<r=R/N$. C.Q.F.D.

Les faits précédents montrent déjà toute l'importance de la complétude d'un espace (ceci ressort du reste de l'exemple élémentaire des nombres réels). Nous aurons l'occasion de nous en convaincre à maintes reprises. Il s'avère qu'il existe un procédé canonique de complétion des espaces métriques. Nous allons le décrire en détail car c'est un moyen de banachiser un espace normé.

Soit E un espace normé. On dira que des suites de Cauchy $\{\varphi_n\}$ et $\{\tilde{\varphi}_n\}$ de E sont *équivalentes* si

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n-\tilde{\varphi}_n\|=0.$$

Partageons l'ensemble des suites de Cauchy de E en classes de suites équivalentes. Appelons $\overline{E}$ cet ensemble de classes.

Munissons $\overline{E}$ d'une structure d'espace normé. Soient $\Phi\in\overline{E}$, $\Psi\in\overline{E}$ et soient α et β des nombres complexes. On appellera *combinaison linéaire* $\alpha\Phi+\beta\Psi$ *des classes* Φ et Ψ la classe $\mathfrak{X}$ de toutes les suites équivalentes à la suite $\{\alpha\varphi_n+\beta\psi_n\}$, où $\{\varphi_n\}\in\Phi$, $\{\psi_n\}\in\Psi$. Il est immédiat de vérifier que la suite $\{\alpha\varphi_n+\beta\psi_n\}$ est de Cauchy et que la classe $\mathfrak{X}$ ne dépend pas du choix des suites $\{\varphi_n\}$ et $\{\psi_n\}$ de Φ et de Ψ respectivement.

Soient $\Phi\in\overline{E}$ et $\{\varphi_n\}\in\Phi$. Convenons de prendre pour *norme de la classe* Φ le nombre

$$\|\Phi\|=\lim_{n\to\infty}\|\varphi_n\|. \tag{2.1}$$

Cette limite existe toujours, puisque l'inégalité

$$\big|\|\varphi_n\|-\|\varphi_m\|\big|\leqslant\|\varphi_n-\varphi_m\|, \tag{2.2}$$

qui résulte de l'axiome N_3, entraîne que la suite $\{\|\varphi_n\|\}$ est de Cauchy. Il est immédiat de vérifier la validité de cette définition, c'est-à-dire son indépendance par rapport au choix du représentant de la classe Φ, et le fait que la norme (2.1) satisfait les axiomes N_1, N_2 et N_3.

On dit qu'une suite $\{\varphi_n\}$ est *stationnaire* si

$$(\exists N)\,(\forall i,j>N):(\varphi_i=\varphi_j).$$

Définition. Soient E et F des espaces normés, et soit $A:E\to F$ un isomorphisme. On dit que A est un *isomorphisme isométrique* si $\|Ax\|=\|x\|$ pour tout $x\in E$.

Définition. Soit E un espace normé. On dit qu'un ensemble $M \subset E$ est dense dans E si pour tout $x \in E$ il existe une suite $\{m_n\}$ d'éléments de M telle que

$$\lim_{n \to \infty} m_n = x.$$

Soient B un espace de Banach et M un ensemble dense dans B. Pour prouver qu'un ensemble M' est dense dans B, il suffit de s'assurer que pour tout $m \in M$, il existe une suite $\{m'_i\}$ d'éléments de M' convergeant vers m.

Théorème 2.1. *Soit E un espace normé et soit $\overline{E}$ l'espace des classes des suites (de Cauchy) équivalentes. Alors $\overline{E}$ est un espace de Banach et la variété linéaire $E' \subset \overline{E}$ des classes d'équivalence des suites stationnaires est isométriquement isomorphe à E et dense dans $\overline{E}$.*

Démonstration. Pour prouver la complétude de l'espace $\overline{E}$, considérons une suite de Cauchy $\{\Phi_j\}$ de classes $\{\Phi_j\} \in \overline{E}$ et montrons qu'elle converge vers une suite $\Phi \in \overline{E}$. Pour tout entier naturel j, choisissons une suite $\{\varphi_n^{(j)}\} \in \Phi_j$. Pour tout k, on peut exhiber un nombre n_k tel que pour tous les $m > n_k$, l'on ait

$$\|\varphi_m^{(k)} - \varphi_{n_k}^{(k)}\| \leqslant k^{-1}. \tag{2.3}$$

Soit une classe Φ de suites équivalentes à la suite $\{\varphi_{n_k}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$.

Montrons que cette suite est de Cauchy (c'est-à-dire que $\Phi \subset \overline{E}$) et que

$$\lim_{j \to \infty} \|\Phi_j - \Phi\| = 0.$$

A cet effet, désignons par $\Phi^{(k)}$ la classe qui contient la suite stationnaire $\{\varphi_{n_k}^{(k)}, \varphi_{n_k}^{(k)}, \ldots\}$. Par définition de la norme dans $\overline{E}$, on a $\overline{E}$ $\|\Phi_k - \Phi^{(k)}\| \stackrel{\text{déf}}{=} \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{m \to \infty} \|\varphi_m^{(k)} - \varphi_{n_k}^{(k)}\|$. De (2.3) il vient

$$\|\Phi_k - \Phi^{(k)}\| \leqslant k^{-1} \tag{2.4}$$

Donc, pour i, j fixes

$$\begin{aligned} \|\varphi_{n_i}^{(j)} - \varphi_{n_j}^{(j)}\| = \|\Phi^{(i)} - \Phi^{(j)}\| \leqslant \\ \leqslant \|\Phi^{(i)} - \Phi_i\| + \|\Phi_i - \Phi_j\| + \|\Phi_j - \Phi^{(j)}\| \leqslant \\ \leqslant i^{-1} + \|\Phi_i - \Phi_j\| + j^{-1} \to 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

lorsque $i, j \to \infty$, puisque la suite $\{\Phi_i\}$ est de Cauchy. Donc, la suite $\{\varphi_{n_k}^{(k)}\}$ est de Cauchy, c'est-à-dire que $\Phi \in \overline{E}$. Montrons maintenant que la suite $\{\Phi_j\}$ converge vers Φ. L'inégalité (2.4) entraîne

$$\|\Phi - \Phi_k\| \leqslant \|\Phi - \Phi^{(k)}\| + \|\Phi^{(k)} - \Phi_k\| \leqslant \|\Phi - \Phi^{(k)}\| + k^{-1}. \tag{2.6}$$

La suite $\{\varphi_{n_k}^{(k)}\}$ étant de Cauchy, il en résulte que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $p_0(\varepsilon, k)$ tel que pour $p > p_0(\varepsilon, k)$

$$\|\Phi - \Phi^{(k)}\| = \lim_{p\to\infty} \|\varphi_{n_p}^{(p)} - \varphi_{n_k}^{(k)}\| \leqslant \|\varphi_{n_p}^{(p)} - \varphi_{n_k}^{(k)}\| + \varepsilon,$$

et de (2.5) il s'ensuit que

$$\|\Phi - \Phi^{(k)}\| \leqslant p^{-1} + k^{-1} + \|\Phi_p - \Phi_k\| + \varepsilon. \tag{2.7}$$

Or la suite $\{\Phi_j\}$ est de Cauchy, donc les inégalités (2.6) et (2.7) entraînent

$$\lim_{k\to\infty} \|\Phi - \Phi_k\| = 0.$$

Ce qui prouve que $\overline{E}$ est complet.

Les raisonnements précédents nous disent que si $\Phi \in \overline{E}$, il existe une suite $\{\Phi^{(k)}\}$ d'éléments de E' convergeant vers Φ. Donc, E' est dense dans $\overline{E}$. C.Q.F.D.

La restriction de l'application $\Phi \to \|\Phi\|$ à E' définit une norme sur E' qui fait de ce dernier un espace normé. L'application de E sur E' qui à tout élément $\varphi \in E$ associe la classe qui contient la suite stationnaire $\varphi, \varphi, \ldots$ est visiblement un isomorphisme isométrique. Cet isomorphisme permet d'identifier les éléments de E' et de E, c'est-à-dire de considérer E comme une partie de $\overline{E}$.

L'espace $\overline{E}$ s'appelle *complété* de l'espace E.

Exemple. Soit Ω un domaine fermé de $\mathbf{R}^n$. Désignons par $\tilde{L}_2(\Omega)$ l'espace normé des fonctions complexes continues sur Ω telles que

$$\int_\Omega |f(x)|^2\, dx < \infty$$

(l'addition de ces fonctions et leur multiplication par des nombres complexes sont définies de façon naturelle). L'espace $\tilde{L}_2(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|f\|_{\tilde{L}_2} = \{\int_\Omega |f(x)|^2\, dx\}^{1/2}.$$

Il est immédiat de s'assurer que l'espace $\tilde{L}_2(\Omega)$ n'est pas complet. Désignons son complété par $L_2(\Omega)$. Les éléments de l'espace $L_2(\Omega)$ seront appelés *fonctions de carré intégrable* sur Ω. A noter que les éléments $\varphi \in L_2(\Omega)$ ne sont pas à proprement parler des fonctions, c'est-à-dire que si $\varphi \notin \tilde{L}_2(\Omega)$, l'application $\varphi\colon x \to \varphi(x)$, $x \in \Omega$, $\varphi(x) \in \mathbf{R}$, peut ne pas exister.

Soient B un espace de Banach et L une variété linéaire dense dans B. L'espace L est un espace normé. Le complété de cet espace est isométriquement isomorphe à B. On laisse au lecteur le soin de prouver ce fait.

Exemple. Dans l'espace $L_2(\mathbf{R})$ considérons la variété linéaire $C_0^\infty(\mathbf{R})$ des fonctions indéfiniment différentiables sur $\mathbf{R}$ à support compact *). Montrons que $C_0^\infty(\mathbf{R})$ est dense dans $L_2(\mathbf{R})$. Prouvons préalablement que l'ensemble $C_0(\mathbf{R})$ des fonctions continues à supports compacts est dense

*) On dit qu'une fonction f définie sur $\mathbf{R}^n$ est à support compact si $f(x) = 0$ pour tous les x extérieurs à une boule de $\mathbf{R}^n$

dans $L_2(\mathbf{R})$. Soit f une fonction continue de $L_2(\mathbf{R})$, c'est-à-dire que $f \in \tilde{L}_2(\mathbf{R})$. Considérons une suite $\{f_n\}$, où $f_n \in C_0(\mathbf{R})$, $f_n(x) = f(x)\,\alpha_n(x)$, $\alpha_n \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, $\alpha_n(x) \in [0, 1]$ et $\alpha_n(x) = 1$ pour $|x| \leqslant n$. (L'existence des fonctions α_n est évidente.) On a

$$\|f - f_n\|^2 = \int\limits_{|x|>n} |f(x)|^2 (1 - \alpha_n(x))^2\, dx \leqslant \int\limits_{|x|>n} |f(x)|^2\, dx \to 0$$

lorsque $n \to \infty$, de sorte que

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n$$

Comme $\tilde{L}_2(\mathbf{R})$ est dense dans $L_2(\mathbf{R})$, il s'ensuit que $C_0(\mathbf{R})$ l'est aussi dans $L_2(\mathbf{R})$.

Soit maintenant $g \in C_0(\mathbf{R})$ une fonction continue à support compact. Considérons une suite de fonctions $\varphi_n \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ telle que $\varphi_n \in [0, n]$ et

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} n & \text{si} \quad |x| \leqslant \dfrac{1}{2n}, \\ 0 & \text{si} \quad |x| \geqslant \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{n^2}. \end{cases}$$

Posons $g_n(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x-y)\, g(y)\, dy$. Il est évident que $g_n \in C_0^\infty(\mathbf{R})$. Alors

$$|g_n(x) - g(x)| = \left| n \int\limits_{|x-y| \leqslant 1/2n} (g(y) - g(x))\, dy + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{1/2n < |x-y| < 1/2n + 1/n^2} \varphi_n(x-y)\, g(y)\, dy \right|;$$

$$\left| \int\limits_{1/2n < |x-y| < 1/2n + 1/n^2} \varphi_n(x-y)\, g(y)\, dy \right| \leqslant \int |\varphi_n(x-y)|\, |g(y)|\, dy \leqslant n \int |g(y)|\, dy;$$

$$|g_n(x) - g(x)| \leqslant \max_{\xi \in \mathbf{R},\, |h| \leqslant 1/2n} \left\{ |g(\xi + h) - g(\xi)| + \frac{2}{n} |g(\xi)| \right\}.$$

Par ailleurs, $g_n(x) = g(x) = 0$ pour $|x| > c$, où c est une constante. Donc

$$\|g_n - g\| \leqslant \sqrt{2c} \max_{\xi \in \mathbf{R},\, |h| \leqslant 1/2n} \left(|g(\xi + h) - g(\xi)| + \frac{2}{n} |g| \right) \to 0$$

pour $n \to \infty$. D'où il s'ensuit que $C_0^\infty(\mathbf{R})$ est dense dans $L_2(\mathbf{R})$.

Ainsi, l'espace $L_2(\mathbf{R})$ est isométriquement isomorphe à la complétée de la variété linéaire $C_0^\infty(\mathbf{R})$ pour la norme de l'espace $L_2(\mathbf{R})$.

Nous venons d'étudier une procédure de complétion des espaces normés à des espaces de Banach.

Pour construire des espaces de Banach on peut se servir aussi des *espaces quotients*. Soit B un espace de Banach et soit F un sous-espace de B. On dira que deux vecteurs x_1, $x_2 \in B$ sont *équivalents* et l'on écrira

$x_1 \sim x_2$ si $x_1 - x_2 \in F$. L'ensemble B/F des classes d'équivalence est muni de façon naturelle des opérations linéaires. Si, par exemple, X et Y sont deux telles classes, la classe $X+Y$ contient tous les éléments de la forme $x+y$, où $x \in X$, $y \in Y$. Il est aisé de voir que cette définition est correcte. L'espace vectoriel B/F est muni de la norme

$$\|X\| = \inf_{x \in X} \|x\|.$$

L'espace B/F muni de cette norme est un espace de Banach (prouvez-le). On l'appelle *espace quotient* de B par F.

Exercice. Soit $B = C[0, 1]$ l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$ muni de la norme $\|f\| = \max |f|$, et soit $F = \{f \in B : f(t) = 0 \text{ pour } t \in [0, a]\}$. Montrer que B/F est isométriquement isomorphe à $C[0, a]$.

§ 3. Espaces hilbertiens

Dans la suite, sauf mention expresse du contraire, les espaces vectoriels complexes seront simplement appelés espaces vectoriels (*idem* pour les algèbres, les espaces normés et les espaces de Banach).

Un cas particulier important de l'espace de Banach est l'espace hilbertien.

On appelle *espace préhilbertien* un espace vectoriel H dans lequel à tout couple de vecteurs x, y est associé le nombre complexe (x, y) appelé leur *produit scalaire*, satisfaisant les axiomes suivants :

H_1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$;

H_2) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha (x, z) + \beta (y, z)$;

H_3) $(x, x) \geqslant 0$;

H_4) $[(x, x) = 0] \Leftrightarrow (x = 0)$.

Posons $\|x\| = (x, x)^{1/2}$. Alors $\|\cdot\|$ vérifie les axiomes N_1) et N_2).

Montrons que l'axiome N_3) est satisfait. Prouvons préalablement l'importante *inégalité de Cauchy-Bouniakovski* :

$$|(x, y)| \leqslant \|x\| \, \|y\|.$$

Cette inégalité est triviale pour $(x, y) = 0$. On supposera donc que $(x, y) \neq 0$. On a

$$0 \leqslant (x - \alpha y, x - \alpha y) = (x, x) - \alpha (y, x) - \bar{\alpha} (x, y) + |\alpha|^2 (y, y) ;$$

en posant $\alpha = (x, x)/(y, x)$, on obtient

$$0 \leqslant \|x\|^2 - \|x\|^2 - \|x\|^2 + \frac{\|x\|^4}{|(y, x)|^2} \|y\|^2,$$

d'où l'on déduit l'inégalité annoncée. Il est immédiat de voir que cette inégalité se transforme en égalité si et seulement si les éléments x, y sont linéairement dépendants (prouvez-le). L'inégalité N_3) : $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

s'établit maintenant de façon élémentaire. En effet, N_3) peut être mise sous la forme

$$(x+y,\ x+y) \leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\,\|y\|,$$

c'est-à-dire sous la forme

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 + (x,\ y) + (y,\ x) \leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\,\|y\|,$$

ou

$$2\,\mathrm{Re}\,(x,\ y) \leqslant 2\|x\|\,\|y\|.$$

Or $\mathrm{Re}\,(x,\ y) \leqslant |(x,\ y)|$, donc la dernière inégalité résulte de celle de Cauchy-Bouniakovski. Dans $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ on a le signe d'égalité si et seulement si les vecteurs x et y sont proportionnels avec un coefficient de proportionnalité strictement négatif (prouvez-le).

Un espace préhilbertien complet s'appelle *espace hilbertien.*

Exemple. Un espace vectoriel de dimension finie peut être muni d'une structure d'espace hilbertien. Les espaces vectoriels à n dimensions étant tous isomorphes, considérons l'espace arithmétique $\mathbf{C}^n$ des séquences $x=(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ de nombres complexes. Les opérations algébriques sur $\mathbf{C}^n$ portent sur les coordonnées. Munissons $\mathbf{C}^n$ du produit scalaire $(x,\ y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$. On s'assure immédiatement de la validité des axiomes H_1) à H_4) et de la complétude de l'espace métrique obtenu*).

Exemple. Considérons l'ensemble l_2 des suites $x=(\xi_1,\ \xi_2, \ldots)$ de nombres complexes tels que $\sum_{1}^{\infty} |\xi_k|^2 < \infty$. Définissons sur l_2 les opérations linéaires sur les coordonnées. Nous obtenons ainsi un espace vectoriel. Munissons l'espace l_2 du produit scalaire

$$(x,\ y) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \bar{\eta}_k,$$

où $x=(\xi_1,\ \xi_2, \ldots)$, $y=(\eta_1,\ \eta_2, \ldots) \in l_2$.

Cette série converge, puisque $|\xi_k \bar{\eta}_k| \leqslant 1/2\,(|\xi_k|^2 + |\eta_k|^2)$. Il est aisé de voir que les axiomes de l'espace préhilbertien seront satisfaits. Montrons que l'espace l_2 est complet. Soit $x^{(n)}$ une suite de Cauchy. Désignons par $\xi_k^{(n)}$ les coordonnées du vecteur $x^{(n)}$. Les suites $\xi_k^{(n)}$ sont de Cauchy pour chaque k. Donc, la limite $\xi_k = \lim_{n\to\infty} \xi_k^{(n)}$ existe pour chaque k. Figeons $\varepsilon > 0$. La suite $x^{(n)}$ étant de Cauchy, il existe un $N=N(\varepsilon)$ tel que pour $n,\ m > N(\varepsilon)$ l'on a $\|x^{(n)} - x^{(m)}\| < \varepsilon$, c'est-à-dire que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)}|^2 < \varepsilon^2$$

*) Le produit scalaire sur $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{C}^n$ est souvent désigné par $x \cdot y$.

A plus forte raison

$$\sum_{k=1}^{l} |\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)}|^2 < \varepsilon^2$$

pour tout l fini. En admettant d'abord que $m \to \infty$ et ensuite que $l \to \infty$, on obtient

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^{(n)} - \xi_k|^2 \leqslant \varepsilon^2 .$$

Donc $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \in l_2$ et $\|x^{(n)} - x\| \leqslant \varepsilon$ pour $n > N(\varepsilon)$.

Des vecteurs x, y d'un espace hilbertien H sont *orthogonaux* si $(x, y) = 0$. Il est aisé de voir que $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (théorème de Pythagore) pour de tels vecteurs.

Théorème 3.1. (Théorème du parallélogramme). *Un espace de Banach B est hilbertien (c'est-à-dire isométriquement isomorphe à un espace hilbertien) si et seulement s'il est muni d'une norme vérifiant la condition*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \tag{3.1}$$

pour tous x, $y \in B$.

Condition nécessaire. Supposons que B est un espace hilbertien. Alors

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = (x+y, x+y) + (x-y, x-y) =$$
$$= (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) + (x, x) + (y, y) - (x, y) - (y, x) =$$
$$= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 .$$

Condition suffisante. On doit prouver que $\|x\|$ est de la forme $(x, x)^{1/2}$ pour un produit scalaire (x, y). Supposons que B est un espace de Banach et que la condition (3.1) est réalisée. Considérons la fonction (x, y) suivante de $x \in B$, $y \in B$:

$$(x, y) = \frac{1}{4} \{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\} \tag{3.2}$$

Montrons tout d'abord que cette fonction satisfait les axiomes du produit scalaire. On a

$$(x, x) = \frac{1}{4} \{4\|x\|^2 + i|1+i|^2 \|x\|^2 - i|1-i|^2 \|x\|^2\} = \|x\|^2 .$$

De là il s'ensuit que les axiomes H_3) et H_4) sont satisfaits. La relation H_1) résulte du fait que $\|y+ix\| = \|x-iy\|$, $\|y-ix\| = \|x+iy\|$. Prouvons H_2). De (3.1) et (3.2) il vient

$$(x, z) + (y, z) = \frac{1}{4} (\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2 + \|y+z\|^2 - \|y-z\|^2 +$$
$$+ i\|x+iz\|^2 - i\|x-iz\|^2 + i\|y+iz\|^2 - i\|y-iz\|^2) =$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left\|\frac{x+y}{2}+z\right\|^2+\left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2-\left\|\frac{x+y}{2}-z\right\|^2-\left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2+\right.$$

$$+i\left\|\frac{x+y}{2}+iz\right\|^2+i\left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2-i\left\|\frac{x+y}{2}-iz\right\|^2-$$

$$\left.-i\left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2\right)=2\left(\frac{x+y}{2}, z\right). \qquad (3.3)$$

En posant $y=0$, on obtient $(x, z)=2\left(\frac{x}{2}, z\right)$. De là et de (3.3) il vient

$$(x+y, z)=2\left(\frac{(x+y)}{2}, z\right)=(x, z)+(y, z). \qquad (3.4)$$

On démontre par récurrence que $(mx, z)=m(x, z)$ pour tout m naturel. En effet, de (3.4) et de l'hypothèse $(kx, z)=k(x, z)$ il s'ensuit

$$(k+1)(x, z)=k(x, z)+(x, z)=(kx, z)+(x, z)=((k+1)x, z).$$

On s'assure par ailleurs sans peine que $(-x, z)=-(x, z)$. Donc, les nombres rationnels α de la forme $\alpha=m/2^n$ vérifient la relation $(\alpha x, z)=\alpha(x, z)$. Soient maintenant β un réel quelconque et $\{\beta_n\}$ une suite de nombres dyadiques convergeant vers β. Alors

$$(\beta x, z)-\beta(x, z)=(\beta x, z)-\beta(x, z)-(\beta_k x, z)+\beta_k(x, z)=$$

$$=((\beta-\beta_k)x, z)+(\beta_k-\beta)(x, z)=$$

$$=(\beta_k-\beta)(x, z)+\frac{1}{4}\{\|(\beta-\beta_k)x+z\|^2-\|(\beta-\beta_k)x-z\|^2+$$

$$+i\|(\beta-\beta_k)x+iz\|^2-i\|(\beta-\beta_k)x-iz\|^2\}\to 0,$$

puisque $(x_n\to x)\Rightarrow(\|x_n\|\to\|x\|)$. Donc, $(\beta x, z)=\beta(x, z)$. Enfin, un calcul direct nous donne: $(ix, z)=i(x, z)$. Ainsi $(\alpha x+\beta y, z)=\alpha(x, z)+\beta(y, z)$. Donc, l'espace B muni du produit scalaire (3.2) est un espace hilbertien. C.Q.F.D.

Exemple. L'espace $L_2(\Omega)$ est hilbertien. Etablissons la validité de (3.1). Supposons tout d'abord que x et y sont des fonctions continues de $L_2(\Omega)$. Alors

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=\int_\Omega|x(\xi)+y(\xi)|^2\,d\xi+\int_\Omega|x(\xi)-y(\xi)|^2\,d\xi=$$

$$=\int_\Omega[|x(\xi)|^2+|y(\xi)|^2+2\operatorname{Re}x(\xi)\overline{y(\xi)}+|x(\xi)|^2+|y(\xi)|^2-$$

$$-2\operatorname{Re}x(\xi)\overline{y(\xi)}]\,d\xi=2(\|x\|^2+\|y\|^2).$$

Supposons maintenant que x et y sont des éléments quelconques de $L_2(\Omega)$ et soient $\{x_k\}$ et $\{y_k\}$ des suites de fonctions continues de $L_2(\Omega)$ convergeant respectivement vers x et y. Alors

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=\lim_{k\to\infty}\left[\|x_k+y_k\|^2+\|x_k-y_k\|^2\right]=$$

$$=2\lim_{k\to\infty}\left[\|x_k\|^2+\|y_k\|^2\right]=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right);$$

donc, en vertu du théorème 3.1, l'espace $L_2(\Omega)$ muni du produit scalaire (3.2) est un espace hilbertien. C.Q.F.D.

Si les fonctions x et y sont continues, le produit scalaire (x, y) devient

$$(x, y)=\frac{1}{4}\left\{\int_\Omega (x(\xi)+y(\xi))\,\overline{(x(\xi)+y(\xi))}\,d\xi-\right.$$

$$-\int_\Omega (x(\xi)-y(\xi))\,\overline{(x(\xi)-y(\xi))}\,d\xi+i\int_\Omega (x(\xi)+iy(\xi))\,\overline{(x(\xi)-iy(\xi))}\,d\xi-$$

$$\left.-i\int_\Omega (x(\xi)-iy(\xi))\,\overline{(x(\xi)+iy(\xi))}\,d\xi\right\}=\int_\Omega x(\xi)\,\overline{y(\xi)}\,d\xi \qquad (3.5)$$

Remarque. Même dans les cas où les éléments x et y de l'espace $L_2(\Omega)$ ne sont pas des fonctions continues, on écrira leur produit scalaire sous la même forme

$$(x, y)=\int_\Omega x(\xi)\,\overline{y(\xi)}\,d\xi.$$

Revenons aux espaces généraux. Y étant un ensemble d'un espace métrique R muni d'une métrique ρ, on appelle *distance* d'un point $x_0\in R$ à Y le nombre $\rho(x_0, Y)=\inf \rho(x_0, y)$, $y\in Y$. En général, la distance n'est pas nécessairement atteinte sur un élément quelconque $y\in Y$.

Exercice. Montrer que la distance est atteinte si l'espace R est complet et Y, compact dans R. Si la distance est atteinte, l'élément $y\in Y$ pour lequel $\rho(x_0, y)=\rho(x_0, Y)$ n'est pas nécessairement unique. La situation est bien plus simple pour les sous-ensembles fermés convexes d'un espace hilbertien.

Théorème 3.2. *Soit Y un ensemble fermé convexe d'un espace hilbertien H. Alors, pour tout $x_0\in H$, il existe un élément $y_0\in Y$ et un seul tel que*

$$\|x_0-y_0\|=\rho(x_0, Y)\equiv\inf_{y\in Y}\|x_0-y\|.$$

Démonstration. Soit $d=\inf_{y\in Y}\|x_0-y\|$. Sans restreindre la généralité on peut admettre que $d>0$. Soit $y_n\in Y$ une suite telle que $\|x_0-y_n\|\to d$. En appliquant le théorème du parallélogramme (théorème 3.1) aux vecteurs $a=x_0-y_n$ et $b=x_0-y_m$, on obtient

$$\|y_n-y_m\|^2+4\left\|x_0-\frac{(y_n+y_m)}{2}\right\|^2=2\|x_0-y_n\|^2+2\|x_0-y_m\|^2.$$

Le second membre tend vers $4d^2$ lorsque $n, m \to \infty$. Etant convexe, Y contient le vecteur $\frac{1}{2}(y_n + y_m)$. Donc $\left\| x_0 - \frac{1}{2}(y_n + y_m) \right\| \geqslant d$ pour tous les n et m. En combinant ces deux faits on obtient

$$\lim_{n,m\to\infty} \|y_n - y_m\| = 0,$$

autrement dit la suite $\{y_n\}$ est de Cauchy. La limite $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$ existe, puisque H est complet. D'autre part, $y_0 \in Y$, puisque Y est fermé. Il est clair que $\|x_0 - y_0\| = d$. Ce qui prouve qu'il existe un élément $y_0 \in Y$ tel que $\|x_0 - y_0\| = \rho(x_0, Y)$. Montrons que cet élément est unique. Soit $z_0 \in Y$ un élément tel que $\|x_0 - z_0\| = d$. Posons $u_0 = \frac{1}{2}(y_0 + z_0)$. Alors $u_0 \in Y$. On a

$$d \leqslant \|x_0 - u_0\| = \|x_0 - {}^1/_2 (y_0 + z_0)\| = {}^1/_2 (\|(x_0 - y_0) + (x_0 - z_0)\|) \leqslant$$
$$\leqslant {}^1/_2 (\|x_0 - y_0\| + \|x_0 - z_0\|) = {}^1/_2 (d + d) = d.$$

Donc toutes les inégalités sont ici des égalités. En particulier,

$$\|(x_0 - y_0) + (x_0 - z_0)\| = \|x_0 - y_0\| + \|x_0 - z_0\|.$$

Comme l'inégalité du triangle se transforme ici en égalité, on en déduit que $x_0 - y_0 = t(x_0 - z_0)$, où $t \geqslant 0$. Or $t = 1$, puisque $\|x_0 - y_0\| = \|x_0 - z_0\| = d > 0$. Donc $z_0 = y_0$. C.Q.F.D.

Théorème 3.3. *Si Y est une sous-variété linéaire fermée d'un espace hilbertien H, tout vecteur $x \in H$ se représente d'une seule manière sous la forme*

$$x = y + z,$$

où $y \in Y$ et z est orthogonal à Y, c'est-à-dire que $(z, a) = 0$ pour tous les $a \in Y$.

Démonstration. L'unicité de cette représentation est évidente : s'il existait une autre représentation $x = y_1 + z_1$ possédant les mêmes propriétés, le vecteur $y - y_1 = z_1 - z$ serait orthogonal à lui-même, donc nul. Pour prouver l'existence, on se servira du théorème 3.2. qui dit qu'il existe un vecteur $y \in Y$ tel que $\|x - y\| = \inf_{u\in Y} \|x - u\|$. Montrons que le vecteur $z = x - y$ est orthogonal à Y. Supposons le contraire. Alors $(z, a) \neq 0$ pour un vecteur $a \in Y$. Montrons qu'en choisissant convenablement le scalaire λ on peut faire en sorte que $\|x - (y + \lambda a)\| < d$. Ceci nous conduira à une contradiction avec la définition du nombre d, puisque $y + \lambda a \in Y$. On a

$$\|x - (y + \lambda a)\|^2 = \|z - \lambda a\|^2 = \|z\|^2 + |\lambda|^2 \|a\|^2 - 2 \operatorname{Re} \bar{\lambda} (z, a),$$

il est maintenant clair qu'il faut prendre λ assez petit en module et tel que $\bar{\lambda}(z, a) > 0$. Un tel choix de λ est rendu possible par l'hypothèse $(z, a) \neq 0$. Donc cette hypothèse est mise en défaut. C.Q.F.D.

Le vecteur y de la décomposition du vecteur x s'appelle *projection* du vecteur x sur le sous-espace Y.

On dit qu'un espace H se décompose en une somme directe de ses sous-espaces Y_1 et Y_2 si $Y_1 \cap Y_2 = \{0\}$ et si tout vecteur $x \in H$ se représente sous la forme $y_1 + y_2$, où $y_i \in Y_i$. Dans le cas d'un espace hilbertien, on parle aussi d'une *somme directe orthogonale* si les espaces Y_1 et Y_2 sont orthogonaux, c'est-à-dire si $(y_1, y_2) = 0$ pour tous $y_1 \in Y_1$ et $y_2 \in Y_2$.

On s'assure sans peine que l'ensemble des vecteurs orthogonaux à un sous-espace $Y \subset H$ forme un sous-espace fermé de H appelé *orthocomplément* de Y. Le théorème 3.3 nous conduit au résultat suivant.

Théorème 3.4. *Si Y_1 est un sous-espace fermé d'un espace hilbertien H, alors H se représente par la somme directe orthogonale de Y_1 et de son orthocomplément Y_2, c'est-à-dire que $H = Y_1 \oplus Y_2$.*

Exercice. Montrer que Y_2 est isométriquement isomorphe à l'espace quotient H/Y_1.

Un système (fini ou infini) de vecteurs e_i d'un espace hilbertien H est *orthonormé* si $\|e_i\| = 1$ et $(e_i, e_j) = 0$ pour $i \neq j$. A titre d'exemple de système orthonormé dans l_2 citons le système $e_i = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{i}, 1, 0, \ldots)$. Si $x \in H$, les nombres $c_i = (x, e_i)$ s'appellent *coefficients de Fourier* du vecteur x par rapport au système e_i. Pour tout système orthonormé (fini) $e_1, \ldots, e_n \in H$ et tout vecteur $x \in H$, on a l'importante *inégalité de Bessel* suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

Prouvons cette inégalité. Soit $y = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$. Alors $(x, e_i) = (y, e_i)$ pour $i \in [1, n]$. Posons $z = x - y$. Alors $(z, e_i) = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Donc $(z, y) = 0$. D'après le théorème de Pythagore

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 \geqslant \|y\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2.$$

C.Q.F.D.

Théorème 3.5. *Soient H un espace hilbertien, $\{e_k\}$ un système orthonormé dénombrable de H, $\{\lambda_k\}$ une suite de nombres complexes tels que $\sum_{1}^{\infty} |\lambda_k|^2 < \infty$. Alors la suite de vecteurs*

$$s_n = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n$$

converge vers un vecteur s tel que $(s, e_i) = \lambda_i$ et $\|s\|^2 = \sum_{1}^{\infty} |\lambda_k|^2$

Démonstration. Soit $n > m$. D'après le théorème de Pythagore, on a alors

$$\|s_n - s_m\|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} |\lambda_k|^2,$$

d'où les deux assertions annoncées.

Un système orthonormé de vecteurs $e_k \in H$ est *complet* si les conditions $(x, e_k)=0$, $\forall k$, entraînent que $x=0$. Si tout vecteur $x \in H$ peut être approché par des combinaisons linéaires de vecteurs du système $\{e_k\}$, alors ce système est visiblement complet. La réciproque est vraie dans un espace hilbertien (complet!) en vertu du théorème suivant.

Théorème 3.6. *Soit $\{e_k\}$ un système orthonormé dénombrable complet dans un espace hilbertien H. Alors, tout vecteur $x \in H$ se représente (d'une seule manière) sous forme d'une série convergente*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k,$$

où $c_k = (x, e_k)$. De plus,

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$$

(égalité de Parseval). Par ailleurs, si x et y sont des vecteurs arbitraires, on a

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k)\,\overline{(y, e_k)}.$$

Démonstration. L'inégalité de Bessel entraîne

$$\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \leqslant \|x\|^2$$

pour tout n. Donc la série $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ converge. Posons $s_n = c_1 e_1 + \ldots + c_n e_n$. Le théorème 3.5 nous dit que la suite s_n converge vers un vecteur $s \in H$. Et de plus $(x, e_k) = c_k = \lim_{n\to\infty} (s_n, e_k) = (s, e_k)$, de sorte que $(x-s, e_k)=0$ pour tous les k. Le système $\{e_k\}$ étant complet, on en déduit que $x=s$. La suite est évidente. C.Q.F.D.

Dans un espace hilbertien, un système orthonormé complet est appelé *base orthonormée*. Un espace ayant une base orthonormée dénombrable est dit *espace à dimension dénombrable. Tout espace hilbertien H de dimension dénombrable est isométriquement isomorphe à l'espace l_2* (prouvez-le à l'aide du théorème 3.6).

Un espace normé R est *séparable* s'il contient un ensemble A dénombrable partout dense dans R, c'est-à-dire un ensemble dénombrable A tel que pour tout vecteur $x \in R$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un vecteur $a \in A$ vérifiant la condition $\rho(x, a) < \varepsilon$. Autrement dit, tout vecteur de R est la limite d'une suite d'éléments de A.

Tout espace hilbertien séparable H est de dimension dénombrable. En effet, soit $A = \{a_i\}$ un ensemble dénombrable partout dense dans H. Choisissons une suite $b_1, b_2, \ldots \in A$ telle que: 1) les vecteurs $b_1, \ldots, b_n$ soient linéairement indépendants quel que soit n; 2) tout vecteur de A soit

combinaison linéaire des vecteurs b_i. Il est évident que ce choix est possible. Nous allons construire une base orthonormée par récurrence. Posons $e_1 = b_1/\|b_1\|$. Supposons que les vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ forment un système orthonormé et que l'enveloppe linéaire du système $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est confondue avec celle du système $\{b_1, \ldots, b_n\}$. Posons

$$f_{n+1} = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n + b_{n+1},$$

où $\lambda_i = -(b_{n+1}, e_i)$, $i \in [1, n]$. Alors, $(f_{n+1}, e_i) = 0$ pour $i \in [1, n]$. Par ailleurs, $f_{n+1} \neq 0$, sinon les vecteurs $e_1, \ldots, e_n, b_{n+1}$, donc les vecteurs $b_1, \ldots, b_n, b_{n+1}$, seraient linéairement dépendants. Enfin, en posant $e_{n+1} = f_{n+1}/\|f_{n+1}\|$, on passe de n à $n+1$. Il est aisé de s'assurer (nous recommandons au lecteur de le faire dans le détail) que $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ est la base cherchée.

§ 4. Fonctionnelles linéaires et espaces duaux

Soit B un espace normé sur un corps $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. On appelle *fonctionnelle linéaire* sur B une application $\varphi: B \to K$ telle que $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ et $\varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x)$ pour tous $x, y \in B$ et $\lambda \in K$. Si cette application est continue, c'est-à-dire si $(x_n \to x) \Rightarrow (\varphi(x_n) \to \varphi(x))$, on l'appelle *fonctionnelle linéaire continue*. Il est immédiat de voir que la continuité d'une fonctionnelle linéaire en tout point de l'espace B résulte de la continuité en 0.

On dit qu'une fonctionnelle linéaire φ est *bornée* si est finie la quantité $\|\varphi\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |\varphi(x)|$ appelée *norme de la fonctionnelle* φ. On vérifie sans peine qu'il y a équivalence entre le fait qu'une fonctionnelle linéaire est continue et le fait qu'elle est bornée.

Exercice. Montrer qu'une fonctionnelle linéaire φ est bornée si et seulement si l'ensemble $\{\lambda = \varphi(x): \|x\| < 1\}$ ne contient pas tous les nombres. En d'autres termes, si une fonctionnelle φ n'est pas bornée, elle prend n'importe quelle valeur au voisinage de 0. Etudier à titre d'exemple l'ensemble des fonctions différentiables sur l'intervalle $[-1, 1]$, le munir de la norme $\|f\| = \max_{[-1,1]} |f|$ et considérer une fonctionnelle φ telle que $\varphi(f) = f'(0)$.

Lemme 4.1. *Toute fonctionnelle linéaire continue se prolonge de façon unique avec conservation de la norme au complété de l'espace.*

La démonstration est laissée au soin du lecteur. Dans la suite nous n'aurons affaire qu'aux fonctionnelles linéaires continues. Les termes «linéaire» et «continue» seront omis pour abréger l'exposé. Par ailleurs, en vertu du lemme 4.1, on peut considérer que l'ensemble de définition B est un espace de Banach.

Le théorème fondamental suivant affirme l'existence d'un grand nombre de fonctionnelles.

Théorème 4.1 (théorème de Hahn-Banach). *Soit φ une fonctionnelle définie sur un sous-espace (fermé) F d'un espace B. Il existe alors une*

fonctionnelle ψ sur B telle que la restriction de ψ à F est confondue avec φ et $\|\psi\| = \|\varphi\|$.

Démonstration. Ebauchons les principales lignes de la démonstration.

Supposons d'abord que $K = \mathbf{R}$. Admettons pour simplifier que $\|\varphi\| = 1$. Soit $x_0 \in F$. Essayons de prolonger la fonctionnelle φ au sous-espace F_1 des vecteurs $\lambda x_0 + x$, où $x \in F$, en respectant la norme de φ. Le prolongement est entièrement défini par la donnée du nombre $c = \varphi(x_0)$. La norme sera respectée si et seulement si pour tout $x \in F$

$$|\lambda c + \varphi(x)| \leqslant |\lambda x_0 + x\|.$$

Cette inégalité équivaut à la double inégalité suivante:

$$-\varphi(x_2) - \|x_0 + x_2\| \leqslant c \leqslant -\varphi(x_1) + \|x_0 + x_1\|.$$

pour tous x_1, $x_2 \in F$. Donc il est possible de choisir le nombre c si

$$\varphi(x_1) - \varphi(x_2) \leqslant \|x_0 + x_1\| + \|x_0 + x_2\|$$

Or, la dernière inégalité a bien lieu:

$$\varphi(x_1) - \varphi(x_2) \leqslant |\varphi(x_1 - x_2)| \leqslant \|\varphi\| \, \|x_1 - x_2\| =$$

$$= \|(x_1 + x_0) + (-x_2 - x_0)\| \leqslant \|x_0 + x_1\| + \|x_0 + x_2\|.$$

Si F_1 couvre B tout entier, la démonstration est finie. Sinon on ajoute à F_1 le vecteur $x_2 \notin F_1$ et ainsi de suite. Pour parachever la démonstration, il faut faire intervenir quelques faits ensemblistes liés à l'axiome du choix. Mais nous glisserons là-dessus. Signalons toutefois que le cas $K = \mathbf{C}$ résulte immédiatement du cas $K = \mathbf{R}$. Si $\varphi(x) = \alpha(x) + i\beta(x)$, il est aisé de voir que

$$\alpha(ix) = -\beta(x), \quad \beta(ix) = \alpha(x),$$

où α et β sont des fonctionnelles réelles sur F. Il nous faut maintenant prolonger la fonctionnelle α à B en préservant la norme et remonter à ψ grâce à ce prolongement en se servant de la formule $\varphi(x) = \alpha(x) - i\alpha(ix)$. Nous laissons les détails au soin du lecteur.

Théorème 4.2. *Pour tout point $x_0 \in B$*

$$\|x_0\| = \sup_{\|\varphi\| \leqslant 1} |\varphi(x_0)|.$$

Plus, il existe une fonctionnelle φ_0 telle que $\|\varphi_0\| = 1$ et $\varphi_0(x_0) = \|x_0\|$.

Démonstration. Il est évident qu'il suffit d'établir la deuxième assertion. Considérons le sous-espace F de B composé des vecteurs λx_0. Si l'on définit sur F une fonctionnelle φ par la formule $\varphi(\lambda x_0) = \lambda \|x_0\|$ et qu'on la prolonge ensuite à B en vertu du théorème 4.1, on obtient la fonctionnelle φ_0 cherchée.

Corollaire. *Si $x \neq y$, on a $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ pour une certaine fonctionnelle φ.*

La dernière proposition signifie que les fonctionnelles forment une famille assez riche de fonctions sur B. La famille de fonctions (fonctionnelles) qui sépare les points de l'espace au sens mentionné est dite *totale*.

Exercice. Indiquer des exemples montrant que le prolongement d'une fonctionnelle mentionné dans le théorème de Hahn-Banach n'est généralement pas unique.

Exercice. Soit $\Gamma: |z|=1$ le cercle unité. Dans l'espace $C(\Gamma)$ des fonctions continues sur Γ considérons le sous-espace F des fonctions admettant un prolongement analytique au disque $|z|<1$. Montrer que F est un sous-espace fermé de $C(\Gamma)$. Définissons une fonctionnelle φ sur F en posant $\varphi(f)=f(0)$. Montrer que $\|\varphi\|=1$. Soit ψ le prolongement de la fonctionnelle φ de F à $C(\Gamma)$ avec respect de la norme. Utiliser le fait que $\psi(1)=1$ et $\|\psi\|=1$ pour montrer que $\psi(f)\geqslant 0$ si $f\in C(\Gamma)$ et $f\geqslant 0$. En déduire que

$$\psi(f)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f\,dz}{z}$$

(autrement dit que le prolongement est unique).

Dans bien des cas il est utile de savoir comment sont construites les fonctionnelles linéaires continues sur l'espace donné. Le plus important est le cas de l'espace hibertien où les fonctionnelles linéaires prennent une forme simple et élégante.

Théorème 4.3 (théorème de F. Riesz). *Toute fonctionnelle linéaire continue φ sur un espace hilbertien H est de la forme*

$$\varphi(x)=(x, a),$$

où l'élément $a\in H$ est défini de façon unique. De plus, $\|\varphi\|=\|a\|$. Réciproquement, si a est un vecteur quelconque de H, cette formule définit une fonctionnelle.

Démonstration. L'unicité de $a\in H$, l'assertion sur la norme ainsi que la dernière assertion résultent des propriétés générales du produit scalaire (inégalité de Cauchy-Bouniakovski). Le plus important est de prouver l'existence du vecteur a.

Soit L le *noyau de la fonctionnelle* φ, c'est-à-dire l'ensemble des points $x\in H$ pour lesquels $\varphi(x)=0$. Il est évident que L est un sous-espace fermé dans H. Utilisons le théorème 3.4 pour mettre H sous la forme $L\oplus M$, où M est l'orthocomplément de L. Il est immédiat de voir que $\dim M=1$ (le sous-espace M est à une dimension). En effet, soient $e_1, e_2\in M$. Alors $\varphi(e_2)\,e_1-\varphi(e_1)\,e_2\in L\cap M=\{0\}$.

Supposons maintenant que $e\in M$ et $\varphi(e)=1$. Grâce au théorème 3.4, mettons tout vecteur $x\in H$ sous la forme $x=z+\lambda e$, où $z\in L$. Ceci étant, $\varphi(x)=\varphi(z)+\lambda\varphi(e)=\lambda$. Donc $(x, e)=(z, e)+\lambda(e, e)=\varphi(x)\|e\|^2$, de sorte que

$$\varphi(x)=(x, a),$$

où $a=\dfrac{e}{\|e\|^2}$. C.Q.F.D.

L'ensemble des fonctionnelles (linéaires continues) sur B est muni d'une structure d'espace vectoriel par la relation

$$(\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2)(x)=\lambda_1\varphi_1(x)+\lambda_2\varphi_2(x).$$

Par ailleurs, il est évident que la norme des fonctionnelles satisfait les conditions

$$\|\varphi_1+\varphi_2\|\leqslant\|\varphi_1\|+\|\varphi_2\|,\quad \|\lambda\varphi\|=|\lambda|\cdot\|\varphi\|,\quad \|\varphi\|=0\Leftrightarrow\varphi=0;$$

$\varphi=0$ est la fonctionnelle nulle, c'est-à-dire que $\varphi(x)=0$ pour tout $x\in B$.

Donc l'ensemble des fonctionnelles est un espace vectoriel normé. On le désigne par B^* et on l'appelle *dual* de B.

Théorème 4.4. *L'espace B^* est complet.*

Démonstration. Soit $\{\varphi_n\}$ une suite de Cauchy d'éléments de B^*. Remarquons que $\sup\limits_n\|\varphi_n\|<\infty$. La suite $\varphi_n(x)$ est de Cauchy pour tout $x\in B$, puisque

$$|\varphi_n(x)-\varphi_m(x)|=|(\varphi_n-\varphi_m)(x)|\leqslant|\varphi_n-\varphi_m\|\cdot\|x\|.$$

Donc existe la limite

$$\varphi(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x).$$

Il est clair que $|\varphi(x)|\leqslant(\sup\|\varphi_n\|)\cdot\|x\|$. Donc $\varphi\in B^*$. D'autre part, la suite $\{\varphi_n\}$ étant de Cauchy, pour tout $\varepsilon>0$ on peut exhiber un N tel que $\|\varphi_n-\varphi_m\|<\varepsilon$ pour $n, m>N$. Si maintenant $\|x\|\leqslant1$, alors

$$|(\varphi-\varphi_n)(x)|=\lim_{m\to\infty}|(\varphi_m-\varphi_n)(x)|\leqslant\varepsilon,$$

c'est-à-dire que $\|\varphi-\varphi_n\|\leqslant\varepsilon$ pour $n>N$. C.Q.F.D.

Signalons que *la complétude de l'espace B n'a pas été utilisée*, l'essentiel c'est que K soit complet.

L'espace B^* étant un espace de Banach, on peut construire son dual $(B^*)^*$ que l'on désigne par B^{**} et qu'on appelle *bidual* de B. Cette procédure peut être poursuivie.

Il existe une correspondance biunivoque linéaire et isométrique entre B et B^{**}. Plus exactement, tout élément $x\in B$ définit sur B^* une fonctionnelle f_x telle que

$$f_x(\varphi)=\varphi(x).$$

La linéarité et la biunivocité de l'application $x\to f_x$ sont évidentes, quant au fait que $\|f_x\|=\|x\|$, il résulte du théorème 4.2.

Les fonctionnelles f_x, $x\in B$, ne sont pas les seules fonctionnelles définies sur B^*. Si elles sont les seules, l'espace B est dit *réflexif*.

Le théorème suivant résulte immédiatement du théorème de Riesz (théorème 4.3).

Théorème 4.5. *Tout espace hilbertien est réflexif.*

Définition. Une suite $\varphi_n \in B^*$ *converge faiblement* vers une fonctionnelle $\varphi \in B^*$ si

$$\varphi(x) = \lim_{n \to \infty} \varphi_n(x)$$

pour tout $x \in B$.

Une suite $\varphi_n \in B^*$ est une *suite faiblement fondamentale* si chaque suite de nombres $\varphi_n(x)$, $x \in B$, est fondamentale. Enfin, une suite $\varphi_n \in B^*$ est *faiblement bornée* si chaque suite de nombres $|\varphi_n(x)|$, $x \in B$, est bornée.

On peut envisager la convergence faible pour toute famille de fonctionnelles (et pas seulement pour les suites).

Si φ_n converge faiblement vers φ, on écrira $\varphi_n \underset{\text{faib.}}{\longrightarrow} \varphi$. Si $\varphi_n \to \varphi$ au sens que $\|\varphi_n - \varphi\| \to 0$, alors $\varphi_n \underset{\text{faib.}}{\longrightarrow} \varphi$, puisque $|(\varphi_n - \varphi)(x)| \leqslant \|\varphi_n - \varphi\| \, \|x\|$. La réciproque n'est généralement pas vraie. Soit par exemple $\{e_n\}$ un système orthonormé infini dans un espace hilbertien H. Posons $\varphi_n(x) = (x, e_n)$. Alors, de l'inégalité de Bessel il s'ensuit que $\varphi_n \underset{\text{faib.}}{\longrightarrow} 0$, mais $\|\varphi_n\| = 1$.

Exercice. Montrer que si $\{\varphi_n\}$ est une suite de fonctionnelles sur un espace hilbertien telle que $\varphi_n \underset{\text{faib.}}{\longrightarrow} \varphi$ et $\|\varphi_n\| \to \|\varphi\|$, alors $\|\varphi_n - \varphi\| \to 0$.

Même si la *convergence forte* (c'est-à-dire la convergence pour la norme) des fonctionnelles ne résulte pas de la convergence faible, il existe entre elles une relation simple exprimée par le théorème suivant qui est une conséquence immédiate du lemme du tonneau.

Théorème 4.6. 1) *Si une famille Φ de fonctionnelles sur un espace de Banach est faiblement bornée, elle est bornée en norme.* 2) *Si une suite $\{\varphi_n\}$ est une suite faiblement fondamentale, elle converge faiblement (l'espace B^* est faiblement complet).*

On dit *qu'une suite d'éléments $x_n \in B$ converge faiblement* vers un élément $x \in B$ si $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$ pour tout $\varphi \in B^*$.

Les suites faiblement bornées, faiblement fondamentales et la complétude faible dans l'espace B se définissent de façon analogue.

Remarque. Donc dans l'espace B^* il existe *deux types distincts* de convergence faible et une certaine prudence s'impose pour éviter toute confusion.

Formulons encore quelques propositions sur les suites faiblement convergentes (et bornées). Le lecteur pourra les traiter comme des exercices.

1) Si une famille X d'éléments de B est faiblement bornée, elle est bornée en norme. Pour prouver ceci on peut se servir de l'immersion de l'espace B dans B^{**} (décrite ci-dessus) et du théorème 4.6.

2) Une suite d'éléments $x_n \in B$ peut être faiblement fondamentale mais pas faiblement convergente.

3) Si B est un espace de Banach séparable, de toute suite bornée $\varphi_n \in B^*$ on peut extraire une suite partielle faiblement convergente.

4) D'après le théorème de Riesz, tout espace hilbertien est réflexif. Les deux types de convergence faible sont confondus sur l'espace dual. Mais l'espace hilbertien lui-même peut être identifié à son dual (en vertu du même théorème de Riesz). Donc tout espace hilbertien est faiblement complet et de toute suite bornée d'éléments (d'un espace hilbertien séparable) on peut extraire une suite partielle faiblement convergente.

5) Si une suite d'éléments $x_n \in B$ est bornée en norme et $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$ pour tout φ d'un ensemble dense dans B^*, alors x_n converge faiblement vers x.

§ 5. Opérateurs linéaires

Soient B_1 et B_2 des espaces de Banach. On appelle *opérateur linéaire* une application $A: D_A \to R_A$ qui est un homomorphisme d'une variété linéaire $D_A \subset B_1$ dans une variété linéaire $R_A \subset B_2$. La variété D_A s'appelle *ensemble de définition* de l'opérateur A, la variété R_A, *ensemble de valeurs* de A. On dit que l'opérateur A est *continu* en un point $x \in D_A$ si

$$(x_n \to x \text{ et } x_n \in D_A) \Rightarrow (Ax_n \to Ax).$$

Comme pour les fonctionnelles linéaires, on vérifie sans peine que si un opérateur (on omettra le qualificatif «linéaire») A est continu en 0, il l'est en tout point $x \in D_A$. La quantité

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\|$$

s'appelle *norme de l'opérateur* A. Si $\|A\| < \infty$, l'opérateur A est dit *borné*. Comme pour les fonctionnelles linéaires, *il y a équivalence entre le fait qu'un opérateur est continu et le fait qu'il est borné*. On a le théorème suivant (qui est identique au lemme 4.1).

Théorème 5.1. *Tout opérateur borné $A: D_A \to R_A$ se prolonge de façon unique avec respect de la norme en un opérateur de domaine de définition $\overline{D}_A$. Si, en particulier, D_A est dense dans B_1, alors A se prolonge en un opérateur borné $A': B_1 \to B_2$.*

Les opérateurs bornés A définis sur $D_A = B_1$ seront appelés *homomorphismes* de B_1 dans B_2. L'ensemble de tous les homomorphismes est désigné par Hom (B_1, B_2) et si $B_1 = B_2 = B$, par Op (B).

Remarque. Le théorème de Hahn-Banach n'est en général pas valable pour les opérateurs.

Dans toute la suite, on admettra (sauf mention expresse du contraire) que D_A *est dense dans* B_1.

Exemple. Soient Ω un domaine fermé dans $\mathbf{R}^n$, $U \subset \Omega$ un ensemble borné ouvert de $\mathbf{R}^n$ et φ une fonction continue sur Ω dont le support est

contenu dans U. Désignons par $\hat{\varphi}$ l'opérateur $\hat{\varphi}: \tilde{L}_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$, où $\tilde{L}_2(\Omega)$ est la variété linéaire des fonctions continues de $L_2(\Omega)$, $\tilde{L}_2(\Omega) \subset L_2(\Omega)$, défini par la formule

$$[\hat{\varphi} f](x) = \varphi(x) f(x).$$

L'opérateur $\hat{\varphi}$ est borné: $\hat{\varphi} \leqslant \max_{x \in \Omega} |\varphi(x)|$. Il peut donc être prolongé en un homomorphisme $L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ qui sera encore désigné par $\hat{\varphi}$.

On dira que des éléments f et g de l'espace $L_2(\Omega)$ sont *confondus* sur un ouvert U si $\hat{\varphi} f = \hat{\varphi} g$ pour toute fonction continue φ dont le support appartient à U. On dira qu'un élément $f \in L_2(\Omega)$ est *continu* en un point x_0 s'il existe une fonction $g \in \tilde{L}_2(\Omega)$ confondue avec f dans un voisinage de x_0. Ceci étant, nous poserons $f(x_0) \stackrel{\text{déf}}{=} g(x_0)$. On laisse au lecteur le soin de s'assurer que $f(x_0)$ est indépendante du choix de la fonction g.

La théorie des opérateurs linéaires non bornés sur des espaces de Banach est largement sollicitée dans l'étude des propriétés générales des équations différentielles linéaires. Citons des exemples d'opérateurs non bornés.

Exemple. Soit T l'opérateur de dérivation dans l'espace $L_2(\Omega)$, où $\Omega = [0, \pi]$, défini sur l'ensemble D_T des fonctions continûment dérivables sur $[0, \pi]$ (ensemble qui est dense dans $L_2(\Omega)$, puisque toute fonction continue sur $[0, \pi]$ peut être uniformément approchée par un polynôme avec n'importe quelle précision, donc pour la norme de L_2). Considérons la suite $\{\varphi_n\}$ de fonctions

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx$$

de D_T. On a $\|\varphi_n\|^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 nx \, dx = 1$. De plus $\|T\varphi_n\|^2 = \frac{2n^2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^2 nx \, ds = n^2$. Donc

$$\|T\| \geqslant \lim_{n \to \infty} \frac{\|T\varphi_n\|}{\|\varphi_n\|} = \infty.$$

c'est-à-dire que l'opérateur T n'est pas borné.

Exemple. Soit S une variété linéaire de $L_2(\mathbf{R})$ composée des fonctions φ indéfiniment dérivables satisfaisant la condition suivante:

$$\lim_{x \to \infty} |x|^m \frac{d^n \varphi(x)}{dx^n} = 0$$

quels que soient m, $n>0$. L'ensemble S est dense dans $L_2(\mathbf{R})$, puisque $C_0^\infty(\mathbf{R})\subset S$.

Soit T: $S\to L_2(\mathbf{R})$ l'opérateur de multiplication par une variable indépendante: $Tf(x)=xf(x)$. Considérons la suite $\{\varphi_n\}$ de fonctions

$$\varphi_n(x)=\frac{1}{\sqrt{n}}\,e^{-x^2/n^2}$$

Calculons $\|\varphi_n\|$ et $\|T\varphi_n\|$. Il vient

$$\|\varphi_n\|^2=\frac{1}{n}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2x^2/n^2}\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2y^2}\,dy=\|\varphi_1\|^2,$$

$$\|T\varphi_n\|^2=\frac{1}{n}\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-2x^2/n^2}\,dx=n^2\int_{-\infty}^{\infty}y^2e^{-2y^2}\,dy=n^2\|T\varphi_1\|^2.$$

Donc l'opérateur n'est pas borné:

$$\|T\|\geqslant\lim_{n\to\infty}\frac{\|T\varphi_n\|}{\|\varphi_n\|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\|T\varphi_1\|}{\|\varphi_1\|}=\infty.$$

Définition. On dit qu'un opérateur T: $D_T\to B_2$ est le *prolongement* d'un opérateur A: $D_A\to B_2$ et l'opérateur A la *restriction* de l'opérateur T à l'ensemble D_A si $D_A\subset D_T$ et $Ax=Tx$ pour tout $x\in D_A$.

Contrairement à un opérateur borné, un opérateur non borné A ne se prolonge généralement pas en un opérateur défini sur $\overline{D}_A$. Néanmoins, il existe pour une certaine classe d'opérateurs non bornés un processus semblable au prolongement des opérateurs par continuité. Décrivons ce processus en introduisant les définitions nécessaires.

Définition. On dit qu'un opérateur A est *fermé* si

$$(g_n\to g \text{ et } Ag_n\to h)\Rightarrow(g\in D_A,\ Ag=h).$$

Il est évident qu'un opérateur borné défini sur l'espace tout entier est fermé (on prouvera plus bas que la réciproque est également vraie). Il s'avère que les opérateurs n'admettent pas tous des prolongements fermés. Mais, si ces derniers existent, il se trouve parmi eux un plus petit que nous allons décrire. Soit T_0: $D_{T_0}\to B_2$, $D_{T_0}\subset B_1$, un opérateur admettant un prolongement fermé T_1. Soit $g\in B_1$ la limite d'une suite $\{g_n\}$ d'éléments de D_{T_0} telle que $\lim\limits_{n\to\infty}T_0g_n=h$, $h\in B_2$. Alors, par définition d'un opérateur fermé, on a $T_1g=h$. Donc g appartient à l'ensemble de définition de tout prolongement fermé de l'opérateur T_0. Désignons par T la restriction de l'opérateur T_1 à l'ensemble

$$D_T=\{g\,|\,(\exists\{g_n\})\,(\exists h)\,[(g_n\to g,\ g_n\in D_{T_0})\quad\text{et}\quad(T_0g_n\to h)]\}.$$

L'élément g appartient à D_T si et seulement s'il existe une suite $g_n\in D_{T_0}$

telle que $g=\lim g_n$ et si existe la limite $\lim_{n\to\infty} T_0 g_n$. L'opérateur T est fermé. En effet, supposons que $g_n\to g$, $g_n\in D_T$ et $\lim_{n\to\infty} Tg_n=h$. Alors, pour tout n il existe une suite $\{g_k^{(n)}\}$ d'éléments de D_{T_0} telle que

$$\|g_k^{(n)}-g_n\|<\frac{1}{k} \quad \text{et} \quad \|T_0 g_k^{(n)}-Tg_n\|<\frac{1}{k}.$$

Considérons la suite diagonale $\{g_n^{(n)}\}$. On a

$$\|g_n^{(n)}-g\|\leqslant\frac{1}{n}+\|g_n-g\|\to 0 \quad \text{lorsque } n\to\infty$$

et

$$\|T_0 g_n^{(n)}-h\|\leqslant\frac{1}{n}+\|Tg_n-h\|\to 0 \quad \text{lorsque } n\to\infty.$$

Donc $g\in D_T$, c.q.f.d. Il est évident que T est le plus petit prolongement fermé de l'opérateur T_0.

Définition. Le plus petit prolongement fermé d'un opérateur T (s'il existe) s'appelle *fermeture* de cet opérateur et se note $\overline{T}$.

Théorème 5.2. *Un opérateur A admet une fermeture $\overline{A}$ si et seulement si* $(g_n\to 0$ *et* $Ag_n\to h)\Rightarrow(h=0)$.

Démonstration. La condition nécessaire est évidente, puisque si $\overline{A}$ est la fermeture de A, $g_n\to 0$ et $Ag_n\to h$, alors $h=\overline{A}0=0$.

Prouvons la condition suffisante. Supposons que $(g_n\to 0$ et $Ag_n\to h)\Rightarrow(h=0)$ et construisons $\overline{A}$. L'ensemble de définition de l'opérateur $\overline{A}$ doit être composé des limites des suites $\{g_n\}$ d'éléments de D_A pour lesquelles la suite $\{Ag_n\}$ est de Cauchy. Si $g\in D_{\overline{A}}$ et $g_n\to g$, $Ag_n\to h$, $g_n\in D_A$, on pose $\overline{A}g=h$. Cette définition ne nous conduit pas à une contradiction, car si $f_n\to g$, $Af_n\to h'$, $f_n\in D_A$, alors $g_n-f_n\to 0$, $A(g_n-f_n)\to h-h'$, et par suite $h=h'$ d'après l'hypothèse du théorème. La démonstration de la fermeture de l'opérateur $\overline{A}$ est calquée sur celle de l'existence de la fermeture d'un opérateur admettant des prolongements fermés.

On remarquera sans peine le lien étroit entre le complété d'un espace normé et la fermeture d'un opérateur.

Théorème 5.3. *Un opérateur A: $D_A\to B_2$, $D_A\in B_1$ est fermé si et seulement si l'espace B_A des éléments $g\in D_A$ de norme*

$$\|g\|_{B_A}^2=\|Ag\|_{B_2}^2+\|g\|_{B_1}^2 \tag{5.1}$$

est complet.

Démonstration. Supposons que l'opérateur A est fermé. Considérons une suite $\{g_n\}$ de Cauchy dans B_A:

$$\|g_n-g_m\|_{B_A}<\varepsilon \quad \text{lorsque } m, n>N(\varepsilon).$$

De (5.1) il résulte pour $m, n > N(\varepsilon)$

$$\|g_n - g_m\|_{B_1} < \varepsilon \quad \text{et} \quad \|Ag_n - Ag_m\|_{B_2} < \varepsilon.$$

Les espaces B_1 et B_2 étant complets, les suites $\{g_n\}$ et $\{Ag_n\}$ convergent vers $g \in B_1$ et $h \in B_2$ et de plus $h = Ag$, puisque l'opérateur A est fermé. Donc $g \in B_A$; par ailleurs, pour $n \to \infty$

$$\|g - g_n\|_{B_A}^2 = \|Ag - Ag_n\|_{B_2}^2 + \|g - g_n\|_{B_1}^2 \to 0.$$

Réciproquement, supposons que l'espace B_A est complet et que $g_n \to g \in B_1$, $Ag_n \to h$. Montrons que $h = Ag$. De (5.1) il s'ensuit que la suite $\{g_n\}$ est de Cauchy dans B_A. L'espace B_A étant complet, il existe un élément $f \in B_A$ tel que $\|f - g_n\|_{B_A} \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Comme $\|f - g_n\|_{B_1} \leqslant \|f - g_n\|_{B_A}$, il vient que $g_n \to f$ pour la norme de l'espace B_1, de sorte que $f = g$. De (5.1) il résulte que $\|Ag_n - Ag\| \to 0$ lorsque $n \to \infty$, c'est-à-dire que $h = Af = Ag$. C.Q.F.D.

Exemple. Citons un exemple d'opérateur A ne possédant pas de fermeture. Supposons que A est un opérateur de $L_2[0, 1]$ dans $L_2[0, 1]$ et soit $D_A = C[0, 1]$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$. Posons $Ag = g(1)$, de sorte que l'opérateur A associe une fonction constante à toute fonction de $C[0, 1]$. Considérons la suite $\{g_n\}$, où $g_n(x) = x^n$. On a

$$\|g_n\| = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \to 0$$

lorsque $n \to \infty$. Par ailleurs $\|Ag_n\| = 1$ et la condition du théorème 5.2 n'est pas remplie.

Les théorèmes 5.2 et 5.3 prennent une coloration géométrique si l'on introduit la notion de *graphe d'un opérateur*.

Considérons l'opérateur $A: D_A \to R_A$, où $D_A \subset B_1$ et $R_A \subset B_2$. Le produit $B = B_1 \times B_2$ muni de la norme $\|(x_1, x_2)\|^2 = \|x_1\|_{B_1}^2 + \|x_2\|_{B_2}^2$ est un espace de Banach (prouvez-le). On appelle *graphe* G_A *de l'opérateur* A la variété linéaire de B:

$$G_A = \{(x_1, x_2): x_2 = Ax_1,\ x_1 \in D_A\}.$$

Il est clair que G_A ne contient pas d'éléments de la forme $(0, x_2)$, où $x_2 \neq 0$. Réciproquement, si $G \subset B$ ne contient pas d'éléments de la forme $(0, x_2)\, x_2 \neq 0$, alors G est le graphe d'un seul opérateur.

Désormais il est aisé de s'assurer que l'opérateur A est fermé si et seulement si son graphe G_A est un sous-ensemble fermé de B (théorème 5.3). Par ailleurs, la condition du théorème 5.2 est remplie pour l'opérateur A si et seulement si l'adhérence $\overline{G}_A$ de G_A est encore un graphe, c'est-à-dire ne contient pas d'éléments $(0, x_2)$, $x_2 \neq 0$. Ceci étant, $\overline{A}$ a pour graphe $\overline{G}_A$ (autrement dit $G_{\overline{A}} = \overline{G}_A$).

Bien que notre principal objectif soit l'étude des opérateurs (non bornés), nous citerons ici de nombreux faits importants pour la suite concernant les opérateurs bornés.

Théorème 5.4 (théorème de Banach). *Soient B_1 et B_2 des espaces de Banach. Si $A: B_1 \to B_2$ est un opérateur borné pour lequel $D_A = B_1$ et $R_A = B_2$ et dont le noyau (c'est-à-dire l'ensemble des $x \in B_1$ tels que $Ax = 0$) ne contient pas d'éléments non nuls, alors l'opérateur réciproque $A^{-1}: B_2 \to B_1$ est borné aussi.*

Démonstration. Soient V_N une boule de B_1 centrée en 0 et de rayon N, et W_N, l'image de V_N par l'application A.

Montrons que pour un N naturel au moins l'ensemble $\overline{W}_N$ contient une boule de B_2. Supposons le contraire. Soient y_1 un point de B_2 et U_1, une boule de rayon r_1 centrée en y_1. La boule U_1 contient un point y_2 de $\mathbf{C}\overline{W}_1 = B_2 \setminus 2\overline{W}_1$, et comme $\mathbf{C}\overline{W}_1$ est un ouvert, il contient une boule entière U_2 de centre y_2 et de rayon r_2. En poursuivant cette procédure, on obtient une suite de boules emboîtées

$$U_1 \supset U_2 \supset \ldots \supset U_N \supset \ldots$$

de centres $y_1, y_2, \ldots, y_N, \ldots$ et de rayons $r_1, r_2, \ldots, r_N, \ldots$, et de plus

$$U_{N+1} \subset \mathbf{C}\overline{W}_N.$$

On peut admettre que la suite de boules $\{U_N\}$ est telle que $\lim_{N\to\infty} r_n = 0$. La suite $\{y_N\}$ est alors de Cauchy, puisque $\|y_N - y_{N+p}\| \leqslant r_N$ pour tout $p > 0$. L'espace B_2 étant complet, $\lim_{N\to\infty} y_N = y$ existe. Il est évident que $y \in \bigcap_{N=1}^{\infty} U_N$. Mais $\bigcap_{N=1}^{\infty} U_N \subset \bigcap_{N=1}^{\infty} \mathbf{C}\overline{W}_N = \varnothing$, puisque $\bigcup_{N=1}^{\infty} W_N = B_2$. Cette contradiction prouve notre assertion.

Supposons donc que $\overline{W}_N$ contienne la boule $U = \{y \in B_2,\ \|y - y_0\| < r\}$, autrement dit, pour tout $y \in U$ et tout $\delta > 0$, il existe un point $x \in B_1$ tel que $\|x\| < N$ et $\|Ax - y\| < \delta$. Si z est un point quelconque de B_2, alors le point $y = \dfrac{r}{2\|z\|} z + y_0$ appartient à U. Donc, pour tout $z \in B_2$ et $\delta > 0$, il existe un point $x \in V_N$ tel que

$$\left\| Ax - \frac{r}{2\|z\|} z + y_0 \right\| < \delta.$$

Comme $Ax + y_0 = A(x + x_0)$, où $x_0 = A^{-1}y$, il s'ensuit que pour tout $y \in B_2$ et tout $\delta > 0$, il existe un $x \in B_1$ tel que

$$\|x\| < \frac{2\|y\|}{r} (N + \|x_0\|) \quad \text{et} \quad \|Ax - y\| < \delta.$$

Soit $\varepsilon = \sum_1^{\infty} \varepsilon_n$, où $\varepsilon_n > 0$. Nous pouvons choisir successivement des $x_1, \ldots, x_n, \ldots \in B_1$ tels que

$$\|y-Ax_1\|<\varepsilon_1, \quad \|x_1\|<\|y\|\frac{2(N+\|x_0\|)}{r},$$

$$\|y-Ax_1-Ax_2\|<\varepsilon_2, \quad \|x_2\|<\varepsilon_1\frac{2(N+\|x_0\|)}{r},$$

. . . . . .

$$\left\|y-\sum_1^n Ax_i\right\|<\varepsilon_n, \quad \|x_n\|<\varepsilon_{n-1}\frac{2(N+\|x_0\|)}{r},$$

. . . . . .

Considérons la série $\sum_1^\infty x_i$. Cette série converge vers un élément $x\in B_1$, puisque $\sum_1^\infty \|x_i\|<\infty$. De plus

$$\|x\|\leqslant\sum_1^\infty \|x_i\|<[\|y\|+\varepsilon]\frac{2(N+\|x_0\|)}{r}$$

et $Ax=y$. Le nombre ε étant arbitraire, on en déduit que $A^{-1}\leqslant\frac{2(N+\|x_0\|)}{r}$. C.Q.F.D.

Corollaire (théorème du graphe fermé). *Si un opérateur* $A: B_1\to B_2$, $D_A=B_1$, *possède un graphe fermé (est fermé), il est borné.*

Pour prouver ce corollaire, il suffit d'appliquer le théorème 5.4 à l'opérateur $(x, Ax)\to x$, $(x, Ax)\in G_A$, $x\in B_1$. Etant défini sur G_A, qui est un espace de Banach, puisque fermé, l'opérateur A est visiblement continu et applique biunivoquement G_A sur B_1. D'après le théorème 5.4, l'opérateur réciproque $x\to(x, Ax)$, et avec lui l'opérateur A, sont continus.

L'ensemble Hom (B_1, B_2) devient un espace vectoriel si on le munit des opérations linéaires suivantes:

$$(T_1+T_2)(x)=T_1x+T_2x, \quad (\lambda T)(x)=\lambda Tx$$

quels que soient les vecteurs $x\in B_1$ et les scalaires λ. Il est immédiat de voir que $\|T_1+T_2\|\leqslant\|T_1\|+\|T_2\|$ et $\|\lambda T\|=|\lambda|\,\|T\|$. Par ailleurs, si $\|T\|=0$, alors T est l'opérateur nul, c'est-à-dire que $Tx=0$ pour tout $x\in B_1$ (cet opérateur est l'élément nul de l'espace vectoriel normé Hom (B_1, B_2)).

En tenant compte du fait que pour prouver la complétude de l'espace dual on ne s'est servi que de celle de l'ensemble des valeurs et en appliquant le même raisonnement, on obtient le résultat suivant:

Théorème 5.5. *Si* B_2 *est un espace de Banach, l'espace* Hom (B_1, B_2) *est complet pour tout espace vectoriel normé* B_1.

On dit qu'une suite $\{T_n\}$ d'opérateurs (de B_1 dans B_2) converge fortement sur un ensemble $D\subset B_1$ si $D\subset D_{T_n}$ pour tous les n et si pour tout $x\in D$ la suite $\{T_nx\}$ converge pour la norme de B_2.

Le théorème suivant est utile dans les applications. Nous nous bornerons seulement à son énoncé, car sa démonstration s'effectue facilement à l'aide du lemme du tonneau.

Théorème 5.6 (théorème de Banach-Steinhaus). *Soit* $A_n \in \mathrm{Hom}(B_1, B_2)$ *une suite telle que*

1) $\sup \|A_n\| < \infty$,

2) *la suite* A_n *converge fortement sur une variété* D *dense dans* B_1. *Supposons par ailleurs que* $Ax = \lim_{n\to\infty} A_n x$ *si* $x \in D$.

Alors $\|A\| < \infty$, *l'opérateur* A *admet une fermeture* $\overline{A} \in \mathrm{Hom}(B_1, B_2)$ *et la suite* A_n *converge fortement vers* A *partout sur* B_1.

Exercice. Sous les hypothèses du théorème 5.6, peut-on affirmer que $\|A_n - \overline{A}\| \to 0$?

Exercice. Soit Φ une famille d'opérateurs de $\mathrm{Hom}(B_1, B_2)$ telle que $\sup_{A\in\Phi} \|Ax\| = s(x) < \infty$ pour tout $x \in B_1$. Montrer que $\sup_{A\in\Phi} \|A\| < \infty$.

Soit $T \in \mathrm{Hom}(B_1, B_2)$. Si φ est une fonctionnelle linéaire sur B_2, c'est-à-dire si $\varphi \in B_2^*$, alors la formule

$$\psi(x) = \varphi(Tx), \qquad x \in B_1,$$

définit une fonctionnelle sur B_1. Ceci définit une application $T^*: B_2^* \to B_1^*$. Il est évident que $T^* \in \mathrm{Hom}(B_2^*, B_1^*)$. Comme $|(T^*\varphi)(x)| = |\varphi(Tx)| \leqslant \|T\| \cdot \|\varphi\| \cdot \|x\|$, on a $\|T^*\| \leqslant \|T\|$. Par ailleurs, le théorème de Hahn-Banach nous dit que pour tout $x \in B_1$, il existe une fonctionnelle $\varphi_0 \in B_2^*$, $\|\varphi_0\| = 1$, telle que $\|Tx\| = \varphi_0(Tx)$. Donc, $\|Tx\| = \varphi_0(Tx) = (T^*\varphi_0)(x) \leqslant \|T^*\| \cdot \|x\|$ et $\|T\| \leqslant \|T^*\|$. Donc $\|T^*\| = \|T\|$.

Soit $B_1 = B_2 = B$. On rappelle que $\mathrm{Hom}(B, B)$ est désigné par $\mathrm{Op}(B)$. L'espace $\mathrm{Op}(B)$ est muni d'une structure naturelle d'algèbre: si T_1, $T_2 \in \mathrm{Op}(B)$, alors par définition $(T_1T_2)(x) = T_1(T_2x)$, $x \in B$. Il est évident que

$$\|T_1T_2\| \leqslant \|T_1\| \cdot \|T_2\|.$$

Cette dernière relation exprime que $\mathrm{Op}(B)$ est une algèbre de Banach (pour plus de détails sur les algèbres de Banach voir § 9).

Si $T \in \mathrm{Op}(B)$, alors $T^* \in \mathrm{Op}(B^*)$. De plus $(T_1T_2)^* = T_2^*T_1^*$ pour tous T_1, $T_2 \in \mathrm{Op}(B)$.

On dit qu'un opérateur $T \in \mathrm{Hom}(B_1, B_2)$ est *compact* si de toute suite $\{Tx_n\}$, où $\|x_n\| \leqslant 1$ on peut extraire une suite partielle convergente.

Exercice. Si $\{T_k\}$ est une suite d'opérateurs compacts et $\|T - T_k\| \to 0$, alors T est un opérateur compact.

Exercice. On dit qu'un opérateur T est *dégénéré* si la variété $T(B_1) \subset B_2$ est de dimension finie. Montrer que tout opérateur dégénéré est compact.

Exercice. Un opérateur $T \in \mathrm{Op}(H)$, où H est un espace hilbertien est compact si et seulement s'il est la limite d'une suite d'opérateurs dégénérés.

Exercice. Un opérateur $T \in \mathrm{Hom}(B_1, B_2)$ est compact si et seulement si l'opérateur $T^* \in \mathrm{Hom}(B_2^*, B_1^*)$ l'est.

Exercice. Les opérateurs compacts forment un idéal bilatère (fermé) dans l'algèbre $\mathrm{Op}(B)$: si T est un opérateur compact et $S \in \mathrm{Op}(B)$, les opérateurs TS et ST sont compacts.

Introduisons quelques notions relatives à l'algèbre $\mathrm{Op}(B)$. On dit qu'un opérateur $T \in \mathrm{Op}(B)$ est *inversible* s'il existe un opérateur $S \in \mathrm{Op}(B)$ tel que $TS = ST = 1$, où 1 est l'opérateur identique. L'opérateur S s'appelle opérateur *réciproque* de T et se note T^{-1}.

Exercice. Montrer que l'inversibilité de l'opérateur T est équivalente à celle de l'opérateur T^*.

L'ensemble des opérateurs inversibles forment un groupe désigné par $GL(B)$.

Lemme 5.1. *Si* $T = 1 - A$, *où* $\|A\| < 1$, *alors* $T \in GL(B)$.

Démonstration. La série $\sum_0^\infty A^k$ converge, puisque $\|A\| < 1$. Il est évident que l'opérateur $S = \sum_0^\infty A^k$ est réciproque de T. Par ailleurs $\|T^{-1}\| \leqslant 1/(1 - \|A\|)$, de sorte que $T^{-1} \to 1$ si $T \to 1$.

Du lemme 5.1 il s'ensuit qu'un opérateur proche d'un opérateur inversible est inversible. En effet, soient $T \in GL(B)$ et $S = T - A$. Alors, pour $\|A\| < \|T^{-1}\|^{-1}$ on a $\|T^{-1}A\| < 1$, de sorte que $(1 - T^{-1}A) \in GL(B)$ et l'on peut écrire

$$S^{-1} = (T - A)^{-1} = T^{-1}(1 - T^{-1}A)^{-1}.$$

On appelle *spectre* $\sigma(T)$ d'un opérateur $T \in \mathrm{Op}(B)$ l'ensemble des $\lambda \in \mathbf{C}$ tels que $\lambda - T \notin GL(B)$. L'opérateur $R_\lambda \overset{\text{déf}}{=} (\lambda - T)^{-1}$, $\lambda \notin \sigma(T)$ est la *résolvante* de l'opérateur T.

Du lemme 5.1 et de la remarque qui le suit, il résulte que $\mathbf{C} \setminus \sigma(T)$ est un ouvert et que la fonction $\lambda \to R_\lambda$ est continue sur lui. Bien plus, cette fonction est analytique en ce sens qu'existe $\lim_{h \to 0} \dfrac{(R_{\lambda+h} - R_\lambda)}{h} = (-R_\lambda^2)$. Si $|\lambda| > \|T\|$, alors $\lambda \notin \sigma(T)$, puisque dans ce cas $\|T\|/|\lambda| < 1$ et

$$(\lambda - T) = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{1}{\lambda}T\right) \in GL(B).$$

Par ailleurs, il est évident que $\|R_\lambda\| \to 0$ lorsque $|\lambda| \to \infty$.

De ces remarques on déduit sans peine l'important théorème suivant:

Théorème 5.7. *Si* $T \in \mathrm{Op}(B)$, *alors* $\sigma(T) \neq \varnothing$.

Démonstration. Soit $\sigma(T) = \varnothing$. Alors la fonction R_λ est analytique pour tous les λ. La fonction $f(\lambda) = \varphi(R_\lambda x)$ est entière pour tous $x \in B$ et $\varphi \in B^*$. Par ailleurs $|f(\lambda)| \leqslant \|R_\lambda\| \cdot \|\varphi\| \cdot \|x\| \to 0$ lorsque $|\lambda| \to \infty$. D'après

le théorème de Liouville $f(\lambda)=0$. En comparant avec le théorème de Hahn-Banach, on arrive à une contradiction.

Exercice. $\sigma(T^*)=\sigma(T)$.

Si λ est une *valeur propre* de l'opérateur T, c'est-à-dire que $Tx=\lambda x$ pour un $x\neq 0$, alors il est évident que $\lambda\in\sigma(T)$. Si, par ailleurs, il existe une suite $x_n\in B$ telle que $\|x_n\|=1$ et $Tx_n-\lambda x_n\to 0$, alors $\lambda\in\sigma(T)$. Dans le dernier cas, on dit que λ est une *quasi-valeur propre* de l'opérateur T.

Exercice. Utiliser le théorème de Hahn-Banach et le théorème de Banach relatif au graphe fermé pour prouver que l'appartenance $\lambda\in\sigma(T)$ entraîne l'une (au moins) des trois possibilités suivantes : λ est une valeur propre de l'opérateur T; λ est une quasi-valeur propre de T; λ est une valeur propre de l'opérateur T^*.

Faisons quelques remarques sur les opérateurs bornés dans un espace hilbertien H.

Le théorème de Riesz affirme l'existence d'une application $R: H\to H^*$ identifiant les espaces H^* et H. Plus exactement, si $a\in H$, alors R associe à a une fonctionnelle $\varphi\in H^*$ telle que $\varphi(x)=(x, a)$. Cette application est additive et *semi-linéaire*, c'est-à-dire que $R(\lambda a)=\bar{\lambda}(Ra)$.

A tout opérateur $T\in \mathrm{Op}(H)$, l'application R associe l'opérateur $R^{-1}T^*R$ de H dans H. Cet opérateur $R^{-1}T^*R$ s'appelle *adjoint* de T et se note aussi T^*.

Ces notations ne prêtent généralement pas à confusion. Nous les adopterons avec les précautions d'usage. L'essentiel est de ne pas oublier que la formule $\sigma(T^*)=\sigma(T)$ sera remplacée par la formule $\sigma(T^*)=\sigma(T)$.

Il est évident que pour l'opérateur adjoint on a maintenant la relation

$$(Tx, y)=(x, T^*y), \qquad x, y\in H,$$

qui est souvent prise pour définition de l'opérateur T^* (ce procédé d'introduction de l'opérateur adjoint est utilisé plus bas dans une situation plus générale).

Décrivons une importante classe d'opérateurs compacts sur un espace hilbertien.

Soient H un espace hilbertien séparable, $\{e_i\}$ un système orthonormé complet de H, et T, un opérateur borné sur H. Posons

$$\|T\|_2=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\|Te_i\|^2\right)^{1/2}.$$

Si la série diverge, on convient que $\|T\|_2=\infty$. La norme $\|T\|_2$ s'appelle *norme de Hilbert-Schmidt* de l'opérateur T.

Théorème 5.8. 1) $\|T\|_2=\|T^*\|_2$;

2) *la norme de Hilbert-Schmidt est indépendante du choix du système complet* $\{e_i\}$;

3) $\|T\|\leqslant\|T\|_2$;

4) *si* $\|T\|_2<\infty$ *et* R *est un opérateur borné sur* H, *alors*

$$\|TR\|_2\leqslant\|T\|_2\|R\|,\ \|RT\|_2\leqslant\|R\|\cdot\|T\|_2;$$

5) *si* $\|T\|_2<\infty$, $\|S\|_2<\infty$, *alors* $\|T+S\|_2\leqslant\|T\|_2+\|S\|_2$.

Démonstration. Prouvons 1) et 2). Soit $\{e_i'\}$ un autre système orthonormé complet de H. On a

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|Te_i\|^2 = \sum_i \sum_k |(Te_i, e'_k)|^2 = \sum_k \sum_i |(e'_i, T^*e'_k)|^2 = \sum_i \|T^*e'_k\|^2, \quad (5.2)$$

où la permutation de l'ordre de sommation est licite, puisque tous les termes de la série sont >0. En particulier, si $e'_i = e_i$, alors (5.2) entraîne 1) et le cas général nous donne 2).

3) En tenant compte de 2), on obtient

$$\|T\|^2 = \sup_{\|u\|=1} \|T_u\|^2 = \sup_{\|u\|=1} \sum_{i=1}^{\infty} |(Tu, e_i)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|u\|=1} \sum_{i=1}^{\infty} \|u\|^2 \|T^*e_i\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|T^*e_i\|^2 = (\|T^*\|_2)^2 - (\|T\|_2)^2.$$

4) et 5) sont évidentes. C.Q.F.D.

Désignons par $B_2(H)$ l'ensemble des opérateurs dont est finie la norme de Hilbert-Schmidt. Du théorème 5.8 il résulte que $B_2(H)$ forme un idéal bilatère (non fermé) dans l'algèbre de Banach $\mathrm{Op}(H)$. De plus, on a la proposition suivante:

Théorème 5.9. 1) *L'espace $B_2(H)$ devient hilbertien s'il est muni du produit scalaire*

$$(T, S)_2 = \sum_{i=1}^{\infty} (Te_i, Se_i), \quad (5.3)$$

et de plus

$$(T, S)_2 = (S^*, T^*)_2.$$

2) *Les opérateurs de $B_2(H)$ sont compacts.*

Démonstration. 1) La série (5.3) converge absolument en vertu de l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski. Il est évident que $(T, S)_2$ vérifie tous les axiomes du produit scalaire. Donc

$$(T, S)_2 = \frac{1}{4} \{(\|T+S\|_2)^2 - (\|T-S\|_2)^2 +$$

$$+ i(\|T+iS_2\|)^2 - i(\|T-iS\|_2)^2\}. \quad (5.4)$$

Cette formule exprime que la définition du produit scalaire est indépendante du système $\{e_i\}$.

Prouvons maintenant que $B_2(H)$ est un espace complet. Supposons que $\|T_n - T_m\|_2 \to 0$ lorsque $n, m \to \infty$. D'après le théorème 5.8 la suite $\{T_n\}$ converge dans $\mathrm{Op}(H)$, c'est-à-dire qu'il existe un opérateur $T \in \mathrm{Op}(H)$ tel que $\|T_n - T\| \to 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout N, on a

$$\sum_{i=1}^{N} \|(T_n - T_m)e_i\|^2 \leqslant (\|T_n - T_m\|_2)^2 < \varepsilon^2,$$

si n, $m > n_0(\varepsilon)$. En passant à la limite lorsque $m \to \infty$, on obtient

$$\sum_{i=1}^{N} \|(T_n - T)e_i\|^2 \leqslant \varepsilon^2 .$$

De là il s'ensuit que $(T_n - T) \in B_2(H)$ et $\|T_n - T_2\| \leqslant \varepsilon$ pour $n \geqslant n_0(\varepsilon)$. c'est-à-dire que la suite $\{T_n\}$ converge vers $T \in B_2(H)$ pour la norme de Hilbert-Schmidt ; la formule $(T, S)_2 = (S^*, T^*)_2$ découle de (5.4).

2) Définissons un opérateur T_n (dégénéré) de dimension finie par les égalités : $T_n e_i = Te_i$ pour $i \leqslant n$, $T_n e_i = 0$ pour $i > n$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors un $N(\varepsilon)$ tel que $\sum_{i=n+1}^{\infty} \|Te_i\|^2 < \varepsilon^2$ pour $n \geqslant N(\varepsilon)$. Donc

$$\|T_n - T\| \leqslant \|T_n - T\|_2 = \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \|Te_i\|^2 \right)^{1/2} < \varepsilon .$$

Par conséquent, la suite d'opérateurs $\{T_n\}$ converge vers T pour la norme de l'espace $\mathrm{Op}(H)$ et donc l'opérateur T est compact. C.Q.F.D.

§ 6. Opérateurs adjoints

Commençons par introduire des opérations algébriques sur des opérateurs arbitraires (pas forcément bornés). Pour exprimer que l'opérateur A agit de B_1 dans B_2, on écrira $A : B_1 \to B_2$ au lieu de la notation plus volumineuse $A : D_A \to B_2$, $D_A \subset B_1$.

Définitions. On appelle *somme des opérateurs* $A_1 : B_1 \to B_2$ et $A_2 : B_1 \to B_2$ l'opérateur linéaire $A \stackrel{\text{déf}}{=} A_1 + A_2$ défini sur $D_A = D_{A_1} \cap D_{A_2}$ par la formule

$$Ax = A_1 x + A_2 x .$$

On appelle *produit*, ou *composition*, *des opérateurs* $A_1 : B_1 \to B_2$ et $A_2 : B_2 \to B_3$ l'opérateur $A : B_1 \to B_3$ défini pour tous les vecteurs $x \in D_{A_1}$ tels que $Ax \in D_{A_2}$ par la formule

$$Ax = A_2(A_1 x) .$$

Le produit des opérateurs A_1 et A_2 se note $A_2 A_1$. Le produit n fois par lui-même de l'opérateur A s'appelle *puissance n-ième* de A et se note A^n.

On appelle *produit* λA *d'un opérateur* $A : B_1 \to B_2$ *par un nombre* (complexe) λ l'opérateur $A' : B_1 \to B_2$ défini sur D_A et envoyant le vecteur x dans $\lambda \cdot Ax$.

On appelle *opérateur unité*, ou *identique*, $1 : B \to B$ l'opérateur qui envoie chaque vecteur $x \in B$ dans lui-même.

On appelle *opérateur nul* $0 : B_1 \to B_2$ l'opérateur qui envoie tout vecteur $x \in B_1$ dans le vecteur nul de l'espace B_2.

Si λ est un nombre complexe, 1 l'opérateur identique, on désignera l'opérateur $\lambda 1$ par λ.

On appellera *opérateur réciproque* $A^{-1}: B_2 \to B_1$ de l'opérateur $A: B_1 \to B_2$ l'application R_A sur D_A réciproque de $A: D_A \to R_A$ (si cette application réciproque existe). Tout opérateur A admettant un réciproque sera dit *inversible*.

L'ensemble des $x \in B_1$ tels que $Ax = 0$ s'appelle *noyau* de l'opérateur A et se note $\mathrm{Ker}(A)$. Il est évident que l'existence de l'opérateur A^{-1} (la réciprocité est comprise au sens de la définition ci-dessus) équivaut à la trivialité du noyau, c'est-à-dire au fait que $\mathrm{Ker}\,(A) = \{0\}$.

Désignons par $\mathcal{O}(B_1, B_2)$ l'ensemble des opérateurs linéaires de B_1 dans B_2. L'addition de $\mathcal{O}(B_1, B_2)$ est visiblement commutative et associative. L'ensemble $\mathcal{O}(B_1, B_2)$ admet un élément neutre pour l'addition, mais ce n'est pas un groupe abélien pour elle, car l'ensemble de définition commun de deux opérateurs n'est pas plus large que celui des deux termes, alors que l'élément neutre, c'est-à-dire l'opérateur nul, est défini sur l'espace B_1 tout entier. Néanmoins $\mathcal{O}(B_1, B_2)$ est muni de la soustraction

$$A_1 - A_2 \stackrel{\text{déf}}{=} A_1 + (-1)A_2.$$

Ceci étant, l'opérateur $0_{D_A} = A - A$ est la restriction de l'opérateur 0 à D_A.

Sur $\mathcal{O}(B_1, B_2)$ la multiplication par des nombres est associative

$$(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$$

et distributive

$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A, \qquad \lambda(A_1 + A_2) = \lambda A_1 + \lambda A_2.$$

La multiplication des opérateurs sur $\mathcal{O}(B, B)$ est associative. L'ensemble $\mathcal{O}(B, B)$ possède un élément neutre pour la multiplication. Les éléments de $\mathcal{O}(B, B)$ n'admettent pas tous un réciproque. Enfin, sur $\mathcal{O}(B, B)$ la multiplication n'est distributive pour l'addition que si un opérateur est multiplié à droite par la somme de deux autres:

$$(A_1 + A_2)A = A_1 A + A_2 A.$$

La formule $A(A_1 + A_2) = AA_1 + AA_2$ est généralement fausse. On demande au lecteur d'exhiber un exemple *ad hoc*.

Citons quelques résultats illustrant l'invariance de la propriété de fermeture par les opérations algébriques sur les opérateurs.

Théorème 6.1. *Soient $A: B_1 \to B_2$ un opérateur fermé, $A': B_1 \to B_2$ un homomorphisme, λ un nombre complexe. Les opérateurs $A + A'$ et λA sont alors fermés.*

La démonstration est laissée au soin du lecteur.

Théorème 6.2. *Soit $A: B_1 \to B_2$ un homomorphisme inversible (en tant qu'opérateur). Alors l'opérateur A^{-1} est fermé.*

Démonstration. Supposons que $y_n \in B_2$, $y_n \to y$ lorsque $n \to \infty$ et $A^{-1}y_n \to x$ lorsque $n \to \infty$. En appliquant l'homomorphisme A à la dernière

relation, on obtient $\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} AA^{-1}y_n = Ax$. De là on déduit que $y = Ax$, $x = A^{-1}y$. C.Q.F.D.

Théorème 6.3. *Si $A_1 : B_1 \to B_2$ est un homomorphisme et $A_2 : B_2 \to B_3$ un opérateur fermé, l'opérateur A_2A_1 est fermé.*

Démonstration. Soient $x_n \in B_1$ et $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Supposons par ailleurs que $\lim_{n\to\infty} A_2A_1x_n = z$. On a $\lim_{n\to\infty} A_1x_n = A_1x$, puisque A_1 est un homomorphisme. Par ailleurs, l'opérateur A_2 étant fermé, on a $\lim_{n\to\infty} A_2A_1x_n = A_2A_1x$. C.Q.F.D.

Théorème 6.4. *Soit $A : B \to B$ un opérateur fermé et supposons qu'il existe un nombre complexe λ tel que $(A+\lambda)^{-1}$ soit un homomorphisme. Alors, pour tout polynôme formel $P_k(x) = \sum_{j=0}^{k} a_j z^j$ l'opérateur $P_k(A)$ est fermé.*

Démonstration. Remarquons tout d'abord que tout polynôme $P(z)$ peut être représenté sous la forme d'un polynôme $Q(z+\lambda)$ de $z+\lambda$. L'opérateur $A+\lambda$ étant fermé, on peut sans nuire à la généralité admettre que $\lambda = 0$, c'est-à-dire que A^{-1} est un homomorphisme.

Raisonnons maintenant par récurrence; supposons que pour des complexes quelconques $c_0, \ldots, c_k$, l'opérateur $\sum_{j=0}^{k} c_jA^j$ est fermé et montrons qu'il en est de même de l'opérateur $\sum_{j=0}^{k+1} c_jA^j$ quels que soient les complexes $c_0, \ldots, c_{k+1}$. Soient $x_n \to x$, $\sum_{j=0}^{k+1} c_jA^jx_n \to y$. En appliquant l'homomorphisme A^{-1} aux deux membres de la dernière relation, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{j=0}^{k} c_{j+1}A^jx_n + c_0A^{-1}x_n \right\} = A^{-1}y.$$

Comme $x_n \to x$ et que l'opérateur $\sum_{j=0}^{k} c_{j+1}A^j$ est fermé, on peut mettre cette égalité sous la forme

$$\sum_{j=0}^{k} c_{j+1}A^jx = A^{-1}(y - c_0x).$$

En appliquant l'opérateur A aux deux membres, on trouve

$$\sum_{j=0}^{k+1} c_jA^jx = y.$$

C.Q.F.D.

Corollaire. *Si $A: B \to B$ est un opérateur admettant une fermeture $\overline{A}$ et remplissant les conditions du théorème* 6.4, *et P un polynôme, alors l'opérateur $P(\overline{A})$ est le prolongement fermé de l'opérateur $p(A)$.*

Soient B_1 et B_2 des espaces de Banach, B_1^* et B_2^* leurs duaux respectifs. Soient par ailleurs $T: D_T \to B_2$, $D_T \subset B_1$, un opérateur linéaire, $\overline{D}_T = B_1$. Désignons par L l'ensemble des fonctionnelles g de B_2^* telles que

$$\sup_{x \in D_T} \frac{|g(Tx)|}{\|x\|} < \infty .$$

c'est-à-dire telles qu'il existe un élément $f \in B_1^*$ possédant la propriété suivante :

$$g(Tx) = f(x) \quad \text{pour tous les} \quad x \in D_T .$$

La fonctionnelle f définie par cette formule est unique, puisque D_T est dense dans B_1.

Définition. L'opérateur $T^*: L \to B_1^*$, $L \subset B_2^*$, défini par

$$(T^* g = f) \Rightarrow (g(Tx) = f(x)) \quad \text{pour tout } x \in D_T ,$$

s'appelle *adjoint de* T.

Théorème 6.5. *Soit $D_T \subset B_1$ le domaine de définition dense dans B_1 d'un opérateur $T: D_T \to B_2$ d'ensemble des valeurs R_T. Alors, les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

a) $\overline{R}_T = B_2$; b) $(T^* g = 0) \Rightarrow (g = 0)$.

Démonstration. Soient $\overline{R}_T = B_2$ et $T^* g = 0$. Si $y \in R_T$, il existe un x tel que $y = Tx$. Donc

$$g(y) = g(Tx) = T^* g(x) = 0 .$$

L'ensemble R_T étant dense dans B_2, on en déduit que $g = 0$.

Réciproquement, supposons que l'équation $T^* g = 0$ n'admet que la solution triviale, que R_T n'est pas dense dans B_2 et que $y \in B_2$, $y \notin \overline{R}_T$. Considérons une variété linéaire $G \subset B_2$ composée des éléments u de la forme $u = \alpha y + z$, où $z \in \overline{R}_T$. Définissons sur G une fonctionnelle

$$\tilde{g}(\alpha y + z) = \alpha , \qquad z \in \overline{R}_T .$$

La fonctionnelle $\tilde{g}$ est bornée ; en effet, en admettant le contraire on trouve qu'il existe une suite de nombres $\{\alpha_j\}$ et une suite $\{z_j\}$ d'éléments de $\overline{R}_T$ telles que $\lim_{j \to \infty} \alpha_j = \infty$ et $\|\alpha_j y + z_j\| \leqslant 1$ pour tout nombre naturel j. Donc

$$\left\| y + \frac{z_j}{\alpha_j} \right\| \leqslant \frac{1}{|\alpha_j|} ,$$

de sorte que

$$y = \lim_{j \to \infty} \left(-\frac{1}{\alpha_j} z_j \right) ,$$

ce qui contredit le fait que l'ensemble $\overline{R}_T$ est fermé. Le théorème de Hahn-Banach affirme l'existence d'une fonctionnelle $g \in B_2^*$ telle que $g(u) = \tilde{g}(u)$ pour tout $u \in G$. Comme $g(Tx) = 0$ pour tout $x \in D_T$, il vient que $T^* g = 0$. De là il s'ensuit par hypothèse que $g = 0$; cette contradiction avec l'égalité $g(y) = 1$ prouve le théorème.

Traitons maintenant le cas où $B_1 = B_2 = H$, où H est un espace hilbertien; toute fonctionnelle linéaire continue f sur H est de la forme $f(x) = (x, y_f)$, de sorte que H^* peut être identifié à H. Soit T: $D_T \to H$, $D_T \subset H$, un opérateur linéaire dont l'ensemble de définition est dense dans H.

Définition. Un opérateur T est *symétrique* si

$$(T\varphi, f) = (\varphi, Tf)$$

pour tous $\varphi \in D_T$, $f \in D_T$.

Il est évident que si T est un opérateur symétrique, l'opérateur T^* est son prolongement:

$$T \subset T^*.$$

Théorème 6.6. *L'opérateur T^* est fermé. En particulier, un opérateur symétrique admet une fermeture.*

Démonstration. Soient

$$g_n \to g, \tag{6.1}$$

$$T^* g_n \to h \tag{6.2}$$

lorsque $n \to \infty$. Montrons que $h = T^* g$. Pour tout $\varphi \in D_T$, on a

$$(T\varphi, g_n) = (\varphi, T^* g_n). \tag{6.3}$$

En passant à la limite lorsque $n \to \infty$, on trouve

$$(T\varphi, g) = (\varphi, h). \tag{6.4}$$

Par définition de l'opérateur T^*, l'égalité (6.4) signifie que $h = T^* g$. C.Q.F.D.

Pour les opérateurs symétriques, il s'ensuit du théorème 6.6 que $\overline{T} \subset T^*$.

Définitions. Un opérateur T est *auto-adjoint* (ou *hermitien*) si

$$T = T^*.$$

Un opérateur T est *essentiellement auto-adjoint* si

$$\overline{T} = T^*.$$

La dernière définition distingue une importante classe d'opérateurs qui deviennent auto-adjoints par l'opération de fermeture.

Exercice. Montrer que $\overline{T} = T^{**}$

Exemple. Soit $H=L_2(\mathbf{R})$, et soit T un opérateur défini sur l'ensemble $D_T=C_0^\infty(\mathbf{R})$ à l'aide de la formule $T\varphi(x)=i\varphi'(x)$. L'opérateur T est symétrique, puisque pour tous $\varphi, f\in C_0^\infty(\mathbf{R})$

$$(T\varphi, f)=\int_{\mathbf{R}}\left(\overline{i\frac{d\varphi(x)}{dx}}\right)f(x)\,dx=-i\int_{\mathbf{R}}\frac{d\bar{\varphi}(x)}{dx}f(x)\,dx=$$

$$=i\int_{\mathbf{R}}\bar{\varphi}(x)\frac{df(x)}{dx}\,dx=\int_{\mathbf{R}}\bar{\varphi}(x)\left(i\frac{df(x)}{dx}\right)dx=(\varphi, Tf).$$

Il est évident que T^* est le prolongement de l'opérateur T. Montrons que T n'est pas fermé. Considérons une suite de fonctions $\{f_n\}$ de $C_0^\infty(\mathbf{R})$ convergeant vers $f=\dfrac{1}{(x^2+1)}$ dans $L_2(\mathbf{R})$:

$$f_n(x)=\frac{1}{x^2+1}\alpha_n(x),$$

où $0\leqslant\alpha_n(x)\leqslant 1$, $\alpha_n\in C_0^\infty(\mathbf{R})$ et $\alpha_n(x)=1$ pour $|x|<n$, et en outre $|\alpha_n'(x)|$ est $\leqslant$ à une constante c indépendante de n. On a

$$\|Tf_n-T^*f\|^2_{L_2(\mathbf{R})}=\int_{\mathbf{R}}\left|(\alpha_n(x)-1)\frac{2x}{(x^2+1)^2}+\frac{1}{x^2+1}\alpha_n'(x)\right|^2dx\leqslant$$

$$\leqslant 8\int_{|x|>n}\frac{x^2}{(x^2+1)^4}\,dx+2c^2\int_{|x|>n}\frac{dx}{(x^2+1)^2}\to 0 \quad \text{lorsque } n\to\infty.$$

Donc $f_n\to f$, $Tf_n\to T^*f$. Or $f\notin D_T$, donc T n'est pas fermé.

Exercice. Montrer que l'opérateur T de l'exemple ci-dessus est essentiellement auto-adjoint.

Théorème 6.7. *Si $A: D_A\to H$, $D_A\subset H$, est un opérateur auto-adjoint admettant un réciproque borné, alors $\overline{D}_{A^n}=H$ pour tout n naturel.*

Démonstration. Le théorème 6.5 nous dit que $\overline{R}_A=H$. Si $\|A^{-1}\|<\infty$, alors $R_A=H$. En effet, prolongeons A^{-1} en un homomorphisme $F: H\to H$. Alors l'équation $Ax=y$ admet la solution $x=Fy$ pour tout $y\in H$. En effet, soit $\{y_i\}$ une suite d'éléments de R_A convergeant vers y. Alors $AFy_i=AA^{-1}y_i=y_i$. D'autre part, $Fy_i\to Fy$, puisque F est borné, et $Afy=y$, puisque A est fermé.

Ainsi $D_{A^{-1}}=H$. D'où il résulte que l'opérateur A^{-n} est un homomorphisme de H dans H pour tout n naturel. La symétrie de A entraîne immédiatement celle de A^{-n}, de sorte que A^{-n} est auto-adjoint. En appliquant le théorème 6.5, on trouve que $\overline{D}_{A^n}=\overline{R}_{A^{-n}}=H$. C.Q.F.D.

§ 7. Fonctions à valeurs dans un espace de Banach

Définitions. L'application

$$(t_1, \ldots, t_n) \to \varphi(t_1, \ldots, t_n) \in B, \qquad t = (t_1, \ldots, t_n) \in \Omega \subset \mathbf{R}^n$$

sera appelée *fonction* φ définie sur un ensemble $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ et à valeurs dans un espace de Banach B.

Soit φ une fonction définie sur $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ et à valeurs dans B, et soit t_0 un point limite de Ω. Si $\|\varphi(t) - g\| \to 0$ lorsque $t \to t_0$, on dira que g est *limite* de $\varphi(t)$ et on écrira $g = \lim_{t \to t_0} \varphi(t)$ (on se servira des notations usuelles relatives aux limites).

On dit qu'une fonction φ à valeurs dans un espace de Banach B est continue en un point $t_0 \in \Omega$ si $\varphi(t) \to \varphi(t_0)$ lorsque $t \to t_0$.

Exemple. Soit $(x, t) \to \psi(x, t)$, $x \in \mathbf{R}^n$, $t \in \mathbf{R}$, une fonction complexe (c'est-à-dire à valeurs dans $\mathbf{C}$) telle que $\psi : x \to \psi(x, t)$ soit continue et de carré intégrable sur $\mathbf{R}^n$ pour tout t fixe. La fonction ψ peut alors être traitée comme une fonction définie sur $\mathbf{R}$ et à valeurs dans $L_2(\mathbf{R}^n)$.

On appelle *dérivée partielle* $\partial\varphi(t)/\partial t_j$ d'une fonction φ définie au voisinage d'un point $t \in \mathbf{R}^n$ et à valeurs dans B la limite, si elle existe,

$$\lim_{\Delta t_j \to 0} \frac{\varphi(t_1, \ldots, t_{j-1}, t_j + \Delta t_j, t_{j+1}, \ldots, t_n) - \varphi(t)}{\Delta t_j}$$

On se propose maintenant de définir sous une forme appropriée l'intégrale d'une fonction à valeurs dans un espace de Banach B. Commençons par les fonctions définies sur un ensemble compact quarrable $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. On rappelle qu'un ensemble Ω auquel on peut étendre une Riemann-intégrale de fonctions numériques usuelles est dit *quarrable*. En particulier, Ω est quarrable s'il est un domaine compact de $\mathbf{R}^n$ à bord différentiable (dans la suite nous n'aurons affaire qu'à de tels ensembles).

On convient que la notion de Riemann-intégrale de fonctions numériques est une notion première. Si $u : \Omega \to B$ est une fonction définie sur Ω et à valeurs dans B, ψ une fonctionnelle linéaire continue sur B et si l'intégrale $\int_\Omega u(t)\, dt$ est convenablement définie, alors

$$\psi\left(\int_\Omega u\, dt\right) = \int_\Omega \psi(u)\, dt.$$

Cette formule peut servir à définir une intégrale de la fonction $u(t)$.

Définition. On appelle (*Riemann-*) *intégrale* $\int_\Omega u(t)\, dt$ d'une fonction $u : \Omega \to B$ un élément $b \in B$ tel que $\psi(b) = \int_\Omega \psi(u(t))\, dt$ pour tous les $\psi \in B^*$.

Du théorème de Hahn-Banach il résulte que l'élément b, s'il existe, est unique. Le problème consiste donc à en établir l'existence. Comme dans le cas de fonctions numériques, cette intégrale n'existe visiblement pas tou-

jours. Mais il est immédiat de voir qu'*elle existe nécessairement si la fonction $u(t)$ est continue*. L'intégrale de fonctions continues $u(t)$ jouit des propriétés ordinaires. En particulier, $\left\| \int_\Omega u(t)\,dt \right\| \leqslant \int_\Omega \|u(t)\|\,dt$. Par ailleurs, l'élément $b = \int_\Omega u(t)\,dt$ peut être obtenu comme la limite de sommes intégrales de Riemann: si $\varepsilon > 0$ et $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$ est une partition assez fine de l'ensemble Ω en sous-ensembles quarrables, alors $\left\| \sum_{i=1}^{n} u(t_i)\, v(\Omega_i) - b \right\| \leqslant \varepsilon$ où $t_i \in \Omega_i$, $v(\Omega_i)$ étant le volume de Ω_i.

Formulons un théorème relatif au passage à la limite sous le signe d'intégration.

Théorème 7.1. *Soit $\{T_n\}$ une suite de fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs dans un espace de Banach B telles que $T_n(t) \to T(t)$ lorsque $n \to \infty$ pour la norme de B quel que soit $t \in [a, b]$ fixe, T étant une fonction continue sur $[a, b]$. Si $\|T_n(t)\| \leqslant c$, où c est une constante, alors*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b T_n(t)\,dt = \int_a^b T(t)\,dt.$$

La classe des fonctions intégrables peut être considérablement élargie (par rapport à la classe des fonctions continues) par complétion de l'espace. Plus exactement, posons $\|u\| = \int_\Omega \|u(t)\|\,dt$. Ceci définit une norme sur l'espace $\tilde{L}(B, \Omega)$ des fonctions continues sur Ω à valeurs dans B.

Le complété $L(B, \Omega)$ de l'espace $\tilde{L}(B, \Omega)$ s'appelle *espace des fonctions Bochner-intégrables sur* Ω. Si $B = \mathbf{R}$, on obtient notamment une *classe de fonctions Lebesgue-intégrales sur* Ω.

On peut généraliser la notion d'intégrale sur la classe des ensembles non compacts Ω de la manière suivante. Supposons que l'intersection de Ω et de chaque boule est un ensemble quarrable. Supposons tout d'abord que $u: \Omega \to B$ est une fonction continue. On dit qu'une fonction u est *intégrable* si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un c tel que $\left\| \int_{\Omega_1} u(t)\,dt \right\| < \varepsilon$ pour tout sous-ensemble quarrable $\Omega_1 \subset \Omega$, extérieur à une boule de rayon c. Si cette condition est remplie, alors $\int_\Omega u(t)\,dt$ se définit comme la limite des intégrales $\int_{\Omega \cap (\|t\| \leqslant c)} u(t)\,dt$ pour $c \to \infty$. En particulier, toutes les conditions sont remplies si est finie l'intégrale impropre de Riemann $\int_\Omega \|u(t)\|\,dt$.

Définition. Soit Ω un ensemble quarrable de $\mathbf{R}^n$, et soit $\tilde{L}(B, \Omega)$ l'espace des fonctions continues sur Ω à valeurs dans B et de norme finie $\|u\| = \int_\Omega \|u(t)\|\,dt$. Le complété $L(B, \Omega)$ de cet espace s'appelle *espace des*

fonctions Bochner-intégrables sur Ω. En outre, si

$$v \in L(B, \Omega) \text{ et } u_k \to v, \text{ où } u_k \in \tilde{L}(B, \Omega),$$

alors $\lim_{k\to\infty} \int_\Omega u_k(t)\,dt$ existe et se note $\int_\Omega v\,dt$. L'élément $\int_\Omega v\,dt \in B$ ne dépend pas du choix de la suite $\{u_k\}$.

L'intégrale de Bochner jouit des propriétés classiques des integrales impropres absolument convergentes.

En conclusion, à titre d'exemple de fonction à valeurs dans un espace de Banach, considérons la solution de l'équation d'évolution. Soient A un opérateur dans un espace hilbertien H, u une fonction à valeurs dans H. On appelle *équation d'évolution* une équation de la forme

$$\frac{du}{dt} + Au = 0, \quad 0 \in [t, T]. \tag{7.1}$$

Nous n'étudierons que les solutions continûment dérivables de cette équation. Donnons-nous la condition initiale:

$$u(0) = u_0 \in D_A. \tag{7.2}$$

On a le théorème suivant:

Théorème 7.2. *Supposons que pour tout élément* h *d'un ensemble* M *dense dans* H *et pour tout intervalle* $[a, b] \subset [0, T]$, *il existe une fonction* v *continue sur* $[0, T]$ *à valeurs dans* H *telle que*

$$\frac{dv}{dt} - A^* v(t) = \begin{cases} h \text{ pour } t \in]a, b[, \\ 0 \text{ pour } t \notin]a, b[, \end{cases} \quad v(T) = 0, \tag{7.3}$$

où A^* *est l'adjoint de* A.

Sous ces conditions, le problème de Cauchy (7.1), (7.2) *admet une seule solution.*

Démonstration. Si des fonctions u_1 et u_2 sont solutions du problème de Cauchy (7.1), (7.2), la différence $u = u_1 - u_2$ est solution de l'équation (7.1) avec la condition initiale $u(0) = 0$. Il suffit donc de montrer que le problème

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = 0, \\ u(0) = 0 \end{cases} \tag{7.4}$$

n'admet que la solution triviale. Soit u une solution de ce problème. Désignons par $v_{h,a,b}$ la solution du problème (7.3). Alors

$$\int_a^b (u(t), h)\,dt = \int_0^T \left(u(t), \frac{dv_{h,a,b}}{dt} - A^* v_{h,a,b}(t)\right) dt,$$

où $(\cdot, \cdot)$ est le produit scalaire. Une intégration par parties de

$$\int_0^T \left(u(t), \frac{dv_{h,a,b}}{dt}\right) dt,$$

nous donne

$$\int_0^T \left(u(t), \frac{dv_{h,a,b}}{dt}\right) dt = \left(u(T), v_{h,a,b}(T)\right) - \left(u(0), v_{h,a,b}(0)\right) - \\ - \int_0^T \left(\frac{du}{dt}, v_{h,a,b}(t)\right) dt = - \int_0^T \left(\frac{du}{dt}, v_{h,a,b}(t)\right) dt.$$

Par définition de l'opérateur adjoint, on peut écrire

$$\int_0^T \left(u(t), A^* v_{h,a,b}(t)\right) dt = \int_0^T \left(Au(t), v_{h,a,b}(t)\right) dt.$$

Donc

$$\int_a^b \left(u(t), h\right) dt = - \int_0^T \left(\frac{du}{dt} + Au(t), v_{h,a,b}(t)\right) dt = 0.$$

Soient t_0 un point quelconque de $[0, T]$, ε un nombre >0. Il existe alors un $\delta > 0$ et un $h \in M$ tels que $\|u(t_0) - h\| < \varepsilon$ et $\|u(t) - u(t_0)\| < \varepsilon$ pour $|t - t_0| < \delta$. On a pour $|t - t_0| < \delta$:

$$\left(u(t), h\right) = \left(u(t) - u(t_0) + u(t_0),\right.$$

$$\left. h - u(t_0) + u(t_0)\right) = \left(u(t) - u(t_0), h\right) + \left(u(t_0), h - u(t_0)\right) + \|u(t_0)\|^2;$$

$$\left|\|u(t_0)\|^2 - \left(u(t), h\right)\right| \leqslant \left|\left(u(t) - u(t_0), h\right)\right| + \left|\left(u, (t_0), h - u(t_0)\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \|h\| + \varepsilon \|u(t_0)\| \leqslant 2\varepsilon \|u(t_0)\| + \varepsilon^2.$$

Donc

$$2\|u(t_0)\|^2 \varepsilon = \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \|u(t_0)\|^2 dt \leqslant \left| \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \left(u(t), h\right) dt \right| + 2\varepsilon\left(2\varepsilon \|u(t_0)\| + \varepsilon^2\right) =$$

$$= 4\varepsilon^2 \|u(t_0)\| + 2\varepsilon^3, \quad \|u(t_0)\|^2 \leqslant 2\varepsilon \|u t_0)\| + \varepsilon^2 \to 0$$

lorsque $\varepsilon \to +0$. Donc, $u(t_0) = 0$. C.Q.F.D.

§ 8. Analyse dans un espace de Banach

1. Applications différentiables d'espaces de Banach. Soient B_1 et B_2 des espaces de Banach (sur le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$), $F: U \to B_2$ une application d'un ouvert $U \subset B_1$ dans B_2. Comme en analyse classique, on appellera *différentielle de l'application F en un point $x_0 \in U$* la partie linéaire de l'accroissement $F(x)-F(x_0)$. Plus exactement, on dira qu'une application F est *différentiable* en $x_0 \in U$ s'il existe une application continue linéaire $A: B_1 \to B_2$ (la *dérivée de Fréchet* de l'application F) telle que $F(x_0+h)-F(x_0)=Ah+o(h)$, pourvu que $x_0+h \in U$.

De la définition il résulte aussitôt que A est unique dès lors qu'elle existe. L'application A est généralement désignée par $F'(x_0)$.

Une application F est différentiable sur un ouvert $U \subset B_1$ si elle l'est en tout point $x \in U$. Une application $F: U \to B_2$ appartient à la classe C^1 si F est différentiable sur U et $F': U \to \mathrm{Hom}(B_1, B_2)$ est continue.

Exemples. a) $B_1=\mathbf{R}^n$, $B_2=\mathbf{R}^m$, F est une application différentiable. b) $B_1=\mathbf{C}^n$, $B_2=\mathbf{C}^m$, F est une application analytique. c) $B_1=\mathbf{R}$, B_2 est un espace de Banach, F une fonction différentiable à valeurs dans B_2. d) Si F est une application constante, i.e. $F: B_1 \to y_0 \in B_2$, alors $F'(x)=0$, $\forall x \in B_1$. e) Si $F: B_1 \to B_2$ est une application bilinéaire continue, alors la dérivée de l'application F en (x_0^1, x_0^2) est donnée par la formule: $F'(x_0^1, x_0^2) \times (h_1, h_2)=F(h_1, x_0^2)+F(x_0^1, h_2)$.

Les dérivées supérieures $F^{(k)}$, $k \geqslant 2$, de l'application $F: U \to B_2$ se déterminent par récurrence. Ainsi $F^{(2)}(x_0)$ se définit comme la dérivée de l'application $F': U \to \mathrm{Hom}(B_1, B_2)$, où $F': x \to F'(x)$, $x \in U$.

Remarque. On peut définir de manière équivalente la dérivée seconde comme une application bilinéaire continue $F^{(2)}(x_0): B_1 \times B_1 \to B_2$ vérifiant pour les petits h l'égalité

$$F(x_0+h)-F(x_0)=F'(x_0)\,h+\frac{1}{2}F^{(2)}(x_0)\,(h, h)+o(|h|^2).$$

Les dérivées définies ci-dessus sont justiciables des règles classiques du calcul différentiel. Ainsi, la règle de dérivation d'une fonction composée peut être formulée comme suit:

Théorème 8.1. *Soient données les applications $F_1: U_1 \to B_2$, $U_1 \subset B_1$, $F_2: U_2 \to B_3$, $U_2 \subset B_2$, $F(x_0)=y_0$, $x_0 \in U_1$, $y_0 \in U_2$. Si l'application F_1 est dérivable en x_0 et F_2 en y_0, l'application $F=F_2 \circ F_1$ l'est en x_0 et*

$$F'(x_0)=F_2'(y_0) \circ F_0'(x_0).$$

Démonstration. Les applications F_1 et F_2 sont par hypothèse dérivables en x_0 et y_0 respectivement. Donc

$$F_1(x_0+h)-F_1(x_0)=F_1'(x_0)\,h+o(h),$$
$$F_2(y_0+\tau)-F_2(y_0)=F_2'(y_0)\,\tau+o(\tau).$$

Par ailleurs,

$$F(x_0+h)-F(x_0)=F_2(F_1(x_0+h))-F_2(F_1(x_0))=F_2'(y_0)\,\tau+o(\tau),$$

où $\tau=F_1(x_0+h)-F_1(x_0)$. Donc

$$F(x_0+h)-F(x_0)=F_2'(y_0)\,(F_1'(x_0)\,h+o(h))+o(\tau)=F_2'(y_0)\circ F_1'(x_0)\,h+o(h).$$

Théorème 8.2. (théorème de la moyenne). *Soit $F: U\to B_2$, $U\subset B_1$ une application de la classe C^1. Si x_1, $x_2\in U$ sont tels que l'intervalle $x_1+t(x_2-x_1)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, est contenu dans U, alors*

$$\|F(x_1)-F(x_2)\|\leqslant\|x_1-x_2\|\sup\|F'(z)\|,$$

où la borne supérieure est prise sur tous les points z de l'intervalle indiqué.

Démonstration. Comme

$$F(x_1)-F(x_2)=\int_0^1 F'(x_1+t(x_2-x_1))\,(x_2-x_1)\,dt,$$

il vient

$$\|F(x_1)-F(x_2)\|\leqslant\int_0^1\|F'(x_1+t(x_2-x_1))\,(x_2-x_1)\|\,dt\leqslant$$
$$\leqslant\|x_2-x_1\|\sup\|F'(z)\|.$$

2. Applications contractantes. Soit $F: B\to B$ une application d'un espace de Banach B dans lui-même.

Définition. On dit que l'application F est *contractante* s'il existe une constante $\lambda\in]0,1[$ telle que

$$\|F(x)-F(y)\|\leqslant\lambda\,|x-y\|$$

pour tous vecteurs x, $y\in B$.

De la définition il résulte immédiatement que F est continue. Si F appartient en outre à la classe C^1, alors pour qu'elle soit contractante, il suffit que

$$\sup_{x\in B}\|F'(x)\|\leqslant\lambda<1.$$

Un point $x\in B$ est un *point fixe* (ou *invariant*) par l'application F si $F(x)=x$.

Théorème 8.3. (théorème du point fixe). *Soit $F: B\to B$ une application contractante d'un espace de Banach B dans lui-même. Il existe alors un point de B et un seul fixe par F, et de plus pour tout $x\in B$ ce point est la limite de la suite*

$$x_n=F^{(n)}(x),\qquad F^n=\underbrace{F\circ\ldots\circ F}_{n\text{ fois}}.$$

Démonstration. Supposons que $x_n=F^n(x)$ pour un point $x\in B$. Montrons que la suite $\{x_n\}$ est de Cauchy. En effet, du fait que

$\|F(x)-F(y)\| \leqslant \lambda \|x-y\|$ et $x_{n+1}=F(x_n)$ il vient $\|x_{n-1}-x_n\| = \|F(x_n)-F(x_{n-1})\| \leqslant \lambda \|x_n-x_{n-1}\|$, d'où $\|x_{n-1}-x_n\| \leqslant \lambda^n \|x_1-x_0\|$. Par ailleurs,

$$\|x_{n+k}-x_n\| = \left\| \sum_{i=1}^{n+k-1} (x_{i+1}-x_i) \right\| \leqslant \sum_{i=n}^{n+k-1} \|x_{i+1}-x_i\| \leqslant \frac{\lambda^{n+k}}{1-\lambda} \|x_1-x_0\|.$$

Soit $y=\lim x_n$. Alors $F(y)=y$, puisque F envoie la suite $\{x_n\}$ dans elle-même et est continue.

Montrons qu'il existe un seul point fixe par F. Soient $y_1 \neq y_2$ deux points fixes par F. Alors $\|y_1-y_2\| = \|F(y_1)-F(y_2)\| \leqslant \lambda \|y_1-y_2\|$, ce qui contredit la condition que $y_1 \neq y_2$.

Corollaire. *Si une application $F: B \to B$ est telle que F^n est contractante pour un entier $n \geqslant 0$, alors il existe un seul point fixe par l'application F.*

Démonstration. Posons $G=F^n$. Le théorème 8.3 affirme l'existence d'un seul point fixe $y \in B$ par l'application G. Par ailleurs Fy est aussi fixe par l'application G, puisque $Fy=FGy=GFy$. Donc $Fy=y$.

Le point y est unique, puisque les points fixes par F le sont aussi par G.

Indiquons en conclusion quelques exemples d'application du théorème du point fixe. Le plus important exemple d'application de ce théorème aux équations différentielles ordinaires sera traité dans le numéro suivant.

Exemples. a) Si $F: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ est une application dérivable dont la matrice jacobienne $J_x(F)$ vérifie la condition $\sup_{x \in \mathbf{R}} \|J_x(F)\| \leqslant \lambda < 1$, il existe alors un seul point fixe par F.

b) Soient $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ des fonctions dérivables; si

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^n} \left\| \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} + \delta_{ij} \right) \right\| = \lambda < 1,$$

le système d'équations

$$\begin{aligned} f_1(x_1 \ldots x_n) &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ f_n(x_1 \ldots x_n) &= 0 \end{aligned}$$

admet une solution (et une seule).

3. Equations différentielles ordinaires dans un espace de Banach. Dans ce numéro on appliquera le théorème du point fixe à la démonstration de l'existence et de l'unicité des solutions des équations différentielles ordinaires dans un espace de Banach.

Soit $F: B \times \mathbf{R} \to B$ une application continue. Considérons l'équation différentielle ordinaire

$$dx/dt = F(x, t). \tag{8.1}$$

Cherchons la solution de l'équation (8.1) qui vérifie la condition initiale $x(t_0)=x_0$.

La possibilité d'appliquer le théorème du point fixe à l'étude de ce problème est basée sur la remarque simple suivante : l'équation différentielle (8.1) est équivalente à l'équation intégrale

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} F(x(s), s)\, ds. \tag{8.2}$$

Les solutions de l'équation (8.2) peuvent être traitées comme des points fixes par l'application

$$\mathscr{F} : x(t)\to x_0+\int_{t_0}^{t} F(x(s), s)\, ds,$$

et donc on peut appliquer le théorème du point fixe moyennant certaines conditions sur F.

Théorème 8.4. *Si l'application F remplit les conditions suivantes*:

$$\|F(x, t)\| \leqslant M_1+M_0\|x\|,$$
$$\|F(x_1, t)-F(x_2, t)\| \leqslant M_2\|x_2-x_1\|,$$

l'équation (8.1) *admet une seule solution $x(t)$, $x(t_0)=x_0$, sur l'intervalle $]-\infty, \infty[$ tout entier, quels que soient $x_0\in B$ et $t_0\in]-\infty, \infty[$.*

Démonstration. Considérons l'application

$$\mathscr{F} : x(t)\to x_0+\int_{t_0}^{t} F(x(s), s)\, ds \overset{\text{déf}}{=} (\mathscr{F}x)(t).$$

Montrons que $\mathscr{F}$ est une application de $C(B)$ dans $C(B)$, $C(B)$ étant l'espace de Banach des fonctions $x(t)$ continues en t à valeurs dans B et de norme

$$\|x\| = \sup_{t\in[a, b]} \|x(t)\|_B.$$

En effet, de la définition de $\mathscr{F}$ et des hypothèses du théorème, il s'ensuit que

$$\|\mathscr{F}x(t)\| \leqslant \|x_0\|+(M_1+M_0\|x\|)\,|t-t_0|,$$

i.e. $\mathscr{F}(C_{[a, b]}(B)) \subset C_{[a, b]}(B)$.

Majorons la différence

$$\|\mathscr{F}x_1(t)-\mathscr{F}x_2(t)\| \leqslant \int_{t_0}^{t} \|F(x_2(s), s)-F(x_1(s), s)\|\, ds \leqslant$$
$$\leqslant M_2\int_{t_0}^{t} \|x_2(s)-x_1(s)\|\, ds \leqslant M_2|t-t_0|\,\|x_2-x_1\|$$

Une récurrence sur n nous donne

$$\|\mathscr{F}^n x_2(t)-\mathscr{F}^n x_1(t)\| \leqslant \frac{[M_2|t-t_0|]^n}{n!}\,\|x_2-x_1\|$$

ou

$$\|\mathscr{F}^n x_2 - \mathscr{F}^n x_1\| \leqslant \frac{[M_2(b-a)]^n}{n!} \|x_2 - x_1\|$$

La dernière inégalité exprime que l'application $\mathscr{F}^n$ est contractante dans $C_{[a,b]}(B)$ pour n assez grand. Il existe donc un seul point $x_{[a,b]}(t)$ de $C_{[a,b]}(B)$ fixe par $\mathscr{F}$. De l'unicité du point fixe il s'ensuit que si $[a_1, b_1] \subset [a_2, b_2]$, la restriction de $x_{[a_2,b_2]}(t)$ à $[a_1, b_1]$ est confondue avec $x_{[a_1,b_1]}(t)$. Il existe donc une solution $x(t) = \lim_{n\to\infty} x_{[t_0-n,\, t_0+n]}(t)$ définie sur l'intervalle $]-\infty, \infty[$ tout entier.

§ 9. Algèbres normées et de Banach

Soit B une algèbre sur le corps $\mathbf{C}$ des complexes; B est en outre un espace normé. On dira que B est une *algèbre topologique* si la multiplication est continue par rapport à chaque facteur. En d'autres termes, si $a_k \to a$ et $b_k \to b$, alors $a_k b \to ab$ et $ab_k \to ab$. A noter que la relation $a_k b_k \to ab$ peut être mise en défaut. En effet, supposons par exemple que B est l'espace des suites à support borné $a = \{\xi^{(k)}\}$, $k \geqslant 1$, muni des opérations naturelles et de la norme

$$\|a\| = \sum_1^\infty \frac{|\xi^{(k)}|}{k^2}.$$

Il est immédiat de voir que B est une algèbre topologique. Mais en posant $a_n = \{\xi_n^{(k)}\}$, où

$$\xi_n^{(k)} = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad k < n, \\ k^{1/2} & \text{pour} \quad n \leqslant k \leqslant 2n, \\ 0 & \text{pour} \quad k > 2n, \end{cases}$$

on obtient $\|a_n\| \to 0$ et $\|a_n^2\| \geqslant c > 0$.

Si l'algèbre B n'est pas unitaire, on peut lui ajouter une unité, en considérant l'algèbre B_1 des sommes formelles $\lambda + a$, où $\lambda \in \mathbf{C}$, $b \in B$. L'espace B_1 est muni de la norme $\|\lambda + a\| = |\lambda| + \|a\|$. Il est aisé de voir que B_1 est une algèbre topologique et que l'espace quotient B_1/B est à une dimension.

On dira que B est une *algèbre normée* s'il existe une constante C telle que

$$\|xy\| \leqslant C\|x\| \cdot \|y\| \tag{9.1}$$

pour tous les $x, y \in B$.

Il est aisé de montrer que *la complétée d'une algèbre normée est une algèbre normée* (dans laquelle B est une sous-algèbre partout dense).

On dira qu'une algèbre normée B est une *algèbre de Banach* si c'est un espace de Banach et si

$$\|xy\| \leqslant \|x\| \ \|y\|$$

pour tous $x, y \in B$.

Nous avons vu que $\mathrm{Op}(E)$ est une algèbre de Banach pour tout espace de Banach E.

Théorème 9.1. *Une algèbre normée complète B peut être transformée en une algèbre de Banach par l'introduction d'une norme équivalente.*

Démonstration. Sans restreindre la généralité, on peut admettre que B est unitaire. Considérons la *représentation régulière* gauche de l'algèbre B dans l'algèbre $\mathrm{Op}(B)$ des opérateurs bornés sur B. Plus exactement, définissons l'application $a \to T_a$, où

$$T_a x = ax.$$

Il est aisé de voir qu'un opérateur $T \in \mathrm{Op}(B)$ est de la forme T_a si et seulement si $Txy = (Tx)\,y$. Il s'ensuit de là que les opérateurs T_a forment une sous-algèbre fermée de $\mathrm{Op}(B)$. En particulier, $\{T_a\}$ est un espace de Banach. L'application $a \to T_a$ est donc un homomorphisme biunivoque d'espaces de Banach. Par ailleurs, elle est continue par hypothèse du théorème. D'autre part, le théorème de Banach dit que l'application réciproque est également continue. Donc, si pour nouvelle norme de l'élément $a \in B$, on prend le nombre $\|T_a\|$, on obtient une norme équivalente à la primitive. Ceci prouve le théorème, puisque $\|TS\| \leqslant \|T\| \cdot \|S\|$ pour les opérateurs. A noter que la nouvelle norme de l'unité e de l'algèbre B est égale à 1.

Exercice. Montrer que dans une algèbre normée, si $a_n \to a$ et $b_n \to b$, alors $a_n b_n \to ab$. Réciproquement, si une algèbre topologique jouit de cette propriété, elle est normée.

Exercice. Montrer que la nouvelle norme sera confondue avec la primitive si B est une algèbre de Banach unitaire : $\|e\| = 1$.

Théorème 9.2. *Soit E une algèbre normée de norme $\|\cdot\|$ et soit A un sous-espace de E (pas forcément fermé) muni d'une norme $\|\cdot\|_1$ telle que $\|f\|_1 \geqslant K\|f\|$ pour tout $f \in A$. Supposons que A est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_1$. Alors, si A est une algèbre, la multiplication est dense pour la norme $\|\cdot\|_1$, c'est-à-dire que $\|ab\|_1 \leqslant M\|a\|_1 \cdot \|b\|_1$, où M est une constante. En d'autres termes, si A est une algèbre, alors c'est une algèbre normée complète et par suite une algèbre de Banach pour une norme $\|\cdot\|_2$ équivalente à la norme $\|\cdot\|_1$.*

Démonstration. Définissons comme plus haut l'opérateur T_a en posant $T_a(x) = ax$. Alors $T_a \in \mathrm{Op}(A)$. En effet, l'opérateur T_a étant partout défini sur A, pour prouver qu'il est continu, il suffit de montrer qu'il est fermé. Soient $b_n \in A$, $\|b_n - b\|_1 \to 0$ et $\|T_a b_b - c\|_1 \to 0$. Alors $\|b_n - b\| \to 0$, $\|ab_n - c\| \to 0$ et par suite $\|ab_n - ab\| \leqslant C\|a\| \cdot \|b_n - b\| \to 0$, de sorte que

$c=ab=T_a b$. Ce qui exprime que l'opérateur T_a est continu. On établit de façon analogue la continuité des opérateurs S_a de multiplication à droite.

Si, par ailleurs, $\|a\|_1 \leqslant 1$, alors $\|T_a b\|_1 = \|ab\|_1 = \|S_b a\|_1 \leqslant \leqslant \|S_b\| \cdot \|a\|_1 \leqslant \|S_b\|$. Or, on sait que si une famille d'opérateurs $\{T_a\}$ est telle que $\|T_a x\| \leqslant C(x)$, alors $\sup \|T_a\| < \infty$. Donc, il existe une constante M telle que $\|T_a\| \leqslant M$ si $\|a\|_1 \leqslant 1$. Par conséquent, $\|ab\|_1 = = \|T_{a/\|a\|_1} b\| \cdot \|a\|_1 \leqslant M \|b\|_1 \cdot \|a\|_1$. C.Q.F.D.

Un sous-espace I de B est un *idéal* si $ax \in I$ pour tous $a \in I$ et $x \in B$. On admet que $I \neq B$. Si $a \in GL(B)$, les éléments ax, $x \in B$, forment un idéal. D'autre part, si $a \in GL(B)$, il est évident que a n'appartient à aucun idéal.

CHAPITRE II

ESPACES FONCTIONNELS

§ 1. Espaces de Sobolev

Ce paragraphe est consacré à l'introduction et à la classification des fonctions différentiables (autant de fois qu'on le veut), des fonctions discontinues et des distributions à l'aide de la complétion des espaces vectoriels pour la norme décrite sous forme abstraite au § 2 du chapitre I. Pour espace primitif on prend un espace composé des «meilleures» fonctions, c'est-à-dire de fonctions suffisamment différentiables et décroissant assez rapidement. On le munit de normes différentes et ensuite, en le complétant, on obtient des classes différentes de fonctions discontinues, voire de distributions. Ce procédé permet d'obtenir d'importants espaces hilbertiens : les espaces de Sobolev. Tous ces espaces sont isométriquement isomorphes entre eux à telle enseigne qu'on peut dire qu'ils sont des réalisations différentes d'un espace hilbertien abstrait.

Considérons l'espace vectoriel S des fonctions φ indéfiniment différentiables sur $\mathbf{R}^n$ satisfaisant la condition

$$\sup_{x\in\mathbf{R}^n}\left| x_1^{p_1}\dots x_n^{p_n}\,\frac{\partial^{q_1+\dots+q_n}}{\partial x_1^{q_1}\dots\partial x_n^{q_n}}\,\varphi(x)\right|<\infty \tag{1.1}$$

pour tous entiers $p_1,\dots,p_n$, $q_1,\dots,q_n$ positifs, c'est-à-dire l'espace des fonctions décroissant avec toutes leurs dérivées plus vite que toute puissance strictement négative de $|x|$ lorsque $|x|\to\infty$ (Ici et dans la suite $|x|=\left(\sum_1^n x_i^2\right)^{1/2}$. Par ailleurs, nous écrirons x^2 au lieu de $|x|^2$ pour tout $n\geqslant 1$.) En particulier, l'espace S contient toutes les fonctions indéfiniment différentiables à support compact; l'espace de ces fonctions est noté $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Pour classer les fonctions d'après leur différentiabilité, on se servira de l'opérateur de Laplace $\Delta=\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ (plus exactement, $-\Delta+1$ puisque, comme nous le verrons, cet opérateur est inversible sur S), et pour les classer d'après leur croissance, de l'opérateur de multiplication par la fonction x^2+1.

Signalons qu'on aurait pu considérer d'autres opérateurs doués des mêmes propriétés. Le choix de ces opérateurs est dicté par des considérations de commodité.

Nous commencerons par classer les fonctions d'après leur différentiabilité. Pour tout $k \geqslant 0$ munissons l'espace S de la norme

$$||\varphi||^2 = \int_{\mathbf{R}^n} \bar{\varphi}(x) [-\Delta + 1]^k \varphi(x)\, dx. \tag{1.2}$$

Définition. Le complété de l'espace S pour la norme (1.2) s'appelle *espace de Sobolev* et se note*) $W_2^k(\mathbf{R}^n)$.

Exercice. Montrer que l'espace $W_2^k(\mathbf{R}^n)$ est hilbertien.

L'espace $W_2^0(\mathbf{R}^n)$ peut être identifié à l'espace $L_2(\mathbf{R}^n)$, puisque l'ensemble S est dense dans $L_2(\mathbf{R}^n)$. En dimension un, ceci est prouvé à la fin du § 2, chapitre I.

Exercice. Montrer que pour $n > 1$, l'ensemble S est dense dans $L_2(\mathbf{R}^n)$.

Il se trouve qu'on peut donner un sens à la formule (1.2) dans le cas aussi où k est un entier < 0. Considérons les espaces vectoriels $S^{(l)}$ (l est un nombre naturel) de fonctions ψ représentables par

$$\psi = (-\Delta + 1)^l \varphi, \qquad \varphi \in S. \tag{1.3}$$

Montrons que la fonction φ est définie de façon unique par (1.3) quelle que soit $\psi \in S^{(l)}$. Il est évident qu'il suffit de traiter le cas $l = 1$. Le cas où l est arbitraire s'obtient par l répétitions de cette opération. Soit $(-\Delta + 1)\varphi = (-\Delta + 1)\varphi_1$. Pour la fonction $f = \varphi - \varphi_1$, on a alors

$$(-\Delta + 1) f = 0, \tag{1.4}$$

et donc

$$\int_{\mathbf{R}^n} \bar{f}(x)(-\Delta + 1) f(x)\, dx = 0.$$

Une intégration par parties nous donne (compte tenu de ce que la fonction f et ses dérivées décroissent assez rapidement lorsque $|x| \to \infty$)

$$\int_{\mathbf{R}^n} |\nabla f|^2\, dx + \int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|^2\, dx = 0,$$

où ∇f est un vecteur de composantes $\partial f / \partial x_j$. Donc, $\int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|^2\, dx = 0$ et par conséquent $\varphi(x) = \varphi_1(x)$. On a ainsi défini l'opérateur $(-\Delta + 1)^{-1} : S^{(1)} \to S$ (et partant les opérateurs $(-\Delta + 1)^{-l} : S^{(l)} \to S$, $l > 0$). En complétant l'espace $S^{(l)}$ pour la norme (1.2), où $k = -l$, on obtient l'espace $W_2^{-l}(\mathbf{R}^n)$, $l > 0$. On montrera plus bas que $S^{(l)} = S$ pour tout l.

Les éléments de $W_2^k(\mathbf{R}^n)$, $k < 0$, qui n'appartiennent pas à l'espace $L_2(\mathbf{R}^n)$ sont appelés *distributions*. Les éléments de $L_2(\mathbf{R}^n)$ n'appartenant pas à $C(\mathbf{R}^n)$ s'appellent *fonctions discontinues*.

*) On utilise aussi la notation $H_s = W_2^s(\mathbf{R}^n)$.

Signalons que tous les espaces hilbertiens envisagés ci-dessus contiennent des fonctions ayant à peu près le même ordre de décroissance à l'infini.

Passons maintenant à la classification des fonctions par leur comportement lorsque $|x| \to \infty$. Remarquons que la transformation classique de Fourier envoie l'opérateur $-\Delta+1$ dans l'opérateur de multiplication par p^2+1. Rappelons quelques propriétés de la *transformation de Fourier F*.

La *transformée de Fourier* $\tilde{\varphi}$ d'une fonction φ de S est définie par la formule

$$\tilde{\varphi}(p) = (F\varphi)(p) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{ip\cdot\xi} \varphi(\xi)\, d\xi, \tag{1.5}$$

où $p\cdot\xi = \sum_{i=1}^{n} p_i\xi_i$ est le produit scalaire*) des vecteurs $p, \xi \in \mathbf{R}^n$.

Les propriétés suivantes des transformées de Fourier de fonctions de S sont établies dans les cours d'analyse.

1) La *transformation inverse de Fourier* F^{-1} existe et de plus

$$(F^{-1}\tilde{\varphi})(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-ip\cdot x} \tilde{\varphi}(p)\, dp. \tag{1.6}$$

2)

$$\int_{\mathbf{R}^n} \bar{f}(x)\varphi(x)\, dx = \int_{\mathbf{R}^n} \overline{[(Ff)(p)]}\, (F\varphi)(p)\, dp \tag{1.7}$$

(*égalité de Parseval*).

3) Soit D_j l'opérateur de dérivation par rapport à la j-ième coordonnée, et soit U_j l'opérateur de multiplication par cette coordonnée. Alors

$$-iD_jF = FU_j, \tag{1.8}$$

$$U_jF = iFD_j. \tag{1.9}$$

De la dernière propriété il résulte immédiatement que pour tout $m \geqslant 0$ et tout $\psi \in S$

$$[F(-\Delta+1)^m\psi](p) = (p^2+1)^m\tilde{\psi}(p). \tag{1.10}$$

Convenons de désigner par $\tilde{S}$ l'espace des fonctions $\tilde{\varphi}$, où $\varphi \in S$.

Les propriétés de la transformation de Fourier nous permettent d'établir sans peine que l'espace S est invariant par cette dernière, c'est-à-dire que $\tilde{S} = S$.

Montrons que si $\psi \in S^{(m)}$ pour $m<0$, l'égalité (1.10) est valable aussi pour $m<0$. En effet, soit $m = -k < 0$ et $\varphi = (-\Delta+1)^{-k}\psi$. Alors

$$\tilde{\psi}(p) = [F(-\Delta+1)^k\psi](p) = (p^2+1)^k\tilde{\varphi}(p). \tag{1.11}$$

En multipliant (1.11) par $(p^2+1)^m$, on obtient (1.10).

*) L'usage de deux formes d'écriture différentes du produit scalaire est dicté par des considérations de commodité.

De (1.10) il résulte que pour tout l naturel l'espace $S^{(l)}$ est confondu avec S. En effet, soit $\varphi \in S$. Montrons qu'il existe une fonction $\psi \in S$ satisfaisant la condition $\varphi = (-\Delta+1)^l \psi$. Il est évident qu'il suffit de prouver ceci pour $l=1$. De l'invariance de S par la transformation de Fourier, de l'existence de la transformation réciproque F^{-1} et de la formule (1.10), il résulte que pour ψ on peut prendre $F^{-1}\tilde{\psi}$, où

$$\tilde{\psi}(p) = (p^2+1)^{-l}(F\varphi)(p).$$

Définition. L'espace $\tilde{W}_2^k(\mathbf{R}^n)$ s'appelle *complété* de l'espace S pour la norme

$$\|\varphi\|^2_{\tilde{W}_2^k(\mathbf{R}^n)} = \int_{\mathbf{R}^n} (x^2+1)^k |\varphi(x)|^2 \, dx. \tag{1.12}$$

Nous avons déjà mentionné l'isomorphisme isométrique de tous les espaces ici introduits. L'exercice proposé ci-après peut être interprété comme une illustration immédiate de ce fait.

Exercice. Soit $A: S \to S$ une application définie par la formule $Af(x) = (x^2+1)^{-k/2} f(x)$. Montrer qu'il existe un prolongement de A et un seul en un isomorphisme isométrique de l'espace $L_2(\mathbf{R}^n)$ sur l'espace $\tilde{W}_2^k(\mathbf{R}^n)$.

Exercice. Montrer que $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ est dense dans $\tilde{W}_2^k(\mathbf{R}^n)$.

Définissons maintenant l'isomorphisme isométrique des espaces $W_2^k(\mathbf{R}^n)$ et $\tilde{W}_2^k(\mathbf{R}^n)$. Comme il fallait s'y attendre, il est réalisé par la transformation de Fourier. Plus exactement, on a le théorème suivant.

Théorème 1.1. *La transformation de Fourier $F: S \to S$ est isométrique pour les normes des espaces $W_2^k(\mathbf{R}^n)$ et $\tilde{W}_2^k(\mathbf{R}^n)$, c'est-à-dire que pour tout $\varphi \in S$ on a l'égalité*

$$\|F\varphi\|_{\tilde{W}_2^k(\mathbf{R}^n)} = \|\varphi\|_{W_2^k(\mathbf{R}^n)}.$$

Démonstration. Les égalités (1.10) et de Parseval nous donnent

$$\|\varphi\|^2_{W_2^k(\mathbf{R}^n)} = \int_{\mathbf{R}^n} \bar{\varphi}(x)(-\Delta+1)^k \varphi(x)\, dx =$$

$$= \int_{\mathbf{R}^n} \overline{[(F\varphi)(p)]}\,(p^2+1)^k (F\varphi)(p)\, dp = \|F\varphi\|^2_{\tilde{W}_2^k(\mathbf{R}^n)}.$$

Donc, en raison de l'isométrie, l'opérateur F est borné sur le sous-ensemble S dense dans l'espace $W_2^k(\mathbf{R}^n)$. Par conséquent, la transformation de Fourier F peut être prolongée de façon unique en un homomorphisme isométrique de l'espace $W_2^k(\mathbf{R}^n)$ sur l'espace $\tilde{W}_2^k(\mathbf{R}^n)$, qui sera désigné par la même lettre F. Nous sommes ainsi conduits à la définition suivante.

Définition. On appelle *transformation de Fourier dans* $W_2^k(\mathbf{R}^n)$ l'homomorphisme isométrique

$$F: W_2^k(\mathbf{R}^n) \to \tilde{W}_2^k(\mathbf{R}^n).$$

En prolongeant l'opérateur défini sur S par la formule (1.6) en un homomorphisme, on voit qu'il admet un réciproque:

$$F^{-1}: \tilde{W}_2^k(\mathbf{R}^n) \to W_2^k(\mathbf{R}^n).$$

En effet, si l'on désigne par $\tilde{F}$ le prolongement de l'opérateur (1.6) en un homomorphisme de l'espace $\tilde{W}_2^k(\mathbf{R}^n)$ dans l'espace $W_2^k(\mathbf{R}^n)$, alors pour tout $\varphi \in S$

$$F\tilde{F}\varphi = \tilde{F}F\varphi = \varphi.$$

De là et puisque S est dense dans $W_2^k(\mathbf{R}^n)$ et dans $\tilde{W}_2^k(\mathbf{R}^n)$ il vient que $F\tilde{F}=1$, $\tilde{F}F=1$, c'est-à-dire que $\tilde{F}=F^{-1}$.

On a donc le théorème suivant.

Théorème 1.2. *La transformation de Fourier*

$$F: W_2^k(\mathbf{R}^n) \to \tilde{W}_2^k(\mathbf{R}^n)$$

est un isomorphisme isométrique.

Remarque. Pour noter les transformés de Fourier des éléments $\varphi \in W_2^k(\mathbf{R}^n)$, $\varphi \notin S$, on se servira de la formule usuelle, bien que dans ce cas φ et $\tilde{\varphi}$ ne soient pas des fonctions dans l'acception généralement admise.

Ce théorème permet de généraliser naturellement la définition des espaces de Sobolev $W_2^s(\mathbf{R}^n)$ au cas d'un s fractionnaire. Soit $s \geqslant 0$ un nombre réel quelconque. Munissons S d'une norme $\|\cdot\|_{W_2^s(\mathbf{R}^n)}$ définie par la formule

$$\|\varphi\|_{W_2^s(\mathbf{R}^n)} = \|F\varphi\|_{\tilde{W}_2^s(\mathbf{R}^n)}. \tag{1.13}$$

Définition. Le complété de l'espace S pour la norme (1.13) s'appelle *espace de Sobolev* $W_2^s(\mathbf{R}^n)$.

Ainsi s'achève la définition des espaces de Sobolev. Passons maintenant à la démonstration d'une très importante propriété de ces espaces, propriété qui est souvent prise pour définition lorsque $s<0$.

§ 2. Dualité des espaces de Sobolev

Nous avons vu précédemment que chaque espace de Sobolev pouvait être muni d'un produit scalaire qui en faisait un espace hilbertien. Mais le produit scalaire de L_2 défini par la formule (3.5) du chapitre I continue de jouer un rôle fondamental pour les espaces de Sobolev. Plus exactement, il s'avère que les espaces de Sobolev «positifs» et «négatifs» sont «duaux» pour ce produit scalaire. Considérons tout d'abord les espaces $\tilde{W}_2^k(\mathbf{R}^n)$ et $\tilde{W}_2^{-k}(\mathbf{R}^n)$ introduits ci-dessus.

Théorème 2.1. *Soient* $f \in \tilde{W}_2^k(\mathbf{R}^n)$, $\varphi \in \tilde{W}_2^{-k}(\mathbf{R}^n)$ *et soient* $\{f_j\}$ *et* $\{\varphi_j\}$ *des suites de fonctions de* S *convergeant respectivement vers* f *et* φ. *Il existe alors la limite*

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\mathbf{R}^n} f_j(x)\,\varphi_j(x)\,dx. \tag{2.1}$$

Démonstration. Montrons que la suite d'intégrales considérée est de Cauchy. On a

$$\left|\int_{\mathbf{R}^n} f_p(x)\,\varphi_p(x)\,dx-\int_{\mathbf{R}^n} f_q(x)\,\varphi_q(x)\,dx\right|=$$

$$=\left|\int_{\mathbf{R}^n}[f_p(x)-f_q(x)]\,\varphi_p(x)\,dx-\int_{\mathbf{R}^n} f_q(x)\,[\varphi_q(x)-\varphi_p(x)]\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\int_{\mathbf{R}^n}[f_p(x)-f_q(x)]\,\varphi_p(x)\,dx\right|+\left|\int_{\mathbf{R}^n} f_q(x)\,[\varphi_q(x)-\varphi_p(x)]\,dx\right|.$$

L'inégalité de Cauchy-Bouniakovski nous donne

$$\left|\int_{\mathbf{R}^n}[f_p(x)-f_q(x)]\,\varphi_p(x)\,dx\right|=$$

$$=\left|\int_{\mathbf{R}^n}(1+x^2)^{k/2}[f_p(x)-f_q(x)]\,(1+x^2)^{-k/2}\,\varphi_p(x)\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\int_{\mathbf{R}^n}(1+x^2)^k|f_p(x)-f_q(x)|^2\,dx\right\}^{1/2}\left\{\int_{\mathbf{R}^n}(1+x^2)^{-k}\,|\varphi_p(x)|^2\,dx\right\}^{1/2}=$$

$$=\|f_p-f_q\|_{\tilde{W}_2^k(\mathbf{R}^n)}\|\varphi_p\|_{\tilde{W}_2^{-k}(\mathbf{R}^n)}.$$

La suite $\{f_j\}$ étant de Cauchy pour la norme de l'espace $\tilde{W}_2^k(\mathbf{R}^n)$ et la suite $\{\varphi_j\}$ de Cauchy pour la norme de l'espace $\tilde{W}_2^{-k}(\mathbf{R}^n)$ (donc bornée pour cette norme), il vient

$$\lim_{p,q\to\infty}\int_{\mathbf{R}^n}[f_p(x)-f_q(x)]\,\varphi_p(x)\,dx=0;$$

de façon analogue, on obtient

$$\lim_{p,q\to\infty}\int_{\mathbf{R}^n} f_q(x)\,[\varphi_p(x)-\varphi_q(x)]\,dx=0,$$

ce qui prouve le théorème.

Définition. Appelons la limite (2.1) *intégrale du produit des fonctions* $f\in\tilde{W}_2^k(\mathbf{R}^n)$ et $\varphi\in\tilde{W}_2^{-k}(\mathbf{R}^n)$ et notons

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,\varphi(x)\,dx=\lim_{j\to\infty}\int_{\mathbf{R}^n} f_j(x)\,\varphi_j(x)\,dx. \tag{2.2}$$

Montrons que cette définition est indépendante du choix de f_i et de φ_j. Soient $f\in\tilde{W}_2^k(\mathbf{R}^n)$, $\varphi\in\tilde{W}_2^{-k}(\mathbf{R}^n)$ et supposons que les suites $\{f_k\}$ et $\{\check{f}_k\}$ de fonctions de S convergent vers f et les suites $\{\varphi_k\}$ et $\{\check{\varphi}_k\}$ de S vers φ. Comme dans la démonstration du théorème 2.1, on obtient

$$\left|\int_{\mathbf{R}^n} f_j(x)\,\varphi_j(x)\,dx-\int_{\mathbf{R}^n}\check{f}_j(x)\,\check{\varphi}_j(x)\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\|f_j-\check{f}_j\|_{\tilde{W}_2^k(\mathbf{R}^n)}\|\varphi_j\|_{\tilde{W}_2^{-k}(\mathbf{R}^n)}+\|\varphi_j-\check{\varphi}_j\|_{\tilde{W}_2^{-k}(\mathbf{R}^n)}\|\check{f}_j\|_{\tilde{W}_2^k(\mathbf{R}^n)}\to 0$$

lorsque $j\to\infty$. C.Q.F.D.

Remarque. Lorsque $k=0$, c'est-à-dire lorsque $f\in L_2(\mathbf{R}^n)$, $\varphi\in L_2(\mathbf{R}^n)$, l'intégrale (2.2) est confondue avec le produit scalaire $(f,\bar{\varphi})$; ici $\bar{\varphi}=\lim\limits_{n\to\infty}\bar{\varphi}_n$ si $\varphi_n\to\varphi$.

Théorème 2.2. *Pour tous* $f\in\tilde{W}_2^k(\mathbf{R}^n)$, $\varphi\in\tilde{W}_2^{-k}(\mathbf{R}^n)$, *on a la majoration*

$$\left|\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,\varphi(x)\,dx\right|\leqslant\|f\|\,\|\varphi\|. \tag{2.3}$$

Démonstration. Supposons que $f_j\to f$, $\varphi_j\to\varphi$, f_j, $\varphi_j\in S$. L'inégalité de Cauchy-Bouniakovski entraîne

$$\left|\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,\varphi(x)\,dx\right|=\left|\lim_{j\to\infty}\int_{\mathbf{R}^n} f_j(x)\,\varphi_j(x)\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\lim_{j\to\infty}\|f_j\|_{\tilde{W}_2^k(\mathbf{R}^n)}\|\varphi_j\|_{\tilde{W}_2^{-k}(\mathbf{R}^n)}=\|f\|\,\|\varphi\|$$

Théorème 2.3. *L'intégrale* (2.2) *définit pour* $f\in\tilde{W}_2^k(\mathbf{R}^n)$ *fixe une fonctionnelle linéaire bornée sur* $\tilde{W}_2^{-k}(\mathbf{R}^n)$.

Démonstration. Désignons par $\mathscr{F}_f$ le premier membre de l'expression (2.2), soit

$$\mathscr{F}_f(\varphi)=\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,\varphi(x)\,dx,\qquad f\in\tilde{W}_2^k(\mathbf{R}^n).$$

On s'assure immédiatement que $\mathscr{F}_f(\alpha\varphi+\beta\psi)=\alpha\mathscr{F}_f(\varphi)+\beta\mathscr{F}_f(\psi)$. Le fait que la fonctionnelle $\mathscr{F}_f\colon\tilde{W}_2^{-k}\to\mathbf{C}$ est bornée résulte du théorème 2.2.

Définition. Supposons que $f_j\to f$, $\varphi_j\to\varphi$, f_j, $\varphi_j\in S$, $f\in W_2^k(\mathbf{R}^n)$, $\varphi\in W_2^{-k}(\mathbf{R}^n)$. Appelons *intégrale du produit des fonctions* f et φ la limite

$$\lim_{j\to\infty}\int_{\mathbf{R}^n} f_j(x)\,\varphi_j(x)\,dx\overset{\text{déf}}{=}\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

Exercice. Utiliser l'égalité de Parseval pour prouver la validité de cette définition. Etablir les théorèmes 2.2 et 2.3 pour les espaces $W_2^k(\mathbf{R}^n)$. Généraliser l'égalité de Parseval relative à l'intégrale $\int\limits_{\mathbf{R}^n} f(x)\,\varphi(x)\,dx$ au cas où

$$f\in W_2^k(\mathbf{R}^n),\qquad\varphi\in W_2^{-k}(\mathbf{R}^n),\qquad k>0.$$

Théorème 2.4. *Soit* $\Phi\in[\tilde{W}_2^k(\mathbf{R}^n)]^*$. *On peut alors exhiber un élément* $h\in\tilde{W}_2^{-k}(\mathbf{R}^n)$ *tel que pour tout* $g\in\tilde{W}_2^k(\mathbf{R}^n)$

$$\Phi(g)=\int_{\mathbf{R}^n} h(x)\,g(x)\,dx. \tag{2.4}$$

Démonstration. Soient $g\in S$, $\varphi(x)=(1+x^2)^{k/2}\,g(x)$. Alors

$$|g|^2_{\tilde{W}_2^k(\mathbf{R}^n)}=\int_{\mathbf{R}^n}(1+x^2)^k\,|g(x)|^2\,dx=\int_{\mathbf{R}^n}|\varphi x|^2\,dx=\|\varphi\|^2_{L_2(\mathbf{R}^n)}. \tag{2.5}$$

Considérons une fonctionnelle linéaire Ψ définie sur un ensemble S dense dans $L_2(\mathbf{R}^n)$ par la formule

$$\Psi(\varphi)=\Phi(g)$$

et bornée en vertu de (2.5). Le théorème de F. Riesz affirme l'existence d'un élément $f \in L_2(\mathbf{R}^n)$ tel que pour tout élément $\varphi \in L_2(\mathbf{R}^n)$

$$\Psi(\varphi) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

Supposons que $f_j \to f$, $f_j \in S$, $g \in S$, $\varphi(x) = (1+x^2)^{k/2}\,g(x)$. Alors

$$\Phi(g) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,\varphi(x)\,dx = \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbf{R}^n} f_j(x)\,\varphi(x)\,dx = \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbf{R}^n} h_j(x)\,g(x)\,dx,$$

où $h_j(x) = (1+x^2)^{k/2} f_j(x)$, la convergence de la suite $\{f_j\}$ dans $L_2(\mathbf{R}^n)$ entraînant celle de la suite $\{h_j\}$ vers un élément $h \in \tilde{W}_2^{-k}(\mathbf{R}^n)$. Donc, pour $g \in S$

$$\Phi(g) = \int_{\mathbf{R}^n} h(x)\,g(x)\,dx.$$

Ce qui prouve le théorème, puisque S est dense dans $\tilde{W}_2^k(\mathbf{R}^n)$.

Théorème 2.5. *Soit* $\mathscr{F}_f \in [\tilde{W}_2^{-k}(\mathbf{R}^n)]^*$ *une fonctionnelle définie par la formule*

$$\mathscr{F}_f(\varphi) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,\varphi(x)\,dx, \qquad f \in \tilde{W}_2^{+k}(\mathbf{R}^n).$$

Alors $\|\mathscr{F}_f\| = \|f\|$.

Démonstration. Le théorème 2.2 entraîne que $\|\mathscr{F}_f\| \leqslant \|f\|$. Prouvons l'inégalité contraire dans l'hypothèse que $f \in S$. Soit $\varphi(x) = (1+x^2)^k \bar{f}$. Alors

$$\mathscr{F}_f(\varphi) = \int_{\mathbf{R}^n} (1+x^2)^k |f(x)|^2\,dx = \|f\|^2_{\tilde{W}_2^k(\mathbf{R}^n)} = \|f\|_{\tilde{W}_2^k(\mathbf{R}^n)} \|\varphi\|_{\tilde{W}_2^{-k}(\mathbf{R}^n)}.$$

Donc $\|\mathscr{F}_f\| \geqslant \|f\|$, de sorte que $\|\mathscr{F}_f\| = \|f\|$ pour $f \in S$.

Soient maintenant f un élément arbitraire de $\tilde{W}_2^k(\mathbf{R}^n)$ et $\{f_j\}$ une suite de fonctions de S convergeant vers f. Alors la suite de fonctionnelles $\{\mathscr{F}_{f_j}\}$ converge vers $\mathscr{F}_f$ pour la norme de l'espace $[\tilde{W}_2^k(\mathbf{R}^n)]^*$. En passant à la limite dans l'égalité $\|\mathscr{F}_{f_j}\| = \|f_j\|$, on obtient ce qu'on voulait.

Les théorèmes 2.3, 2.4 et 2.5 expriment que $\tilde{W}_2^{-k}(\mathbf{R}^n)$ peut être identifié à l'espace $[\tilde{W}_2^k(\mathbf{R}^n)]^*$ des fonctionnelles linéaires bornées sur $\tilde{W}_2^k(\mathbf{R}^n)$. Plus exactement, on a le théorème suivant.

Théorème 2.6. *L'application* A: $\tilde{W}_2^{-k}(\mathbf{R}^n) \to [\tilde{W}_2^k(\mathbf{R}^n)]^*$ *définie par la formule*

$$[Af](x) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,g(x)\,dx,$$

est un isomorphisme isométrique.

Les théorèmes 2.6 et 1.2 entraînent le théorème suivant.

Théorème 2.7. *L'application* $A: W_2^{-k}(\mathbf{R}^n) \to [W_2^k(\mathbf{R}^n)]^*$ *définie par la formule*

$$[Af](g) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\, g(x)\, dx$$

est un isomorphisme isométrique.

L'opérateur de dérivation n'est borné dans aucun espace de Sobolev. Par contre, il l'est en tant qu'opérateur d'un espace de Sobolev dans un autre espace de Sobolev lui correspondant. En effet, soit $D_m: S \to S$ l'opérateur de dérivation par rapport à la m-ième coordonnée:

$$D_m f(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_m}.$$

On a le théorème suivant.

Théorème 2.8. *L'opérateur* D_m *est borné en tant qu'opérateur de* $W_2^k(\mathbf{R}^n)$ *dans* $W_2^{k-1}(\mathbf{R}^n)$.

Démonstration. Soient $\varphi \in S$, $\tilde{\varphi} = F\varphi$. Alors

$$\left| D_m \varphi \right|^2_{W_2^{k-1}(\mathbf{R}^n)} = \int_{\mathbf{R}^n} p^2 (1+p^2)^{k-1} \left| \tilde{\varphi}(p) \right|^2 dp \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\mathbf{R}^n} (1+p^2)^k \left| \tilde{\varphi}(p) \right|^2 dp = \left\| \tilde{\varphi} \right\|^2_{\tilde{W}_2^k(\mathbf{R}^n)} = \left\| \varphi \right\|^2_{W_2^k(\mathbf{R}^n)}.$$

Donc la norme de l'opérateur D_m est inférieure à l'unité. C.Q.F.D.

L'opérateur D_m qui est borné sur le sous-ensemble S dense dans $W_2^k(\mathbf{R}^n)$ peut être prolongé en un homomorphisme de $W_2^k(\mathbf{R}^n)$ dans $W_2^{k-1}(\mathbf{R}^n)$. L'opérateur obtenu sera désigné par le même symbole D_m.

Définition. Soit $f \in W_2^k(\mathbf{R}^n)$. La distribution $D_m f \in W_2^{k-1}(\mathbf{R}^n)$ s'appelle *dérivée partielle* de la distribution f par rapport à la m-ième coordonnée.

Remarque. Bien que parler de la valeur d'une distribution en un point n'ait pas de sens, on se servira parfois du symbole $f(x)$, $f \in W_2^k(\mathbf{R}^n)$ (cf. par exemple la définition de l'intégrale

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\, g(x)\, dx, \quad f \in W_2^k(\mathbf{R}^n), \quad g \in W_2^{-k}(\mathbf{R}^n)$$

au § 2).

Dans le même esprit, pour désigner les dérivées partielles de distributions on se servira de la notation

$$(D_m f)(x) = \frac{\partial^m f(x)}{\partial x^m}. \tag{2.6}$$

Exercice. Soit $f \in W_2^{-k}(\mathbf{R}^n)$. Montrer que la fonctionnelle $g \in W_2^{-k-1}(\mathbf{R}^n)$ définie par la formule

$$\int_{\mathbf{R}^n} g(x)\, \varphi(x)\, dx = -\int_{\mathbf{R}^n} (x)\, \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_m}\, dx, \quad \varphi \in W_2^{k+1}(\mathbf{R}^n), \tag{2.7}$$

est confondue avec $D_m f$.

§ 3. Quelques espaces de fonctions continues et les espaces qui leur sont rattachés

Les espaces de Sobolev se prêtent bien à l'étude des propriétés des opérateurs différentiels. Ce sont des espaces hilbertiens qui sont doués de la propriété de dualité. Mais leurs éléments ne peuvent être multipliés. (En effet, si par exemple $\varphi(x) \in L_2$, son carré $\varphi^2(x)$ n'appartient généralement pas à L_2.)

De ce point de vue, l'espace des fonctions continues présente l'avantage suivant sur les espaces de Sobolev: le produit de deux fonctions continues est une fonction continue. Cette propriété jouera un rôle très important dans l'espace des opérateurs.

Etudions maintenant quelques algèbres de Banach de fonctions continues. Considérons d'abord l'ensemble des fonctions continues bornées à valeurs complexes définies sur un domaine commun $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. Cet ensemble est muni de façon classique d'une structure d'espace vectoriel. Définissons la norme de f par la formule

$$\|f\| = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|. \tag{3.1}$$

Désignons par $C(\Omega)$ l'espace normé obtenu. L'espace $C(\Omega)$ est de Banach: sa complétude résulte du fait que la convergence des fonctions pour la norme (3.1) est une convergence uniforme. Un théorème classique d'analyse nous dit que si une suite de fonctions continues bornées converge uniformément, elle converge vers une fonction continue bornée.

De même qu'on a défini $C(\Omega)$, on définit les espaces normés $C^{(k)}(\Omega)$, $k > 0$ est un entier. La norme sur $C^{(k)}(\Omega)$ est donnée par la formule

$$\|f\|_{C^k(\Omega)} = \max_{0 \leqslant |j| \leqslant k} \sup_{x \in \Omega} |D^j f(x)|, \tag{3.2}$$

où $j = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$, $|j| = \sum_{j=1}^{n} j_i$, $D^j = \dfrac{\partial^{|j|}}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_n^{j_n}}$. Les éléments de l'espace $C^{(k)}(\Omega)$ sont des fonctions f, k fois continûment derivables sur Ω, telles que $\|f\|_{C^{(k)}(\Omega)} < \infty$. L'espace $C^{(k)}(\Omega)$ est un espace de Banach (dont la complétude résulte d'un théorème identique à celui mentionné ci-dessus).

Soit $C^*(\mathbf{R}^n)$ l'espace dual de $C(\mathbf{R}^n)$. On appelle δ_ξ-*fonction de Dirac* une fonctionnelle sur $C(\mathbf{R}^n)$ qui à toute fonction $g \in C(\mathbf{R}^n)$ associe sa valeur $g(\xi)$ en un point $\xi \in \mathbf{R}^n$. La fonctionnelle δ_ξ appartient à l'espace $C^*(\mathbf{R}^n)$; le fait qu'elle est bornée résulte de l'inégalité

$$|g(\xi)| < \sup_{x \in \mathbf{R}^n} |g(x)| = \|g\|_{C(\mathbf{R}^n)}.$$

Soit $N \geqslant 0$. Désignons par $C_N(\mathbf{R}^n)$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbf{R}^n$ de norme finie

$$\|g\|_{C_N(\mathbf{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbf{R}^n} \left| \frac{g(x)}{(1+|x|)^N} \right|.$$

Donc, par définition, l'espace $C_N(\mathbf{R}^n)$ contient toutes les fonctions continues croissant moins vite que $|x|^N$.

De ce point de vue, il est à l'espace $C(\mathbf{R}^n)$ ce que l'espace $\tilde{W}_2^{-k}(\mathbf{R}^n)$ est à l'espace $L_2(\mathbf{R}^n)$.

Il est évident que la fonction de Dirac δ_ξ peut être traitée comme un élément de l'espace $C_N^*(\mathbf{R}^n)$:

$$|\delta_\xi(g)| = |g(\xi)| = (1+|\xi|)^N \left| \frac{g(\xi)}{(1+|\xi|)^N} \right| \leqslant (1+|\xi|)^N |g|_{C_N(\mathbf{R}^n)}.$$

Un autre élément de $C_N^*(\mathbf{R}^n)$ est la fonctionnelle $\mathscr{F}_\varphi$:

$$\mathscr{F}_\varphi(g) = \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x)\, g(x)\, dx, \tag{3.3}$$

où φ est un élément de l'espace vectoriel $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ des fonctions indéfiniment dérivables à supports compacts. En effet,

$$\left| \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x)\, g(x)\, dx \right| \leqslant \max_{x \in \operatorname{supp} \varphi} |\varphi(x)(1+|x|)^N| \, \|g\|_{C_N(\mathbf{R}^n)}.$$

Il est commode d'identifier la fonctionnelle $\mathscr{F}_\varphi$ à la fonction φ (il est aisé de voir que $(\varphi \neq 0) \Rightarrow (\mathscr{F}_\varphi \neq 0)$), c'est-à-dire d'écrire $\varphi(x) \in C_N^*(\mathbf{R}^n)$ au lieu de $\mathscr{F}_\varphi \in C_N^*(\mathbf{R}^n)$. On désignera toute fonctionnelle $\mathscr{F} \in C_N^*(\mathbf{R}^n)$ par $\varphi(x)$ (bien que $\varphi(x)$ puisse ne pas être une fonction dans l'acception ordinaire de ce terme), et la valeur de la fonctionnelle $\mathscr{F}$ par $\int \varphi(x)\, g(x)\, dx$, bien que l'intégrale n'existe pas en tant que Riemann-intégrale. En particulier, comme il est d'usage en physique, dans le cas de la fonctionnelle δ_ξ on écrira $\int \delta(x-\xi)\, f(x)\, dx$.

Il nous suffit d'étudier un espace plus simple et plus aisément appréhendable, plus exactement, le sous-espace de $C_N^*(\mathbf{R}^n)$ qui est enveloppe linéaire de l'union des fonctions de Dirac et de $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Désignons par $C_N^+(\mathbf{R}^n)$ l'adhérence dans $C_N^*(\mathbf{R}^n)$ de l'enveloppe linéaire de l'ensemble $C_0^\infty(\mathbf{R}^n) \cup \{\delta_\xi\}_{\xi \in \mathbf{R}^n}$.

Définissons maintenant la *transformation de Fourier* dans l'espace $C_N^+(\mathbf{R}^n)$. On appelle *transformée de Fourier* d'une fonction $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n) \subset C_N^+(\mathbf{R}^n)$ la fonction $\tilde{\varphi}$ définie par la formule

$$\tilde{\varphi}(p) \stackrel{\text{déf}}{=} (F\varphi)(p) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x)\, e^{-ip\cdot x}\, dx. \tag{3.4}$$

On appellera *transformée de Fourier de la fonction* δ_ξ la fonction définie par la formule

$$\tilde{\delta}_\xi(p) \stackrel{\text{déf}}{=} (F\delta_\xi)(p) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbf{R}^n} \delta_\xi(x)\, e^{ip\cdot x}\, dx \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\, e^{-ip\cdot\xi}. \tag{3.5}$$

Désignons maintenant par $\mathscr{B}_N^0(\mathbf{R}^n)$ l'espace vectoriel des combinaisons linéaires des fonctions (3.4) et (3.5).

Les formules (3.4) et (3.5) définissent un opérateur de l'enveloppe linéaire de l'ensemble $C_0^\infty(\mathbf{R}^n) \cup \{\delta_\xi\}_{\xi \in \mathbf{R}^n}$ dans $\mathscr{B}_N^0(\mathbf{R}^n)$. L'opérateur F possède un réciproque. Pour le prouver il suffit de s'assurer que $(F\varphi = 0) \Rightarrow (\varphi = 0)$. Supposons que $F\varphi = 0$, où

$$\varphi = \psi + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \delta_{\xi_i}, \quad \xi_i \neq \xi_j \text{ pour } i \neq j, \quad \xi_i \in \mathbf{R}^n,$$

$\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. Alors

$$\tilde{\varphi}(p) = \tilde{\psi}(p) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j e^{-ip \cdot \xi_j},$$

où $\tilde{\psi}$ est la transformée de Fourier de ψ. Donc

$$\tilde{\psi}(p) = -\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e^{-ip \cdot \xi_j}.$$

Si l'un au moins des coefficients α_i est $\neq 0$, la fonction $\tilde{\psi}$ ne tend pas vers 0 à l'infini, ce qui contredit le fait que $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Munissons maintenant l'espace $\mathscr{B}_N^0(\mathbf{R}^n)$ de la norme

$$\|\tilde{\varphi}\|_{\mathscr{B}_N^0(\mathbf{R}^n)} \stackrel{\text{déf}}{=} \|F^{-1}\tilde{\varphi}\|_{C_N^+(\mathbf{R}^n)}. \tag{3.6}$$

Soit $\mathscr{B}_N(\mathbf{R}^n)$ le complété de l'espace $\mathscr{B}_N^0(\mathbf{R}^n)$ pour la norme (3.6). L'opérateur F peut alors être prolongé et ce de façon unique en un isomorphisme isométrique de l'espace $C_N^+(\mathbf{R}^n)$sur $\mathscr{B}_N(\mathbf{R}^n)$. Désignons cet isomorphisme par la même lettre F et appelons-le *transformation de Fourier des éléments de l'espace* $C_N^+(\mathbf{R}^n)$. Nous verrons dans la suite que l'espace $\mathscr{B}_N(\mathbf{R}^n)$ se réalise naturellement par un espace de fonctions (différentiables) continues.

L'enveloppe linéaire de l'ensemble

$$[C_0^\infty(\mathbf{R}^n) \cup \{\delta_\xi\}_{\xi \in \mathbf{R}^n}] \subset C_N^+(\mathbf{R}^n)$$

est munie d'une loi de composition (une multiplication) commutative qui confère à cette variété une structure d'algèbre, plus exactement,

$$(\varphi * \psi)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(y)\, \psi(x-y)\, dy \quad \text{pour } \varphi,\ \psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n);$$

$$\delta_\xi * \delta_\eta = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \delta_{\xi+\eta};$$

$$(\delta_\xi * \psi)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \psi(x-\xi) \quad \text{pour } \psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n).$$

Montrons qu'il existe une constante c telle que

$$\|\varphi * \psi\| \leqslant c \|\varphi\| \|\psi\|.$$

Soit $f \in C_N(\mathbf{R}^n)$. Considérons l'intégrale

$$I = \int_{\mathbf{R}^n} [\varphi * \psi](x) f(x)\, dx. \tag{3.7}$$

L'intégrale (3.7) peut être mise sous la forme

$$(2\pi)^{n/2} I = \int_{\mathbf{R}^n} \psi(t)\, dt \int_{\mathbf{R}^n} f(y+t)\, \varphi(y)\, dy. \tag{3.8}$$

Pour s'en assurer il suffit de traiter trois cas particuliers (puisque nous considérons l'enveloppe linéaire de l'ensemble $C_0^\infty(\mathbf{R}^n) \cup \{\delta_\xi\}$):

a) $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$;

b) $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $\psi = \delta_\xi$;

c) $\varphi = \delta_\xi$; $\psi = \delta_\eta$.

Dans le cas a)

$$(2\pi)^{n/2} \int_{\mathbf{R}^n} [\varphi * \psi](x) f(x)\, dx = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\, dx \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(y)\, \psi(x-y)\, dy =$$

$$= \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(y)\, dy \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\, \psi(x-y)\, dx = \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(y)\, dy \int_{\mathbf{R}^n} \psi(t) f(y+t)\, dt =$$

$$= \int_{\mathbf{R}^n} \psi(t)\, dt \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(y) f(y+t)\, dy.$$

Dans le cas b)

$$(2\pi)^{n/2} I = \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x-\xi) f(x)\, dx;$$

d'autre part

$$\int_{\mathbf{R}^n} \delta(t-\xi)\, dt \int_{\mathbf{R}^n} f(y+t)\, \varphi(y)\, dy = \int_{\mathbf{R}^n} f(y+\xi)\, \varphi(y)\, dy = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\, \varphi(x-\xi)\, dx.$$

Enfin, dans le cas c)

$$(2\pi)^{n/2} I = \int_{\mathbf{R}^n} \delta(x-\xi-\eta) f(x)\, dx = f(\xi+\eta),$$

$$\int_{\mathbf{R}^n} \delta(t-\eta)\, dt \int_{\mathbf{R}^n} f(y+t)\, \delta(y-\xi)\, dy = \int_{\mathbf{R}^n} \delta(t-\eta) f(\xi+t)\, dt = f(\xi+\eta).$$

Ce qui prouve (3.8). De (3.8) il résulte

$$\left| \int_{\mathbf{R}^n} (\varphi * \psi)(x) f(x)\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant (2\pi)^{-n/2} \|\psi\|_{C_N^*(\mathbf{R}^n)} \sup_{t \in \mathbf{R}^n} \left| (1+|t|)^{-N} \int_{\mathbf{R}^n} f(y+t)\, \varphi(y)\, dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant (2\pi)^{-n/2} \|\psi\|_{C_N^*(\mathbf{R}^n)} \|\varphi\|_{C_N^*(\mathbf{R}^n)} \sup_{t \in \mathbf{R}^n} \left[(1+|t|)^{-N} \sup_{y \in \mathbf{R}^n} \frac{f(y+t)}{(1+|y|)^N} \right] \leqslant$$

$$\leqslant (2\pi)^{-n/2} \|\psi\|_{C_N^*(\mathbf{R}^n)} \|\varphi\|_{C_N^*(\mathbf{R}^n)} \sup_{t,\, y \in \mathbf{R}^n} \left| \frac{f(y+t)}{(1+|t|)^N (1+|y|)^N} \right|.$$

Comme

$$\sup_{t,\,y\in\mathbf{R}^n}\left|\frac{f(y+t)}{(1+|t|)^N(1+|y|)^N}\right|\leqslant\|f\|_{C_N(\mathbf{R}^n)}\sup_{t,\,y\in\mathbf{R}^n}\left(\frac{1+|t+y|}{(1+|t|)(1+|y|)}\right)^N\leqslant\|f\|_{C_N(\mathbf{R}^n)},$$

il vient

$$\left|\int_{\mathbf{R}^n}(\varphi*\psi)(x)f(x)\,dx\right|\leqslant(2\pi)^{-n/2}\|\psi\|_{C_N^+(\mathbf{R}^n)}\times\|\varphi\|_{C_N^+(\mathbf{R}^n)}\|f\|_{C_N(\mathbf{R}^n)}.$$

Donc

$$\|\varphi*\psi\|_{C_N^+(\mathbf{R}^n)}\leqslant(2\pi)^{-n/2}\|\varphi\|_{C_N^+(\mathbf{R}^n)}\|\psi\|_{C_N^+(\mathbf{R}^n)}.$$

C.Q.F.D.

En vertu de la majoration (3.9), l'opération $*$ peut être prolongée de façon unique à l'espace $C_N^+(\mathbf{R}^n)$tout entier avec respect de l'inégalité (3.9). Ceci étant, l'espace $C_N^+(\mathbf{R}^n)$se transforme en une algèbre de Banach (plus exactement, en une algèbre normée complète). Comme la transformation de Fourier est un isomorphisme isométrique de l'espace de Banach $C_N^+(\mathbf{R}^n)$sur $\mathscr{B}_N(\mathbf{R}^n)$, l'opération $*$ induit une opération binaire qui confère à $\mathscr{B}_N(\mathbf{R}^n)$ une structure d'algèbre de Banach et qui est définie par la formule

$$\tilde{\varphi}\bullet\tilde{\psi}=F[(F^{-1}\varphi)*(F^{-1}\psi)].$$

Voyons comment opère la relation $\bullet$ sur $\mathscr{B}_N^0(\mathbf{R}^n)$. Soient φ_0, $\psi_0\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ et soit

$$\varphi=\varphi_0+\sum_j\alpha_j\delta_{\xi_j},\qquad\psi=\psi_0+\sum_k\beta_k\delta_{\eta_k}. \tag{3.10}$$

Alors

$$\varphi*\psi=\varphi_0*\psi_0-\sum_j\alpha_j\delta_{\xi_j}*\psi_0+\varphi_0*\sum_k\beta_k\delta_{\eta_k}+\sum_{j,k}\alpha_j\beta_k(2\pi)^{-n/2}\,\delta_{\xi_j+\eta_k},$$

de sorte que

$$(F\varphi\bullet F\psi)(p)=(F\varphi_0\bullet F\psi_0)(p)+(2\pi)^{-n/2}\sum_j\alpha_j\,e^{ip\cdot\xi_j}(F\psi_0)(p)+$$
$$+(2\pi)^{-n/2}\sum_k\beta_k\,e^{ip\cdot\eta_k}(F\varphi_0)(p)+\sum_{j,k}(2\pi)^{-n}\alpha_j\beta_n\,e^{ip\cdot(\xi_j+\eta_k)}.$$

Il est aisé de vérifier que $(F\varphi_0\bullet F\psi_0)(p)=\varphi_0(p)\,\psi_0(p)$. Donc $(F\varphi\bullet F\psi)(p)=\varphi(p)\,\psi(p)$ pour tous φ, ψ de la forme (3.10), c'est-à-dire que l'opération $\bullet$ est une multiplication des valeurs de fonctions en un point sur $\mathscr{B}_N^0(\mathbf{R}^n)$. Pour cette raison on omettra le rond noir dans la notation de cette opération:

$$\tilde{\varphi}\tilde{\psi}=\tilde{\varphi}\bullet\tilde{\psi},\qquad\tilde{\varphi},\ \tilde{\psi}\in\mathscr{B}_N(\mathbf{R}^n).$$

§ 4. Théorèmes d'immersion

Il est souvent assez difficile d'établir directement l'appartenance de fonctions à l'algèbre de Banach C et notamment à l'algèbre de Banach $\mathscr{B}_N$.

Bien plus simple est de vérifier l'appartenance à un espace de Sobolev. Il est donc très important d'établir des faits montrant que l'appartenance à un espace de Sobolev entraîne l'appartenance à $\mathscr{B}_N$ ou à C. En clair, il est question de l'existence d'une immersion canonique des espaces de Sobolev dans C ou $\mathscr{B}_N$. Les premiers théorèmes du genre ont été prouvés par S. Sobolev et appelés par lui *théorèmes d'immersion.*

Théorème 4.1. *Pour $k>s$ il existe un opérateur continu canonique d'immersion*

$$W_2^k(\mathbf{R}^n)\subset W_2^s(\mathbf{R}^n).$$

Démonstration. Soient $k>s$, $\varphi\in S$. Alors

$$\|\varphi\|_{W_2^k(\mathbf{R}^n)}\geqslant\|\varphi\|_{W_2^s(\mathbf{R}^n)}.$$

Donc, toute suite de fonctions de S qui est de Cauchy pour la norme de l'espace $W_2^k(\mathbf{R}^n)$ l'est pour la norme de l'espace $W_2^s(\mathbf{R}^n)$. Reste à prouver que des suites $\{\varphi_j\}$ et $\{\varphi_j'\}$ de fonctions de S qui sont de Cauchy pour la norme de l'espace $W_2^k(\mathbf{R}^n)$ sont équivalentes dans $W_2^k(\mathbf{R}^n)$ si elles le sont dans $W_2^s(\mathbf{R}^n)$. En d'autres termes, il faut s'assurer que si une suite $\{\psi_j\}\subset S$ converge vers ψ pour la norme de $W_2^k(\mathbf{R}^n)$ et vers 0 pour celle de $W_2^s(\mathbf{R}^n)$, alors $\psi=0$.

Posons $\tilde{\psi}_j=F\psi_j$; $\tilde{\psi}=F\psi$. On a

$$\lim_{j\to\infty}\int_{\mathbf{R}^n}(1+p^2)^s|\tilde{\psi}_j(p)|^2\,dp=0$$

et

$$\lim_{m,l\to\infty}\int_{\mathbf{R}^n}(1+p^2)^k|\tilde{\psi}_m(p)-\tilde{\psi}_l(p)|^2\,dp=0.$$

Figeons $\varepsilon>0$ et choisissons un numéro j_0 tel que pour $j\geqslant j_0$, $l\geqslant j_0$

$$\int_{\mathbf{R}^n}(1+p^2)|\tilde{\psi}_j(p)-\tilde{\psi}_l(p)|^2\,dp\leqslant\varepsilon.$$

Soit A un nombre assez grand pour que

$$\int_{|p|>A}(1+p^2)^k|\tilde{\psi}_{j_0}(p)|^2\,dp<\varepsilon.$$

Alors pour $j\geqslant j_0$

$$\int_{\mathbf{R}^n}(1+p^2)^k|\tilde{\psi}_j(p)|^2\,dp\leqslant\int_{|p|>A}(1+p^2)^k|\tilde{\psi}_j(p)|^2\,dp+$$

$$+2\sup\|\tilde{\psi}_j\|\sqrt{\int_{|p|>A}(1+p^2)^k|\tilde{\psi}_j(p)-\tilde{\psi}_{j_0}(p)|^2\,dp}+$$

$$+\int_{|p|>A}(1+p^2)^k|\tilde{\psi}_{j_0}(p)|^2\,dp\leqslant\int_{|p|<A}(1+p^2)^k|\tilde{\psi}_j(p)|^2\,dp+2\varepsilon.$$

Par ailleurs

$$\int_{|p|<A}(1+p^2)^k|\tilde{\psi}_j(p)|^2\,dp\leqslant(1+A^2)^{k-s}\|\tilde{\psi}_j\|^2_{\tilde{W}_2^s(\mathbf{R}^n)}\to0\quad\text{lorsque } j\to\infty.$$

Donc

$$\lim_{j\to\infty} \|\tilde{\psi}_j\|^2_{\tilde{W}_2^k(\mathbf{R}^n)} \leqslant \varepsilon(1+2\sup_j \|\tilde{\psi}_j\|).$$

Le nombre ε étant arbitraire, on en déduit que

$$\lim_{j\to\infty} \|\tilde{\psi}_j\|^2_{\tilde{W}_2^k(\mathbf{R}^n)} = 0.$$

C.Q.F.D.

On a le théorème suivant dit *théorème d'immersion de Sobolev*.

Théorème 4.2. *On a l'inclusion suivante* $W_2^k(\mathbf{R}^n) \subset C(\mathbf{R}^n)$ *pour* $k > n/2$.

Prouvons préalablement le lemme suivant.

Lemme 4.1. *Soit* $I_0 : S \to C(\mathbf{R}^n)$ *un opérateur défini sur un domaine S par la formule*

$$I_0 f(x) = f(x); \tag{4.1}$$

cet opérateur est borné pour $k > n/2$.

Démonstration. Soit $f \in S$ et soit $\tilde{f}$ la transformée de Fourier de f, $k > n/2$. De l'égalité

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{ip\cdot x} \tilde{f}(p)\, dp \tag{4.2}$$

on déduit la majoration

$$(2\pi)^{n/2} \left| f(x) \leqslant \int_{\mathbf{R}^n} \left| \tilde{f}(p)\, dp = \int_{\mathbf{R}^n} (p^2+1)^{-k/2} \left|\tilde{f}(p)\right| (1+p^2)^{k/2}\, dp \leqslant \right.$$

$$\leqslant \sqrt{\int_{\mathbf{R}^n} (p^2+1)^k \left|\tilde{f}(p)\right|^2 dp} \sqrt{\int_{\mathbf{R}^n} (p^2+1)^{-k}\, dp} = M \|\tilde{f}\|_{\tilde{W}_2^k(\mathbf{R}^n)}, \tag{4.3}$$

où

$$M^2 = \int_{\mathbf{R}^n} (p^2+1)^{-k}\, dp = c_n \int_0^\infty r^{n-1} (r^2+1)^{-k}\, dr < \infty, \tag{4.4}$$

puisque $n-1-2k < -1$; la constante c_n de (4.4) est égale à l'aire de la sphère unité à $n-1$ dimensions. La transformation de Fourier étant une application isométrique de $W_2^k(\mathbf{R}^n)$ dans $\tilde{W}_2^k(\mathbf{R}^n)$, la formule (4.3) peut être mise sous la forme

$$\|I_0\| \leqslant (2\pi)^{-n/2} M.$$

C.Q.F.D.

Poursuivons la démonstration du théorème. Pour $k > n/2$ définissons l'homomorphisme

$$I : W_2^k(\mathbf{R}^n) \to C(\mathbf{R}^n)$$

dont la restriction à S est l'opérateur I_0. Pour prouver que I est un opérateur d'immersion, il suffit de s'assurer que $(I\varphi = 0) \Rightarrow (\varphi = 0)$. Soit $\{\varphi_j\}$ une suite de fonctions de S convergeant vers $\varphi \in W_2^k(\mathbf{R}^n)$ et soit $I\varphi = 0$.

Alors

$$\lim_{j\to\infty} I\varphi_j = I\varphi = 0.$$

Or $I\varphi_j = I_0\varphi_j = \varphi_j$, donc $\lim_{j\to\infty} \|\varphi_j\|_{C(\mathbf{R}^n)} = 0$, c'est-à-dire que la suite $\{\varphi_j\}$ converge uniformément vers 0. Par ailleurs, $W_2^k(\mathbf{R}^n) \subset L_2(\mathbf{R}^n)$; donc

$$\lim_{j\to\infty} \|\varphi_j - \varphi\|_{L_2(\mathbf{R}^n)} = 0.$$

Donc, pour toute fonction $f \in L_2(\mathbf{R}^n)$

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\mathbf{R}^n} [\varphi_j(x) - \varphi(x)]\, f(x)\, dx = 0.$$

Si $f \in S$, alors

$$\left| \int_{\mathbf{R}^n} \varphi_j(x) f(x)\, dx \right| \leqslant \|\varphi_j\|_{C(\mathbf{R}^n)} \int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|\, dx \to 0$$

lorsque $j \to \infty$. Par suite, pour tout $f \in S$

$$\int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x) f(x)\, dx = 0,$$

d'où il s'ensuit que $\varphi = 0$. C.Q.F.D.

L'idée du théorème de Sobolev est que si l'on identifie chaque élément de l'espace $W_2^k(\mathbf{R}^n)$ à son image par l'application I_0, alors pour $k > n/2$, les éléments de $W_2^k(\mathbf{R}^n)$ seront des fonctions continues bornées.

Théorème 4.3. *Pour* $k > \frac{n}{2} + 1$, *on a l'inclusion*

$$W_2^k(\mathbf{R}^n) \subset C^{(1)}(\mathbf{R}^n)$$

et pour tout $f \in W_2^k(\mathbf{R}^n)$ *la dérivée* $D_m f$ *est confondue avec la dérivée partielle usuelle de* f.

Démonstration. Soient $k > \frac{n}{2} + 1$, $f \in W_2^k(\mathbf{R}^n)$. Pour prouver que $If \in C^{(1)}(\mathbf{R}^n)$, il suffit de montrer que I_0 est borné en tant qu'opérateur de $W_2^k(\mathbf{R}^n)$ dans $C^{(1)}(\mathbf{R}^n)$. Si $f \in S$ et $\tilde{f}$ est la transformée de Fourier de f, alors

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_m} = -\frac{i}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{ip\cdot x} \tilde{f}(p)\, p_m\, dp.$$

Donc

$$\|f\|_{C^{(1)}(\mathbf{R}^n)} \leqslant \|f\|_{C(\mathbf{R}^n)} + \sum_{m=1}^{n} \|D_m f\|_C \leqslant$$

$$\leqslant c\|f\|_{W_2^k(\mathbf{R}^n)} + \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbf{R}^n} |p_m \tilde{f}(p)|\, dp, \quad c = \text{const.} \tag{4.5}$$

Le dernier terme de (4.5) se majore comme (4.3):

$$\int_{\mathbf{R}^n} |p_m \tilde{f}(p)|\, dp \leqslant \int_{\mathbf{R}^n} |p|\,|\tilde{f}(p)|\, dp \leqslant \|\tilde{f}\|_{\tilde{W}_2^k(\mathbf{R}^n)} \sqrt{\int_{\mathbf{R}^n} |p|(p^2+1)^{-k}\, dp}\,,$$

et de plus $\int_{\mathbf{R}^n} |p|(p^2+1)^{-k}\, dp < \infty$, puisque $n-2k<-1$. Nous avons prouvé ainsi la première partie de la proposition. La seconde partie peut être exprimée par la relation $ID_m = D_m I$ qui est visiblement réalisée sur l'ensemble S dense dans $W_2^k(\mathbf{R}^n)$, donc sur $W_2^k(\mathbf{R}^n)$ tout entier. Ceci achève la démonstration.

Exercice. Montrer que $W_2^k(\mathbf{R}^n) \subset C^{(m)}(\mathbf{R}^n)$ pour $k > \frac{n}{2} + m$.

Théorème 4.4. *Pour $k > N + \frac{n}{2}$ on a l'inclusion*

$$W_2^k(\mathbf{R}^n) \subset \mathscr{B}_N(\mathbf{R}^n).$$

Démonstration. Soit $f \in S$. Alors

$$\|f\|_{C_N^*(\mathbf{R}^n)} = \sup_{\|\varphi\|_{C(\mathbf{R}^n)}=1} \left| \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x)\,(1+|x|)^N f(x)\, dx \right| =$$

$$= \sup_{\|\varphi\|_{C(\mathbf{R}^n)}=1} \left| \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,(1+|x|)^k \frac{\varphi(x)}{(1+|x|)^{k-N}}\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|\varphi\|_{C(\mathbf{R}^n)}=1} \sqrt{\int_{\mathbf{R}^n} \frac{|\varphi(x)|^2\, dx}{(1+|x|)^{2(k-N)}}} \sqrt{\int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|^2 (1+|x|)^{2k}\, dx}\,. \tag{4.6}$$

On a

$$\sup_{\|\varphi\|_{C(\mathbf{R}^n)}=1} \sqrt{\int_{\mathbf{R}^n} \frac{|\varphi(x)|^2\, dx}{(1+|x|)^{2(k-N)}}} = \sqrt{\int_{\mathbf{R}^n} \frac{dx}{(1+|x|)^{2(k-N)}}} < \infty\,, \tag{4.7}$$

puisque $2(k-N) > n$. Par ailleurs $(1+|x|)^{2k} \leqslant (1+x^2)^k 2^k$, donc

$$\int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|^2 (1+|x|)^{2k}\, dx \leqslant 2^k \|f\|_{\tilde{W}_2^k(\mathbf{R}^n)}. \tag{4.8}$$

Les relations (4.6), (4.7) et (4.8) entraînent $\|f\|_{C_N^*} \leqslant c\,\|f\|_{\tilde{W}_2^k(\mathbf{R}^n)}$, où la constante c dépend de N, n et de k, mais pas de $f \in S$. On déduit de là que

$$\|\varphi\|_{\mathscr{B}_N}(\mathbf{R}^n) \leqslant c\,\|\varphi\|_{W_2^k(\mathbf{R}^n)}, \qquad c = \text{const.}$$

pour tout $\varphi \in \tilde{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n)$*). Il reste à montrer que si une suite $\{\varphi_j\}$ de fonctions $\varphi \in \tilde{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ converge vers 0 pour la norme de $\mathscr{B}_N(\mathbf{R}^n)$ et est de Cauchy pour la norme de $W_2^k(\mathbf{R}^n)$, alors elle converge vers 0 pour la norme de $W_2^k(\mathbf{R}^n)$. Soit $\{\varphi_j\}$ une telle suite et soit $\tilde{\varphi}_j = F^{-1}\varphi_j$. Alors $\tilde{\varphi}_j \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $\tilde{\varphi}_j \to 0$ dans $C_N^*(\mathbf{R}^n)$ et $\{\tilde{\varphi}_j\}$ est de Cauchy pour la norme de $\tilde{W}_2^k(\mathbf{R}^n)$. Il faut prouver que $\tilde{\varphi}_j \to 0$ dans $\tilde{W}_2^k(\mathbf{R}^n)$. La suite $\{\tilde{\varphi}_j\}$ étant de Cauchy pour la

*) $\tilde{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ désigne l'espace des transformées de Fourier des fonctions $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$.

norme de $W_2^k(\mathbf{R}^n)$, elle converge pour la norme de $L_2(\mathbf{R}^n) \supset \tilde{W}_2^k(\mathbf{R}^n)$. Il suffit de montrer que $\|\tilde{\varphi}_j\|_{L_2(\mathbf{R}^n)} \to 0$. Soit $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. Alors

$$\left| \int_{\mathbf{R}^n} \varphi_j(x)\, \psi(x)\, dx \right| \leqslant \|\varphi_j\|_{C_N^*(\mathbf{R}^n)} \|\psi\|_{C_N(\mathbf{R}^n)} \to 0$$

lorsque $j \to 0$. D'autre part, si $\tilde{\varphi}_j \to 0$ pour la norme de $L_2(\mathbf{R}^n)$, alors

$$\lim_{j \to \infty} \int_{\mathbf{R}^n} \varphi_j(x)\, \psi(x)\, dx = (\varphi, \psi)_{L_2(\mathbf{R}^n)}.$$

Donc, $(\varphi, \psi)_{L_2(\mathbf{R}^n)} = 0$ pour tout $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, d'où il vient que $\varphi = 0$. C.Q.F.D.

Théorème 4.5. *On a l'inclusion* $\mathscr{B}_N(\mathbf{R}^n) \subset C^{(N)}(\mathbf{R}^n)$.
La démonstration de ce théorème passe par celle du lemme suivant.

Lemme 4.2. *Soient* $f \in \mathscr{B}_N^0(\mathbf{R}^n)$, $\tilde{f} = F^{-1} f$. *Alors*

$$D^\alpha f(p) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^n} (-ix)^\alpha e^{ip \cdot x} \tilde{f}(x)\, dx,$$

où

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \qquad D^\alpha = D_1^{\alpha_1}, \ldots, D_n^{\alpha_n},$$

$$(-ix)^\alpha = (-i)^{|\alpha|} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}, \qquad |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n.$$

Démonstration. Il est évident qu'il suffit de vérifier la proposition du lemme dans les deux cas suivants : $\tilde{f} \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ et $\tilde{f} = \delta_\xi$. Dans le premier cas elle est évidente. Supposons que $\tilde{f} = \delta_\xi$. Alors $f(p) = (2\pi)^{-n/2} e^{-ip \cdot \xi}$, de sorte que

$$D^\alpha f(p) = (2\pi)^{-n/2} (-i\xi)^\alpha e^{-ip \cdot \xi} = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-ip \cdot x} \delta(x - \xi)\, (-ix)^\alpha dx.$$

C.Q.F.D.

Démonstration du théorème. Soient $f \in \mathscr{B}_N^0(\mathbf{R}^n)$, $\tilde{f} = F^{-1} f$. Alors pour $|\alpha| \leqslant N$, on a

$$|D^\alpha f(p)| = (2\pi)^{-n/2} \left| \int_{\mathbf{R}^n} \tilde{f}(x)\, (-ix)^\alpha e^{-ip \cdot x}\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant (2\pi)^{-n/2}\, \|\tilde{f}\|_{C_N^*(\mathbf{R}^n)} \sup_{x \in \mathbf{R}^n} \left| \frac{x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} e^{-ip \cdot x}}{(1 + |x|)^N} \right| \leqslant (2\pi)^{-n/2} \|f\|_{\mathscr{B}_N(\mathbf{R}^n)}.$$

Donc l'opérateur I_0 d'immersion canonique de $\mathscr{B}_N^0(\mathbf{R}^n) \subset \mathscr{B}_N(\mathbf{R}^n)$ dans $C^{(N)}(\mathbf{R}^n)$ est borné et peut être prolongé en un homomorphisme I : $\mathscr{B}_N(\mathbf{R}^n) \to C^{(N)}(\mathbf{R}^n)$. Il reste à prouver que $(I\varphi = 0) \Rightarrow (\varphi = 0)$.

Soit $I\varphi=0$, et soit $\{\varphi_j\}$ une suite de fonctions de $\mathscr{B}_N^0(\mathbf{R}^n)$ convergeant vers φ pour la norme de $\mathscr{B}_N(\mathbf{R}^n)$. Alors

$$\lim_{j\to\infty}\|\varphi_j\|_{C^{(N)}(\mathbf{R}^n)}=\lim_{j\to\infty}\|I\varphi_j\|_{C^{(N)}(\mathbf{R}^n)}=\|I\varphi\|=0.$$

Posons $\tilde{\varphi}_j=F^{-1}\varphi_j$, $\tilde{\varphi}=F^{-1}\varphi$. On a $\tilde{\varphi}_j\to\tilde{\varphi}$ pour la norme de $C_N^+(\mathbf{R}^n)$, d'où on déduit en particulier que pour tout $f\in C_N(\mathbf{R}^n)$

$$\int_{\mathbf{R}^n}\tilde{\varphi}(x)f(x)\,dx=\lim_{j\to\infty}\int_{\mathbf{R}^n}\tilde{\varphi}_j(x)f(x)\,dx.$$

Nous allons montrer que pour toute fonction indéfiniment dérivable $f\in C_N(\mathbf{R}^n)$

$$\lim_{j\to\infty}\int_{\mathbf{R}^n}\tilde{\varphi}_j(x)f(x)\,dx=0,$$

d'où il s'ensuivra que $\varphi=0$, puisque $C^\infty(\mathbf{R}^n)\cap C_N(\mathbf{R}^n)$ est dense dans $C_N(\mathbf{R}^n)$.

Soient donc f une fonction fixe indéfiniment dérivable de $C_N(\mathbf{R}^n)$ et $\varepsilon>0$ un nombre fixe. Choisissons un indice j_0 tel que pour $j>j_0$ l'on ait l'inégalité $\|\tilde{\varphi}_j-\tilde{\varphi}_{j_0}\|_{C_N^+(\mathbf{R}^n)}<\varepsilon$. Etant donné que $\tilde{\varphi}_{j_0}$ est une combinaison linéaire de fonctions de $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ et de fonctions δ_ξ, on peut exhiber un nombre $A>0$ tel que $\int_{\mathbf{R}^n}\tilde{\varphi}_{j_0}(x)\,g(x)\,dx=0$ pour toute fonction $g\in C_N(\mathbf{R}^n)$, nulle sur la boule $|x|<A$. Soit $f_0\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ une fonction confondue avec f sur cette boule et telle que $|f_0|\leqslant|f|$. On a

$$\int_{\mathbf{R}^n}\tilde{\varphi}_j(x)f(x)\,dx=\int_{\mathbf{R}^n}\tilde{\varphi}_j(x)f_0(x)\,dx+$$

$$+\int_{\mathbf{R}^n}[\tilde{\varphi}_j(x)-\tilde{\varphi}_{j_0}(x)][f(x)-f_0(x)]\,dx, \qquad (4.9)$$

puisque

$$\int_{\mathbf{R}^n}\tilde{\varphi}_{j_0}(x)[f(x)-f_0(x)]\,dx=0.$$

Considérons le premier terme du second membre de la formule (4.9). On a

$$\left|\int_{\mathbf{R}^n}\tilde{\varphi}_j(x)f_0(x)\,dx\right|=\left|\int_{\mathbf{R}^n}\tilde{\varphi}_j(x)[Ff_0](x)\,dx\right|\leqslant\|\varphi_j\|_{C(\mathbf{R}^n)}\int_{\mathbf{R}^n}|[Ff_0](x)|\,dx\to0$$

pour $j\to\infty$. Le second terme du second membre de (4.9) se majore de la manière suivante:

$$\left|\int_{\mathbf{R}^n}\{\tilde{\varphi}_j(x)-\tilde{\varphi}_{j_0}(x)\}[f(x)-f_0(x)]\,dx\leqslant\varepsilon\|f-f_0\|_{C_N(\mathbf{R}^n)}\leqslant2\varepsilon\|f\|_{C_N(\mathbf{R}^n)}.\right.$$

On peut donc exhiber un indice $j_1\geqslant j_0$ tel que pour $j\geqslant j_1$

$$\left|\int_{\mathbf{R}^n}\tilde{\varphi}_j(x)f(x)\,dx\right|\leqslant\varepsilon(1+2\|f\|_{C_N(\mathbf{R}^n)}).$$

Le nombre ε étant arbitraire, on en déduit que

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\mathbf{R}^n} \tilde{\varphi}_j(x) f(x)\, dx = 0,$$

ce qui prouve le théorème.

Ainsi les théorèmes 4.4 et 4.5 entraînent que

$$W_2^k(\mathbf{R}^n) \subset \mathscr{B}_N(\mathbf{R}^n) \subset C^N(\mathbf{R}^n)$$

pour $k > \dfrac{n}{2} + N$.

On constate que l'algèbre de Banach $\mathscr{B}_N(\mathbf{R}^n)$ est située «entre» un espace de Sobolev contenu dans $C^N(\mathbf{R}^n)$ et l'algèbre de Banach $C^N(\mathbf{R}^n)$, de sorte que $\mathscr{B}_N(\mathbf{R}^n)$ est une algèbre de Banach plus «proche» d'un espace de Sobolev que $C^N(\mathbf{R}^n)$.

Exercice. Montrer que

$$[F\varphi](p) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x)\, e^{-ip\cdot x}\, dx,$$

pour tout $\varphi \in C_N^+(\mathbf{R}^n)$.

§ 5. La fonction de Dirac δ_ξ dans les espaces de Sobolev

Nous avons introduit plus haut la fonctionnelle $\delta_\xi \in C^*(\mathbf{R}^n)$ qui à toute fonction g associe sa valeur $g(\xi)$ en un point $\xi \in \mathbf{R}^n$. Le théorème d'immersion de Sobolev nous dit que pour $k > n/2$ la restriction de la fonctionnelle δ_ξ à $W_2^k(\mathbf{R}^n) \subset C(\mathbf{R}^n)$ appartient à l'espace $W_2^{-k}(\mathbf{R}^n)$. Cette restriction sera encore désignée par δ_ξ et appelé *fonction de Dirac* δ_ξ.

Nous savons que si l'on traite la fonction δ_ξ comme un élément de l'espace $C^+(\mathbf{R}^n)$, sa transformée de Fourier sera la fonction $\tilde{\delta}_\xi$:

$$\tilde{\delta}_\xi(p) = (2\pi)^{-n/2} e^{-ip\cdot\xi}. \tag{5.1}$$

Il se pose la question de savoir si cette formule est valable si l'on traite δ_ξ comme un élément de l'espace de Sobolev $W_2^{-k}(\mathbf{R}^n)$. Pour préciser cette question, adoptons la convention suivante: si une fonctionnelle $f \in W_2^{-k}(\mathbf{R}^n)$ est définie par la formule

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\, \varphi(x)\, dx = \int g(x)\, \varphi(x)\, dx, \qquad \varphi \in S,$$

où g est une fonction continue par morceaux, on identifiera la fonctionnelle f à la fonction g et on écrira $f(x) = g(x)$. Dans ce sens la fonction (5.1) est un élément de l'espace W_2^{-k} lorsque $k > n/2$.

Soit δ_ξ la fonction de Dirac dans $W_2^{-k}(\mathbf{R}^n)$ et soit $\delta_\xi = F\delta_\xi$. Montrons que la formule (5.1) est valable dans ce cas aussi. En se servant de l'égalité de Parseval et de l'égalité évidente $(F\overline{\varphi})(-p) = \overline{(F\varphi)(p)}$, $\varphi \in S$, on obtient

$$\varphi(\xi) = \int_{\mathbf{R}^n} \delta(x-\xi)\, \varphi(x)\, dx = \int_{\mathbf{R}^n} \tilde{\delta}_\xi(p)\, \tilde{\varphi}(-p)\, dp, \qquad \varphi \in S,$$

où $\tilde{\varphi}=F\varphi$. Par ailleurs, pour tout $\varphi\in S$

$$\varphi(\xi)=(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbf{R}^n} e^{ip\cdot\xi}\tilde{\varphi}(p)\,dp=(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbf{R}^n} e^{-ip\cdot\xi}\,\tilde{\varphi}(-p)\,dp.$$

Donc $\tilde{\delta}_\xi$ est définie comme une fonctionnelle sur $\tilde{W}_2^k(\mathbf{R}^n)$, $k>n/2$, par la formule

$$\int_{\mathbf{R}^n}\tilde{\delta}_\xi(p)\,\varphi(p)\,dp=\int_{\mathbf{R}^n}\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\,e^{-ip\cdot\xi}\varphi(p)\,dp,\qquad \varphi\in S,$$

donc la formule (5.1) est valable.

Indiquons maintenant un exemple de δ-*suite* en dimension un, c'est-à-dire une suite de fonctions continues par morceaux convergeant vers δ_ξ dans $W_2^{-1}(\mathbf{R})$. Choisissons à cet effet une suite $\{\tilde{\delta}_{\xi_j}\}$ de fonctions de $\tilde{W}_2^{-1}(\mathbf{R})$ telle que leurs transformées de Fourier soient continues par morceaux et que $\lim_{j\to\infty}\tilde{\delta}_{\xi_j}=\tilde{\delta}_\xi$. Pour δ-suite prenons alors $\{\delta_{\xi_j}\}=\{[F^{-1}\tilde{\delta}_{\xi_j}]\}$. Soit

$$\tilde{\delta}_{\xi_j}(p)=\begin{cases}\dfrac{1}{(2\pi)^{n/2}}\,e^{-ip\cdot\xi} & \text{pour } |p|<j,\\ 0 & \text{pour } |p|\geqslant j.\end{cases}$$

Montrons que

$$\lim_{j\to\infty}\|\tilde{\delta}_{\xi_j}-\tilde{\delta}_\xi\|_{\tilde{W}_2^{-1}(\mathbf{R})}=0.$$

En effet,

$$\|\tilde{\delta}_{\xi_j}-\tilde{\delta}_\xi\|=\sup_{\|\varphi\|_{\tilde{W}_2^1(\mathbf{R})}=1}\left|\int_{|p|>j}\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\,e^{-ip\cdot\xi}\varphi(p)\,dp\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sup_{\|\varphi\|_{\tilde{W}_2^1(\mathbf{R})}=1}\int_{|p|>j}\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\,|\varphi(p)|(p^2+1)^{1/2}(p^2+1)^{-1/2}\,dp\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\sqrt{\int_{|p|>j}\frac{1}{p^2+1}\,dp}\to 0,\qquad \text{lorsque } j\to\infty,$$

où sup est pris sur la sphère unité dans l'espace $\tilde{W}_2^1(\mathbf{R})$.
$\varphi\in S$

Pour déterminer l'image réciproque de la fonction δ_{ξ_j} nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 5.1. *La transformée réciproque de Fourier* φ *d'une fonction* $\tilde{\varphi}\in\tilde{W}_2^k(\mathbf{R}^n)$ *continue par morceaux absolument intégrable sur* $\mathbf{R}^n$ *peut être calculée par la formule*

$$\varphi(x)=(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbf{R}^n}e^{ip\cdot x}\,\tilde{\varphi}(p)\,dp \tag{5.2}$$

Démonstration. Soit $\{\varphi_j\}$ une suite de fonctions de S convergeant vers $\tilde{\varphi}$ pour la norme de l'espace $\tilde{W}_2^k(\mathbf{R}^n)$, et soit $\varphi_j = F^{-1}(\tilde{\varphi}_j)$. On demande de prouver que pour tout $\psi \in S$, on a

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x)\,dx \int_{\mathbf{R}^n} e^{ip\cdot x}\,\tilde{\varphi}_j(p)\,dp = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbf{R}^n} \psi(x)\,dx \int_{\mathbf{R}^n} e^{ip\cdot x}\,\tilde{\varphi}(p)\,dp, \tag{5.3}$$

ou, en modifiant l'ordre d'intégration dans (5.3),

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\mathbf{R}^n} \tilde{\varphi}_j(p)\,dp \int_{\mathbf{R}^n} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\, e^{ip\cdot x}\,\psi(x)\,dx = \int_{\mathbf{R}^n} \tilde{\varphi}(p)\,dp \int_{\mathbf{R}^n} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\,\psi(x)\,dx. \tag{5.4}$$

L'égalité (5.4) peut être mise sous la forme

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\mathbf{R}^n} \tilde{\varphi}_j(p)\,\tilde{\psi}(-p)\,dp = \int_{\mathbf{R}^n} \tilde{\varphi}(p)\,\tilde{\psi}(-p)\,dp,$$

ce qui achève la démonstration.

Donc

$$\delta_{\xi_j}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ip\cdot x}\,\tilde{\delta}_{\xi_j}(p)\,dp = \frac{1}{2\pi} \int_{-j}^{j} e^{ip\cdot(x-\xi)}\,dp = \frac{2}{\pi}\,\frac{\sin j(x-\xi)}{x-\xi}$$

Exercice. Construire une δ-suite en dimension n.

Exercice. Montrer que la suite $\{h_j\}$ de fonctions

$$h_j(x) = \begin{cases} j & \text{pour } |x-\xi| < 1/2j, \\ 0 & \text{pour } |x-\xi| \geqslant 1/2j \end{cases}$$

converge vers δ_ξ pour la norme de l'espace $W_2^{-1}(\mathbf{R})$.

La distribution δ_0 s'appelle tout simplement *fonction* δ et se note δ. De la définition de la fonction δ_ξ il résulte que

$$\varphi(\xi) = \int_{\mathbf{R}^n} \delta(x-\xi)\,\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbf{R}^n} \delta(x)\,\varphi(x+\xi)\,dx$$

pour tout $\varphi \in W_2^k(\mathbf{R}^n)$, $k > n/2$. Si $\{\delta_j\}$ est une suite de fonctions de S convergeant vers δ pour la norme de l'espace $W_2^{-k}(\mathbf{R}^n)$, alors la suite de fonctions

$$\delta_{\xi_j}(x) = \delta_j(x-\xi)$$

qui est de Cauchy pour la norme de l'espace $W_2^{-k}(\mathbf{R}^n)$ converge vers la distribution δ_ξ :

$$\lim_{j\to\infty}\int_{\mathbf{R}^n}\delta_{\xi_j}(x)\,\varphi(x)\,dx=\lim_{j\to\infty}\int_{\mathbf{R}^n}\delta_j(x-\xi)\,\varphi(x)\,dx=$$

$$=\lim_{j\to\infty}\int_{\mathbf{R}^n}\delta_j(x)\,\varphi(x+\xi)\,dx=\int_{\mathbf{R}^n}\delta(x)\,\varphi(x+\xi)\,dx=\int_{\mathbf{R}^n}\delta(x-\xi)\,\varphi(x)\,dx.$$

Ce fait justifie la notation

$$\int_{\mathbf{R}^n}\delta_\xi(x)\,\varphi(x)\,dx=\int_{\mathbf{R}^n}\delta(x-\xi)\,\varphi(x)\,dx.$$

§ 6. Fonctions différentiables dans les espaces de Sobolev

A chaque fonction continue $\varphi\colon \mathbf{R}^n\to\mathbf{C}$ on peut associer une fonctionnelle sur $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ qui donne de $f\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ le nombre $\int_{\mathbf{R}^n}\varphi(x)\,f(x)\,dx$. Cette fonctionnelle sera aussi désignée par φ et identifiée ici à la fonction φ ; il est évident qu'à des fonctions φ différentes correspondent des fonctionnelles différentes sur $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. Traitons φ comme une fonctionnelle sur $W_2^{-k}(\mathbf{R}^n)$; si cette fonctionnelle est bornée, on peut la prolonger de façon unique en un élément de l'espace $[W_2^{-k}(\mathbf{R}^n)]^*=W_2^k(\mathbf{R}^n)$. Nous identifions ainsi certaines fonctions continues à des éléments de l'espace $W_2^k(\mathbf{R}^n)$ et il est légitime de s'interroger sur l'appartenance de chaque fonction continue à l'espace $W_2^k(\mathbf{R}^n)$.

Lemme 6.1. *Sur l'ensemble S la norme de l'espace $W_2^k(\mathbf{R}^n)$, $k\geqslant 0$, est équivalente à la norme*

$$\|\varphi\|_k^2=\sum_{|\alpha|\leqslant k}\|D^\alpha\varphi\|_{L_2(\mathbf{R}^n)}^2,$$

où

$$\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n),\qquad |\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_n,\qquad D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\ldots D_n^{\alpha_n}.$$

Démonstration. L'équivalence des normes $\|\cdot\|_{W_2^k(\mathbf{R}^n)}$ et $\|\cdot\|_k$ signifie par définition qu'il existe des constantes c_1 et c_2 telles que pour tout $\varphi\in S$ l'on ait

$$\|\varphi\|_{W_2^k(\mathbf{R}^n)}^2\leqslant c_1\|\varphi\|_k,\qquad \|\varphi\|_k\leqslant c_2\|\varphi\|_{W_2^k(\mathbf{R}^n)}.$$

Soit $\tilde\varphi=F\varphi$. Alors

$$\|\varphi\|_{W_2^k(\mathbf{R}^n)}^2=\|\tilde\varphi\|_{\tilde W_2^k(\mathbf{R}^n)}^2=\int_{\mathbf{R}^n}(1+p^2)^k\,|\tilde\varphi(p)|^2\,dp,$$

$$\|\varphi\|_k^2=\sum_{|\alpha|\leqslant k}\int_{\mathbf{R}^n}|ip|^\alpha\tilde\varphi(p)|^2\,dp=\int_{\mathbf{R}^n}|\tilde\varphi(p)|^2\sum_{|\alpha|\leqslant k}p_1^{2\alpha_1}\ldots p_n^{2\alpha_n}\,dp$$

Il est évident que

$$(1+p^2)^k=\sum_{j=0}^{k}C_k^j(p^2)^j\leqslant c\sum_{|\alpha|\leqslant k}p_1^{2\alpha_1}\ldots p_n^{2\alpha_n}.$$

Par ailleurs,

$$p_1^{2\alpha_1} \dots p_n^{2\alpha_n} \leqslant |p|^{2(\alpha_1+\dots+\alpha_n)} = |p|^{2|\alpha|},$$

de sorte que

$$\sum_{|\alpha|\leqslant k} p_1^{2\alpha_1} \dots p_n^{2\alpha_n} \leqslant \sum_{j=0}^{k} |p|^{2j} \leqslant (1+p^2)^k$$

ce qui prouve le lemme.

Soit maintenant $\varphi: \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ une fonction k fois dérivable. Comme pour les fonctions de S posons

$$\|\varphi\|_k^2 = \sum_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha \varphi\|_{L_2(\mathbf{R}^n)}^2.$$

On a le théorème suivant.

Théorème 6.1. *Une fonction φ k fois continûment dérivable appartient à l'espace $W_2^k(\mathbf{R}^n)$ si et seulement si $\|\varphi\|_k < \infty$.*

Démonstration. Supposons que $\varphi \in W_2^k(\mathbf{R}^n)$, c'est-à-dire qu'existe un M tel que pour tout $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ l'on ait

$$\left| \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x) f(x)\, dx \right| \leqslant M \|f\|_{W_2^{-k}(\mathbf{R}^n)}.$$

Soit $|\alpha| \leqslant k$. Alors une intégration par parties nous apprend que pour tout $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$

$$\left| \int_{\mathbf{R}^n} [D^\alpha \varphi(x)] f(x)\, dx \right| = \left| \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x)\, D^\alpha f(x)\, dx \right| \leqslant M \|D^\alpha f\|_{W_2^{-k}(\mathbf{R}^n)} =$$

$$= M \sqrt{\int_{\mathbf{R}^n} p_1^{2\alpha_1} \dots p_n^{2\alpha_n} |\tilde{f}(p)|^2 (1+p^2)^{-k}\, dp} \leqslant M \|f\|_{L_2(\mathbf{R}^n)},$$

puisque

$$\sup_{p\in\mathbf{R}^n} \frac{p_1^{2\alpha_1} \dots p_n^{2\alpha_n}}{(1+p^2)^k} \leqslant 1$$

Soit ψ une fonction continue satisfaisant la condition

$$\left| \int_{\mathbf{R}^n} \psi(x) f(x)\, dx \right| \leqslant M \|f\|_{L_2(\mathbf{R}^n)}$$

pour tout $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. Montrons que

$$\int_{\mathbf{R}^n} |\psi(x)|^2\, dx \leqslant M^2.$$

Supposons qu'une fonction $e_m \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ vérifie les conditions $0 \leqslant e_m(x) \leqslant 1$, $e_m(x) = 1$ pour $|x| \leqslant m$. Alors

$$\int\limits_{|x|\leqslant m} |\psi(x)|^2\,dx \leqslant \int\limits_{\mathbf{R}^n} |e_m(x)\,\psi(x)|^2\,dx = \int\limits_{\mathbf{R}^n} \psi(x)\,e_m^2(x)\,\overline{\psi(x)}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant M\sqrt{\int\limits_{\mathbf{R}^n} e_m^4(x)\,|\psi(x)|^2\,dx} \leqslant M\sqrt{\int\limits_{\mathbf{R}^n} |e_m(x)\,\psi(x)|^2\,dx}.$$

Par suite

$$\|e_m\psi\|_{L_2(\mathbf{R}^n)} \leqslant M, \qquad \int\limits_{|x|\leqslant m} |\psi(x)|^2\,dx \leqslant \|e_m\psi\|^2_{L_2(\mathbf{R}^n)} \leqslant M^2$$

En faisant tendre m vers ∞ dans la dernière inégalité, on obtient la majoration annoncée:

$$\|\psi\|_{L_2(\mathbf{R}^n)} \leqslant M.$$

En appliquant cette majoration aux fonctions $D^\alpha\varphi$, $|\alpha| \leqslant k$, on trouve que $\|\varphi\|_k < \infty$.

Supposons réciproquement que $\|\varphi\|_k < \infty$. On demande d'établir la majoration

$$\left|\int\limits_{\mathbf{R}^n} \varphi(x)\,f(x)\,dx\right| \leqslant c\,\|f\|_{W_2^{-k}(\mathbf{R}^n)}, \qquad f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n).$$

Supposons qu'une fonction $e \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ est telle que $e(x)=1$ pour $|x| \leqslant 1$. Posons $e_m(x)=e(x/m)$ et $m \geqslant 1$. Alors $e_m(x)=1$ pour $|x| \leqslant m$ et $D^\alpha e_m(x) = m^{-|\alpha|} D^\alpha e(\xi)|_{\xi=x/m}$, de sorte que toutes les dérivées d'ordre $\leqslant k$ des fonctions e_m sont uniformément bornées par rapport à m:

$$\sup_{\substack{x\in\mathbf{R}^n \\ m\geqslant 1,\ |\alpha|\leqslant k}} |D^\alpha e_m(x)| = M_1 < \infty$$

Il s'ensuit de là que

$$\|e_m\varphi\|_k \leqslant M_2\,\|\varphi\|_k,$$

où M_2 est une constante ne dépendant pas de m. Du lemme 6.1 il résulte que pour tout $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$

$$\left|\int\limits_{\mathbf{R}^n} e_m(x)\,\varphi(x)\,f(x)\,dx\right| \leqslant M_3\,\|\varphi\|_k\,\|f\|_{W_2^{-k}(\mathbf{R}^n)},$$

où M_3 est indépendant de m. Il reste à remarquer que pour tout $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, on peut exhiber un $m \geqslant 1$ tel que

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} \varphi(x)\,f(x)\,dx = \int\limits_{\mathbf{R}^n} e_m(x)\,\varphi(x)\,f(x)\,dx,$$

ce qui prouve le théorème.

Soit $[W_2^k(\mathbf{R}^n)]^0$ l'espace vectoriel des fonctions complexes k fois continûment dérivables sur $\mathbf{R}^n$ telles que $\|\varphi\|_k < \infty$. Nous avons obtenu l'homomorphisme algébrique inversible

$$\iota : [W_2^k(\mathbf{R}^n)]^0 \to W_2^k(\mathbf{R}^n).$$

Par ailleurs, le théorème d'immersion de Sobolev affirme l'existence pour $0 \leqslant l < k - \frac{n}{2}$ de l'homomorphisme inversible

$$I\colon W_2^k(\mathbf{R}^n) \to C^{(l)}(\mathbf{R}^n),$$

dont la restriction à S est l'application identique.

Théorème 6.2. *Si l'entier $l \geqslant 0$ est tel que $k > l + \frac{n}{2}$, alors l'application $I\iota$ réalise une immersion de l'espace $[W_2^k(\mathbf{R}^n)]^0$ dans l'espace $C^{(l)}(\mathbf{R}^n)$.*

Démonstration. Soit $\varphi \in [W_2^k(\mathbf{R}^n)]^0$, $\tilde{\varphi} = I\iota\varphi$. Il suffit de montrer que pour tout $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$

$$\int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x) f(x)\, dx = \int_{\mathbf{R}^n} \tilde{\varphi}(x) f(x)\, dx.$$

Soit $\{\varphi_m\}$ une suite de fonctions de S telle que

$$\sup_{\substack{f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n) \\ \|f\|_{W_2^{-k}(\mathbf{R}^n)} = 1}} \left| \int_{\mathbf{R}^n} [\varphi(x) - \varphi_n(x)] f(x)\, dx \right| \to 0,$$

c'est-à-dire que $\varphi_m \to \iota\varphi$ dans $W_2^k(\mathbf{R}^n)$. Or I est un homomorphisme; donc $\varphi_m = I\varphi_m \to I\iota\varphi$ dans $C^{(l)}(\mathbf{R}^n)$, donc dans $C(\mathbf{R}^n)$. Par conséquent, pour tout $f \in [C(\mathbf{R}^n)]^*$

$$\lim_{m \to \infty} \int_{\mathbf{R}^n} \varphi_m(x) f(x)\, dx = \int_{\mathbf{R}^n} [I\iota\varphi(x)] f(x)\, dx.$$

Ceci est en particulier vrai pour $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. Ce qui prouve le théorème.

Considérons maintenant une fonction $\varphi(x, t)$ des variables $x \in \mathbf{R}^n$ et $t \in]a, b[\in \mathbf{R}$. Supposons que pour tout $t \in]a, b[$ l'application $\Phi(t)\colon x \to \varphi(x, t)$ est une fonction k fois continûment dérivable et de plus

$$\sum_{|\alpha| \leqslant k} \int_{\mathbf{R}^n} \left| \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha \varphi(x, t) \right|^2 dx < \infty.$$

Alors $\Phi(t)$ est un élément de l'espace $W_2^k(\mathbf{R}^n)$, ou, autrement dit, Φ est une fonction définie sur $]a, b[$ à valeurs dans $W_2^k(\mathbf{R}^n)$. On dira que la fonction Φ est *engendrée* par la fonction complexe φ. Indiquons une condition suffisante commode de continuité de la fonction Φ.

Théorème 6.3. *Soit $\varphi\colon \mathbf{R}^n \times]a, b[\to \mathbf{C}$ une fonction k fois dérivable par rapport au premier argument et vérifiant les conditions suivantes:*

a) *pour tous les $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ tels que $|\alpha| \leqslant k$ la fonction*

$$(x, t) \to \frac{\partial^{|\alpha|+1}}{\partial t\, \partial x^\alpha} \varphi(x, t)$$

est continue en t pour x fixe;

b) *pour tous les* α *tels que* $|\alpha| \leqslant k$ *et* $t_0 \in]a, b[$ *il existe une fonction* $\psi_{\alpha, t_0} \in L_2(\mathbf{R}^n)$ *telle que pour tout* t *pris dans un voisinage de* t_0 *l'on ait*

$$\left| \frac{\partial^{|\alpha|+1}}{\partial t \, \partial x^\alpha} \varphi(x, t) \right| \leqslant |\psi_{\alpha, t_0}(x)|.$$

Alors, la fonction Φ *à valeurs dans* $W_2^k(\mathbf{R}^n)$ *engendrée par* φ *est continue.*

Démonstration. Soit $t_0 \in]a, b[$. On demande de montrer que pour tout α tel que $|\alpha| \leqslant k$, on a

$$\lim_{h \to \infty} \| D^\alpha \Phi(t_0 + h) - D^\alpha \Phi(t_0) \|_{L_2(\mathbf{R}^n)} = 0,$$

car cette relation est équivalente à la convergence de $\Phi(t_0 + h)$ vers $\Phi(t_0)$ pour la norme $\| \cdot \|_k$. On a

$$\frac{\partial^{|\alpha|} \varphi(x, t+h)}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi(x, t)}{\partial x^\alpha} = h \frac{\partial^{|\alpha|+1} \varphi(x, t + \theta(x) h)}{\partial t \, \partial x^\alpha},$$

où $0 \leqslant \theta(x) \leqslant 1$. Donc, pour h assez petits

$$\| D^\alpha \Phi(t_0 + h) - D^\alpha \Phi(t_0) \|_{L_2(\mathbf{R}^n)} \leqslant |h| \, \| \varphi_{\alpha, t_0} \|_{L_2(\mathbf{R}^n)} \to 0$$

lorsque $h \to 0$. C.Q.F.D.

Exemple. Soit

$$x \in \mathbf{R}, \quad t \in \mathbf{R}, \quad \varphi(x, t) = \frac{x^{(l)}}{(x - i)^m} e^{ix^2 t^2 - \delta t},$$

où $l \geqslant 0$, $m \geqslant 0$ sont entiers, et soit $\delta > 0$. Il est aisé de voir que pour $m > l$, $k < m - l$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^k \varphi(x, t)}{\partial x^k} \right|^2 dx < \infty,$$

de sorte que pour $m > l$ la fonction φ engendre une fonction Φ à valeurs dans $W_2^{m-l-1}(\mathbf{R})$. Grâce au théorème 6.3 on s'assure que pour $m > l + 2$ la fonction Φ est continue en tant que fonction à valeurs dans $W_2^{m-l-3}(\mathbf{R})$. En particulier, pour tous $a, b \in \mathbf{R}$, existe l'intégrale

$$\int_a^b \Phi(t) \, dt$$

qui est comprise comme la limite de sommes de Riemann pour la norme de l'espace $W_2^{m-l-3}(\mathbf{R})$. Si l'on exige de plus que soit réalisée l'inégalité $m > l + 3$, alors on aura la formule suivante :

$$\left[\int_a^b \Phi(t) \, dt \right](x) = \int_a^b \varphi(x, t) \, dt.$$

En effet, dans ce cas $W_2^{m-l-3}(\mathbf{R}) \subset C(\mathbf{R})$; donc la convergence des sommes de Riemann de l'intégrale du premier membre entraîne leur convergence

dans $C(\mathbf{R})$. Vu que les sommes intégrales des deux intégrales sont confondues comme fonctions de x et que la convergence dans $C(\mathbf{R})$ entraîne la convergence simple, il vient que les intégrales du premier et du second membre sont confondues comme fonctions de x.

Si par ailleurs $\|\Phi(t)\|_{W_2^{m-l-3}(\mathbf{R})} \leqslant f(t)$, où la fonction f est intégrable à l'infini, alors l'intégrale $\int_a^\infty \Phi(t)\,dt$ existe au sens de la convergence pour la norme de $W_2^{m-l-3}(\mathbf{R})$, puisque

$$\left\| \int_c^d \Phi(t)\,dt \right\| \leqslant \int_c^d \|\Phi(t)\|\,dt \leqslant \int_c^d f(t)\,dt \to 0$$

lorsque $c,\ d \to +\infty$. Ceci étant, on peut affirmer également que pour tout $x \in \mathbf{R}$, l'intégrale $\int_0^\infty \varphi(x,t)\,dt$ converge et l'on a la formule

$$\left[\int_0^\infty \Phi(t)\,dt\right](x) = \int_a^\infty \varphi(x,t)\,dt,$$

qui se prouve par un passage à la limite pour $b \to +\infty$ dans la formule acquise précédemment pour les intégrales à limites finies; on se sert de nouveau de l'inclusion $W_2^{m-l-3}(\mathbf{R}) \subset C(\mathbf{R})$.

Il est aisé de voir que pour $t \geqslant 0$ la fonction Φ satisfait l'inégalité

$$\|\Phi(t)\|_{W_2^{m-l-3}(\mathbf{R})} \leqslant P(t)\,e^{-\alpha t},$$

où P est un polynôme. Donc, l'intégrale

$$I = \int_0^\infty \Phi(t)\,dt$$

existe, et de plus

$$I_\alpha(x) = \frac{x^l}{(x-i)^m} \int_0^\infty e^{ix^2t^2-\alpha t}\,dt.$$

Le théorème d'immersion de Sobolev nous dit maintenant que si existe $I_0 = \lim_{\alpha \to +0} I_\alpha$, où la limite est comprise au sens de la convergence pour la norme de $W_2^{s+1}(\mathbf{R}^n)$, $s \geqslant 0$, alors

$$I_0(x) = \lim_{\alpha \to +0} \frac{x^l}{(x-i)^m} \int_0^\infty e^{ix^2t^2-\alpha t}\,dt = \frac{x^l}{(x-i)^m} \int_0^\infty e^{ix^2t^2}\,dt = \frac{e^{i\pi/4}\sqrt{\pi}}{2} \frac{x^{l-1}}{(x-i)^m} \operatorname{sign} x$$

Pour montrer que $\lim_{\alpha \to +0}$ existe, il suffit de prouver que la suite $\{I_\alpha\}$ est de Cauchy pour la norme de $W_2^{s+1}(\mathbf{R})$, ce qui à son tour implique l'existence pour $0 \leqslant j \leqslant s+1$ de $\lim_{\alpha \to +0} d^j I_\alpha / dx^j$ au sens de la convergence pour la norme

de $L_2(\mathbf{R})$. On a

$$\frac{d^j I_\alpha(x)}{dx^j} = \int_0^\infty \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^j \frac{x^l}{(x-i)^m} e^{ix^2t^2 - \alpha t} \right] dt.$$

Il est aisé de voir que $\dfrac{d^j I_\alpha(x)}{dx^j}$ est une combinaison linéaire des intégrales

$$I_{j,\mu,\nu}(\alpha, x) = \int_0^\infty \frac{t^{2\nu} x^{l+2\nu+\mu-j}}{(x-i)^{m+\mu}} e^{ix^2t^2 - \alpha t} dt,$$

où $0 \leqslant \mu \leqslant j$, $0 \leqslant \nu \leqslant j-\mu$.

Posons $\int_0^\infty t^{2\nu} e^{ix^2t^2 - \alpha t} dt = \bar{I}_\nu(\alpha)$. L'intégrale $\bar{I}_\nu(\alpha)$ se met sous la forme

$$\bar{I}_\nu(\alpha) = (1+i)^{2\nu+1} \int_0^\infty y^{2\nu} e^{-2x^2y^2} e^{-\alpha y(1+i)} dy.$$

Grâce à l'inégalité

$$|1 - e^{-\alpha y(1+i)}| \leqslant \alpha\sqrt{2}\, y,$$

qui est valable pour $y \geqslant 0$, on obtient la majoration suivante :

$$|\bar{I}_\nu(\alpha) - \bar{I}_\nu(0)| \leqslant 2^{\nu+1} \alpha \int_0^\infty y^{2\nu+1} e^{-2x^2y^2} dy = c_\nu \alpha / x^{2\nu+2},$$

où c_ν est indépendant de α et de x. On a ainsi

$$|I_{j,\mu,\nu}(\alpha, x) - I_{j,\mu,\nu}(0, x)| \leqslant c_\nu \alpha \frac{|x|^{l-2+\mu-j}}{(x^2+1)^{m/2+\mu/2}}.$$

Prenons $s \leqslant l-3$; alors $l-2+\mu-j \geqslant 0$ pour tous $j \leqslant s+1$, $0 \leqslant \mu \leqslant j$. Sous ces conditions $(m+\mu)-(l-2+\mu-j) \geqslant m-l+2$. Donc

$$|I_{j,\mu,\nu}(\alpha, x) - I_{j,\mu,\nu}(0, x)| \leqslant c \cdot a \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{m-l}{2}+1}} = c\alpha f(x),$$

où $f \in L_2(\mathbf{R})$. Ce qui entraîne l'existence de $\lim_{\alpha \to +0} \dfrac{d^j I_\alpha}{dx^j}$ pour la norme de $L_2(\mathbf{R})$.

On obtient finalement le résultat suivant.

Si $m \geqslant l+4 \geqslant 7$, $0 \leqslant s \leqslant l-3$, $s \leqslant m-l-3$ et si $\Phi_\alpha(t)$ est une fonction à valeurs dans $W_2^{s+1}(\mathbf{R})$ engendrée par la fonction

$$\varphi(x, t) = \frac{x^l}{(x-i)^m} e^{ix^2t^2 - \alpha t}, \qquad \alpha > 0,$$

alors

$$\left[\lim_{\alpha\to+0}\lim_{a\to\infty}\int_0^a \Phi_\alpha(t)\,dt\right](x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{i\pi/4}\,\frac{x^{l-1}\operatorname{sign}x}{(x-i)^m},$$

où les limites sont comprises au sens de la convergence pour la norme de $W_2^{s+1}(\mathbf{R})$.

CHAPITRE III

FONCTIONS D'OPÉRATEURS RÉGULIERS

Dans ce chapitre nous bâtissons le calcul opératoriel correspondant à une μ-structure (cf. Introduction) sur l'algèbre des opérateurs non bornés commutant dans un espace de Banach B. Nous nous proposons dans l'immédiat d'établir combien vaste est l'ensemble M des opérateurs muni d'une μ-structure. Nous verrons par ailleurs à quels symboles sont associés les opérateurs bornés dans B. Ceci nous permettra de construire l'extension (pour l'adhérence) de la classe des symboles de C^∞.

Pour simplifier, on développera ici un exposé qui sera indépendant de la théorie des μ-structures. Il s'avère toutefois que la notion de symbole ici introduite est confondue avec la même notion pour les μ-structures.

Pour illustrer la notion de fonction d'opérateurs, considérons une fonction de l'opérateur A de multiplication par une variable indépendante x dans l'espace de Sobolev $W_2^k = W_2^k(\mathbf{R}^n)$. Il est immédiat de s'assurer que si $\varphi \in C^k(\mathbf{R}^n)$, on peut de façon naturelle définir une fonction φ de l'opérateur A de multiplication par x: cet opérateur sera opérateur de multiplication par $\varphi(x)$. Il est aisé de voir que $\varphi(A)$ est un opérateur borné dans W_2^k. Si la dérivée d'ordre k de $\varphi(x)$ n'est pas bornée, il en sera de même de l'opérateur de multiplication par $\varphi(x)$ dans W_2^k.

Par ailleurs, l'opérateur A de multiplication par x dans W_2^k est doué des propriétés suivantes:

1) il engendre un groupe à un paramètre d'opérateurs de multiplication par les fonctions e^{ixt};

2) il satisfait la condition suivante: pour tout $g \in W_2^s(\mathbf{R}^n)$, où $s \geqslant k$, on a

$$\| e^{ixt} g(x) \|_{W_2^s} \leqslant c(1 + |t|^k) \| g(x) \|_{W_2^s},$$

c'est-à-dire que

$$\| e^{ixt} \|_{W_2^s}^{W_2^s} \leqslant c(1 + |t|^k),$$

$$c = \text{const}.$$

Si l'on considère l'équation d'évolution correspondante, on peut formuler les conditions 1) et 2) de la manière suivante.

L'équation d'évolution

$$i\frac{du(t)}{dt}=Au(t),$$
$$u(0)=g, \quad g\in B_2, \quad B_2=W_2^l \tag{*}$$

admet une solution u et une seule (qui est une fonction continue de t à valeurs dans $B_1=W_2^k$, $k\leqslant l$) satisfaisant la condition

$$\|u(t)\|_{B_1}\leqslant c(1+|t|^s)\,\|u(0)\|_{B_2} \tag{**}$$

pour tous les $u(0)\in B_2=W_2^l$.

Le lien existant entre le nombre s de la majoration de la solution de l'équation d'évolution (*) (où l'opérateur donné est l'opérateur de multiplication par x) et entre le fait que l'opérateur de multiplication par $\varphi(x)$ est borné, ce lien se généralise, comme nous le verrons plus loin, à une large classe d'opérateurs.

La condition (**) imposée à la croissance de la solution de l'équation d'évolution engendrée par l'opérateur A est nécessaire si l'on exige que la fonction de A, qui est différentiable un nombre de fois k fini, soit un opérateur borné. Si l'on renonce à cette condition et que l'on se borne à des fonctions d'opérateur indéfiniment différentiables, la condition (**) peut être sensiblement atténuée.

Si l'on envisage l'opérateur de dérivation dans l'espace $C(\mathbf{R})$ des fonctions continues bornées à l'infini (ou dans l'espace C_N des fonctions continues croissant moins vite que $|x|^N$), on s'assure immédiatement que les « fonctions de cet opérateur » engendrent une algèbre $\mathscr{B}_0$ (resp. $\mathscr{B}_N$). Cet exemple montre que l'algèbre $\mathscr{B}_0$ (resp. $\mathscr{B}_N$ dans le cas de fonctions continues non bornées) est indispensable à l'étude d'une algèbre de fonctions d'opérateurs appartenant à une classe contenant l'opérateur de dérivation dans l'espace des fonctions continues. Avec ces deux exemples nous voulons mettre l'accent sur la « nécessité » d'utiliser une condition sur la croissance de type (**) et l'algèbre $\mathscr{B}_N$.

Considérons enfin l'opérateur A de multiplication par $x+iy$ dans $W_2^k(\mathbf{R}^2)$. Il est naturel de définir une fonction de $x+iy$, k fois différentiable comme une fonction $\varphi(x, y)$ de x et de y. Les opérateurs $x=\mathrm{Re}\,A$ et $y=\mathrm{Im}\,A$ satisfont visiblement la condition (**) et de plus $\mathrm{Re}\,A$ commute à $\mathrm{Im}\,A$.

Nous introduirons plus bas des opérateurs remplissant une condition de type (**) et nous les appellerons générateurs de degré s. Nous étudierons plus bas des opérateurs de la forme A_1+iA_2 où A_1 et A_2 sont des générateurs de degré s et où A_1 commute à A_2. De tels opérateurs seront dits *réguliers* et les fonctions de ces opérateurs seront traitées comme des fonctions de A_1 et de A_2.

Au § 8, nous prouverons un théorème établissant la « suffisance » de la condition (**). Plus exactement, on montrera que si un opérateur possède un spectre discret, il y a équivalence entre sa régularité et la complétude du

système de ses éléments propres et associés. Donc on établira (à la rigueur pour un spectre discret) combien riche est la classe des opérateurs réguliers.

Au § 9, on introduit la notion de système de distributions propres et associées d'un opérateur régulier et on prouve la complétude de ce système. Cependant cette notion n'a pu être introduite pour les opérateurs arbitraires, donc on ne peut parler de réciproque.

§ 1. Algèbre de fonctions d'un générateur

Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbf{C}$ muni de normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ telles que $c\|\cdot\|_1 \geqslant \|\cdot\|_2$, $c=$ const, et soient B_1 le complété de E pour la norme $\|\cdot\|_1$ et B_2, le complété de E pour la norme $\|\cdot\|_2$.

Notons ceci $B_1 \preceq B_2$.

Soit $u(t)$ une fonction définie sur $\mathbf{R}$ à valeurs dans E satisfaisant l'équation

$$i\frac{du}{dt} - Au = 0 \tag{1.1}$$

avec la condition initiale

$$u(0) = g, \quad g \in E, \tag{1.2}$$

où $A: E \to E$ est un opérateur linéaire et la dérivée $\dfrac{du}{dt} \in E$ est comprise au sens suivant:

$$\left\| \frac{du(t)}{dt} - \frac{u(t+h)-u(t)}{h} \right\|_1 \to 0 \quad \text{lorsque } h \to 0.$$

Définition. On dit qu'un homomorphisme $A: E \to E$ est un *générateur* si pour tout $g \in E$ la solution $u(t) \in E$ du problème (1.1), (1.2) existe et est unique dans la classe des fonctions vérifiant l'inégalité

$$\|u(t)\|_2 \leqslant c(1+|t|)^k,$$

où $c > 0$, $k \geqslant 0$ sont des constantes.

On dira que A est un *générateur de degré* $s \geqslant 0$ de couple déterminant d'espaces (B_1, B_2) s'il existe une constante c_1 telle que

$$\|u(t)\|_2 \leqslant c_1(1+|t|)^s \|g\|_1 \tag{1.3}$$

pour tout $t \in \mathbf{R}$ et tout $g \in E$.

Si $B_1 = B_2 = B$, on dira que A est un générateur dans l'espace de Banach B.

Remarque. Quitte à remplacer les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ par des normes équivalentes, on peut admettre que $c = 1$ dans cette définition, ce dont nous conviendrons dans la suite.

Lemme 1.1. *Les applications* $\{U(t)\}_{t \in \mathbf{R}}$, $U(t): E \to E$ *définies par l'égalité* $U(t)g = u(t)$, *où* g *et* U *remplissent les conditions de la définition, sont des*

homomorphismes de l'espace E et forment un groupe à un paramètre, c'est-à-dire que

$$U(t_2)\,U(t_1)=U(t_1+t_2).$$

Démonstration. Soient $u(t)=U(t)g$, $u_1(t)=U(t)\,u(t_1)$. Par définition, $u(t+t_1)=U(t+t_1)g$. Il faut donc montrer que $u(t_1+t)=u_1(t)$. En désignant $u(t_1+t)$ par $v(t)$, on obtient

$$v(0)=u(t_1), \qquad i\frac{dv}{dt}=Av.$$

Comme u_1 est solution du même problème de Cauchy, il s'ensuit en vertu de l'unicité que $v(t)=u_1(t)$. C.Q.F.D.

Définition. La famille $\{U(t)\}$ sera appelée *groupe engendré par le générateur A*.

Lemme 1.2. *$AU(t)=U(t)A$ pour tout $t\in\mathbf{R}$.*

Démonstration. Pour tout $t\in\mathbf{R}$ fixe, on a

$$\lim_{h\to 0}\left\|i\frac{U(t+h)-U(t)}{h}g-AU(t)g\right\|_1=0.$$

En faisant $t=0$ et compte tenu de ce que $U(0)g=g$, on obtient:

$$\lim_{h\to 0}\left\|i\frac{U(h)-1}{h}g-Ag\right\|_1=0.$$

Appliquons $U(t)$ à l'expression se trouvant sous le signe $\|\cdot\|_1$; de (1.3) il vient alors pour $h\to 0$

$$\left\|U(t)\left(i\frac{U(h)-1}{h}g-Ag\right)\right\|_2\leqslant(1+|t|)^s\left\|i\frac{U(h)-1}{h}g-Ag\right\|_1\to 0.$$

Donc

$$iU(t)\frac{U(\Delta)-1}{\Delta}g=U(t)Ag+\sigma(\Delta),$$

où $\|\sigma(\Delta)\|_2\to 0$ avec Δ. D'autre part,

$$iU(t)\frac{U(\Delta)-1}{\Delta}g=i\frac{U(t+\Delta)-U(t)}{\Delta}g=AU(t)g+\delta(\Delta),$$

où $\|\delta(\Delta)\|_1\to 0$ avec Δ. Donc

$$\|[U(t)A-AU(t)]g\|_2=\|\delta(\Delta)-\sigma(\Delta)\|_2\to 0$$

lorsque $\Delta\to 0$. D'où la proposition du lemme.

Lemme 1.3. *Soient A un générateur de degré N de couple déterminant (B_1, B_2), $\{U(t)\}$ le groupe engendré par A et $\varphi \in \mathscr{B}_N(\mathbf{R})$. Alors l'élément $I[\varphi; g]$ de B_2^{**} défini par la formule*

$$I[\varphi; g](h^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(t)\, h^*(U(t)g)\, dt,\ h^* \in B_2^*,\ \tilde{\varphi} = F^{-1}\varphi,$$

appartient à B_2 et de plus

$$\|I[\varphi; g]\|_{B_2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\varphi\|_{\mathscr{B}_N(\mathbf{R})} \|g\|_{B_1}$$

Démonstration. Soit $h^* \in B_2^*$. On a

$$|I[\varphi; g](h^*)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(t)\, h^*(U(t)g)\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\varphi\|_{\mathscr{B}_N(\mathbf{R})} \cdot \sup_{t \in \mathbf{R}} \frac{|h^*(U(t)g)|}{(1+|t|)^N}.$$

Par définition du générateur on a $\|U(t)g\|_{B_2} \leqslant (1+|t|)^N \|g\|_{B_1}$; donc

$$|I[\varphi; g](h^*)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\varphi\|_{\mathscr{B}_N(\mathbf{R})} \|h^*\|_{B_2^*} \|g\|_{B_1}.$$

Et par suite

$$\|I[\varphi; g]\|_{B_2^{**}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\varphi\|_{\mathscr{B}_N(\mathbf{R})} \|g\|_{B_1} \tag{1.4}$$

Reste à prouver que $I[\varphi; g] \in B_2$. Si $\tilde{\varphi} \in C_0^{\infty}(\mathbf{R})$, alors

$$I[\varphi; g] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(t)\, U(t)g\, dt.$$

L'intégrale de cette formule comprise comme une Riemann-intégrale d'une fonction à valeurs dans B_2 est un élément de B_2. Si $\tilde{\varphi} = \delta_{\xi}$, on a encore $I[\varphi; g] \in B_2$, puisque

$$I[\varphi; g] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} U(\xi) g.$$

Donc, si tout $\varphi \in \mathscr{B}_N^0(\mathbf{R})$, on a $I[\varphi; g] \in B_2$. De (1.4) il résulte que la norme de tout opérateur de $\mathscr{B}_N(\mathbf{R})$ dans B_2 envoyant φ dans $I[\varphi; g]$ est bornée par $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|g\|_{B_1}$. Comme B_2 et B_2^{**} sont fermés, il résulte que $I[\varphi; g] \in B_2$ pour tout $\varphi \in \mathscr{B}_N(\mathbf{R})$.

Dans la suite de ce paragraphe on admettra que A est un générateur de degré N de couple déterminant (B_1, B_2), $\{U(t)\}$ le groupe d'homomorphismes engendré par l'opérateur A.

Soit $\varphi \in \mathscr{B}_N(\mathbf{R})$. Désignons par $\varphi_*(A)$ l'opérateur $\varphi_*(A)g \stackrel{\text{déf}}{=} I(\varphi; g]$ de B_1 dans B_2 défini dans E. On a en vertu du lemme 1.3

$$\|\varphi_*(A)\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\varphi\|_{\mathscr{B}_N(\mathbf{R})}.$$

Lemme 1.4. *Soient* $\varphi \in \mathscr{B}_N(\mathbf{R})$ *et* $\mathscr{F} \in \mathscr{B}_N(\mathbf{R})$, *où* $\mathscr{F}(x) = x\varphi(x)$. *Alors* $\varphi_*(A)A = \mathscr{F}_*(A)$.

Démonstration. Par définition, pour tous $h^* \in B_2^*$ et $q \in E$, on a

$$h^*[\varphi_*(A)Aq] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(t) h^*[U(t)Aq]\, dt,$$

$$h^*[\mathscr{F}_*(A)q] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathscr{F}}(t) h^*[U(t)q]\, dt,$$

où $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{\mathscr{F}}$ sont les transformées réciproques de Fourier des fonctions φ et $\mathscr{F}$.

Montrons que pour toute fonction $\tilde{g}$ appartenant à l'espace $C_N(\mathbf{R})$ avec sa dérivée première on a la formule

$$i \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(t) \tilde{g}'(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathscr{F}}(t) \tilde{g}(t)\, dt. \tag{1.5}$$

Signalons tout d'abord qu'il suffit de prouver cette formule pour le cas où $\tilde{g} \in C^\infty(\mathbf{R}) \cap C_N(\mathbf{R})$, puisque si $\tilde{g} \in C_N(\mathbf{R})$, $\tilde{g}' \in C_N(\mathbf{R})$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction $\tilde{h}$ indéfiniment dérivable telle que

$$\|\tilde{g} - \tilde{h}\|_{C_N(\mathbf{R})} < \varepsilon, \qquad \|\tilde{g}' - \tilde{h}'\|_{C_N(\mathbf{R})} < \varepsilon.$$

Supposons donc que $\tilde{g} \in C^\infty(\mathbf{R}) \cap C_N(\mathbf{R})$, $\tilde{g}' \in C_N(\mathbf{R})$. Considérons une suite $\{\tilde{g}_n\} \subset C_0^\infty(\mathbf{R})$ douée des propriétés suivantes:

a) $\tilde{g}_n(t) = \tilde{g}(t)$ pour $t \in]-n, n[$,

b) $\|\tilde{g}_n - \tilde{g}\|_{C_N(\mathbf{R})} \leqslant c_1$, $\|\tilde{g}_n' - \tilde{g}'\|_{C_N(\mathbf{R})} \leqslant c_2$, $c_1, c_2 = \text{const}$.

Alors, pour tout élément $\tilde{\Phi} \in C_N^+(\mathbf{R})$ on a les relations

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}(t) \tilde{g}(t)\, dt = \lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}(t) \tilde{g}_n(t)\, dt, \tag{1.6}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}(t) \tilde{g}'(t)\, dt = \lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}(t) \tilde{g}_n'(t)\, dt. \tag{1.7}$$

Supposons en effet que $\tilde{\Phi}=\lim_{j\to\infty}\tilde{\Phi}_j$, $\tilde{\Phi}_j\in F^{-1}\mathscr{B}_N^0(\mathbf{R})$. Pour tout $\varepsilon>0$ exhibons un numéro j_0 tel que $\|\tilde{\Phi}_j-\tilde{\Phi}\|<\varepsilon$ pour $j\geqslant j_0$. Supposons que le support de la fonction Φ_{j_0} est contenu dans l'intervalle $]-n_0, n_0[$. Alors pour $n\geqslant n_0$

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\Phi}(t)(\tilde{g}(t)-\tilde{g}_n(t))\,dt\right|=$$

$$=\left|\int_{-\infty}^{\infty}(\tilde{\Phi}(t)-\tilde{\Phi}_{j_0}(t))(\tilde{g}(t)-\tilde{g}_n(t))\,dt\right|\leqslant c\varepsilon,\ c=\text{const.}$$

Pour tous $\tilde{f}\in F^{-1}\mathscr{B}_N^0(\mathbf{R})$, $\tilde{h}\in C_0^\infty(\mathbf{R})$ on a *l'égalité de Parseval*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(t)\,\tilde{h}(t)\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,h(-t)\,dt, \tag{1.8}$$

où $f=F\tilde{f}$, $h=F\tilde{h}$. La formule (1.8) est valable pour tout $f\in C_N^+(\mathbf{R})$, puisque $\mathscr{B}_N(\mathbf{R})\subset C(\mathbf{R})$ et $\mathscr{B}_N^0(\mathbf{R})$ est dense dans $\mathscr{B}_N(\mathbf{R})$. On peut donc mettre les formules (1.6) et (1.7) sous la forme

$$\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\Phi}(t)\,\tilde{g}(t)\,dt=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(x)\,g_n(-x)\,dx, \tag{1.9}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\Phi}(t)\,\tilde{g}'(t)\,dt=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(x)\,G_n(-x)\,dx, \tag{1.10}$$

où $\Phi=F\tilde{\Phi}$, $g_n=F\tilde{g}_n$, $G_n=F\tilde{g}_n'$; ceci étant, $G_n(x)=ixg_n(x)$. En portant $\tilde{\Phi}=\tilde{\varphi}$ dans (1.10) et $\tilde{\Phi}=\tilde{\mathscr{F}}$ dans (1.9), on trouve

$$\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\varphi}(t)\,\tilde{g}'(t)\,dt=-i\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,xg_n(-x)\,dx=$$

$$=-i\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathscr{F}(x)\,g_n(-x)\,dx=-i\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\mathscr{F}}(t)\,\tilde{g}(t)\,dt,$$

ce qui prouve la formule (1.5).

Grâce à la formule (1.5) on obtient

$$h^*[\mathscr{F}_*(A)q]=\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\varphi}(t)\frac{d}{dt}h^*[U(t)q]\,dt=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\varphi}(t)\,h^*[AU(t)q]\,dt=h^*[\varphi_*(A)Aq],$$

ce qui prouve le lemme 1.4.

Corollaire. *Soit* $\mathscr{F}_j\in\mathscr{B}_N(\mathbf{R})$, *où* $\mathscr{F}_j(x)=x^j\mathscr{F}_0(x)$, $j=0, 1, \ldots, k$. *Alors* $\mathscr{F}_{0*}(A)A^k=\mathscr{F}_{k*}(A)$.

La démonstration consiste en une application successive du lemme 1.4 aux fonctions $\varphi = \mathscr{F}_0, \mathscr{F}_1, \ldots, \mathscr{F}_{k-1}$.

Evaluons maintenant la norme de l'opérateur $(A-z)^{-1}$.

Lemme 1.5. *L'opérateur* $[A-(a+ib)]^{-1}$ *existe pour* $b \neq 0$ *et l'on a la majoration*

$$\|[A-(a+ib)]^{-1}\|_{B_1}^{B_2} \leqslant \frac{c}{|b|} + \frac{c'}{|b|^{N+1}}, \tag{1.11}$$

où c *et* c' *sont des constantes,* $\|\cdot\|_{B_1}^{B_2}$ *la norme d'un opérateur de* B_1 *dans* B_2.

Démonstration. Supposons que $b \neq 0$. Posons $z = a+ib$. Comme $\operatorname{Im} z \neq 0$, la fonction $\varphi: \varphi(x) = (x-z)^{-1}$ appartient à $W_2^k(\mathbf{R})$ pour tout $k \in \mathbf{R}$, de sorte que $\varphi \in \mathscr{B}_N(\mathbf{R})$. Comme, d'autre part, $1 \in \mathscr{B}_N(\mathbf{R})$, la fonction $\psi: \psi(x) = x(x-z)^{-1} = z(x-z)^{-1} + 1$ appartient aussi à $\mathscr{B}_N(\mathbf{R})$. Le lemme précédent nous dit que $\varphi_*(A)A = (z\varphi_*)(A) + 1_E$, où 1_E est l'application identique de E dans E. Donc

$$\varphi_*(A)(A-z) = 1_E,$$

c'est-à-dire que l'opérateur $(A-z)$ est inversible:

$$(A-z)^{-1} = \varphi_*(A)|_{R(A-z)}.$$

De plus

$$\|(A-z)^{-1}\|_{B_1}^{B_2} \leqslant \|\varphi_*(A)\|_{B_1}^{B_2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\varphi\|_{\mathscr{B}_N(\mathbf{R})}.$$

Posons $\varphi_0(x) = \dfrac{1}{x - i|b|}$. Alors $\|\varphi\|_{\mathscr{B}_N(\mathbf{R})} = \|\varphi_0\|_{\mathscr{B}_N(\mathbf{R})}$.

Si, par ailleurs, on admet que $\tilde{\varphi}_0 = F^{-1}\varphi_0$, $\varphi_1(x) = \dfrac{1}{x-i}$, $\tilde{\varphi}_1 = F^{-1}\varphi_1$, on obtient alors pour tout $g \in C_N(\mathbf{R})$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}_0(t)\, g(t)\, dt = \frac{1}{|b|} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}_1(t)\, g\left(\frac{t}{|b|}\right) dt.$$

Comme

$$\sup_{t \in \mathbf{R}} \frac{\left|g\left(\dfrac{t}{|b|}\right)\right|}{(1+|t|)^N} \leqslant \|g\|_{C^N(\mathbf{R})} \sup_{t \in \mathbf{R}} \left(\frac{1+|t|}{1+|bt|}\right)^N = \|g\|_{C_N(\mathbf{R})} \max\left\{1, \frac{1}{|b|^N}\right\},$$

il vient

$$\|\varphi_0\|_{\mathscr{B}_N(\mathbf{R})} \leqslant |\varphi_1\|_{\mathscr{B}_N(\mathbf{R})} \max\left\{\frac{1}{|b|}, \frac{1}{|b|^{N+1}}\right\},$$

d'où (1.11). Ce qui prouve le lemme.

Le lemme suivant se démontre de façon analogue.

Lemme 1.6. *L'opérateur* $[A-(a+ib)]^{-k}$, $k>0$, *vérifie la majoration*

$$\|[A-(a+ib)]^{-k}\|_{B_1}^{B_2} \leqslant \frac{c_k}{|b|^k}+\frac{c_k'}{|b|^{k+N}},$$

où c_k *et* c_k' *sont des constantes.*

Démonstration. Il est évident que la fonction $\varphi_j(x)=x^j(x-z)^{-k}$ appartient à $\mathscr{B}_N(\mathbf{R})$ pour $\operatorname{Im} z\neq 0$ et $0\leqslant j<k$. Comme $1\in\mathscr{B}_N(\mathbf{R})$, on en déduit que la fonction

$$\varphi_k(x)=x^k(x-z)^{-k}=1-\frac{(x-z)^k-x^k}{(x-z)^k}=1-\sum_{i=1}^{k} C_k^i(-1)^i z^i x^{k-i}(x-z)^{-k}$$

appartient à $\mathscr{B}_N(\mathbf{R})$. Donc, aux termes du corollaire du lemme 1.4

$$\varphi_{0*}(A)(A-z)^k g=g$$

pour tous les $g\in E$. Donc $(A-z)^{-k}=\varphi_{0*}(A)|_{R_{(A-z)^k}}$, d'où

$$\|(A-z)^{-k}\|_{B_1}^{B_2}\leqslant\|\varphi_{k*}(A)\|_{B_1}^{B_2}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|\varphi_0\|_{\mathscr{B}_N(\mathbf{R})}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|\bar{\varphi}_0\|_{\mathscr{B}_N(\mathbf{R})}\max\left\{\frac{1}{|b|^k},\frac{1}{|b|^{N+k}}\right\},$$

où $\bar{\varphi}_0(x)=(x-i)^{-k}$. Ce qui prouve le lemme. A noter que ce lemme n'est pas une conséquence directe du lemme précédent.

Associons à chaque vecteur $h\in E$ un opérateur $\tilde{h}:\mathscr{B}_N(\mathbf{R})\to B_2$ à l'aide de la formule

$$\tilde{h}\varphi=\varphi_*(A)h.$$

L'opérateur $\tilde{h}$ est défini sur l'espace $\mathscr{B}_N(\mathbf{R})$ tout entier et est borné:

$$\|\tilde{h}\|=\sup_{\varphi\in\mathscr{B}_N(\mathbf{R}),\,\varphi\neq 0}\frac{\|\varphi_*(A)h\|_2}{\|\varphi\|_{\mathscr{B}_N(\mathbf{R})}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|h\|_1. \tag{1.12}$$

Munissons E de la norme

$$\|h\|_{\text{int}}\overset{\text{déf}}{=}\sqrt{2\pi}\,\|\tilde{h}\|$$

Appelons le complété de E pour cette norme *espace de Banach intermédiaire* et notons-le B_{int}.

Lemme 1.7. *On a la double inégalité*

$$\|\cdot\|_1\geqslant\|\cdot\|_{\text{int}}\geqslant\|\cdot\|_2,$$

de sorte que

$$B_1\supseteq B_{\text{int}}\supseteq B_2.$$

Démonstration. De (1.12) il résulte aussitôt que $\| \ \|_{\text{int}} \leqslant \| \cdot \|_1$. Par ailleurs

$$\|h\|_{\text{int}} = \sup_{\varphi \in \mathscr{B}_N(\mathbf{R}),\, \varphi \neq 0} \frac{\sqrt{2\pi}\,\|\varphi_*(A)\,h\|_2}{\|\varphi\|} \geqslant \frac{\sqrt{2\pi}\,\|h\|_2}{\|1\|_{\mathscr{B}_N(\mathbf{R})}} = \|h\|_2,$$

puisque $\|1\|_{\mathscr{B}_N(\mathbf{R})} = \|\sqrt{2\pi}\,\delta_0\|_{C_N^+(\mathbf{R})} = \sqrt{2\pi}$. Ce qui prouve le lemme.

Lemme 1.8. *Pour tout $t_0 \in \mathbf{R}$, on a les relations*

1) $U(t_0) = (e^{-iAt_0})_*$;

2) $\varphi_*(A)\,(e^{-iAt_0})_* = [e^{-iAt_0}\varphi(A)]_*, \quad \forall \varphi \in \mathscr{B}_N(\mathbf{R})$.

Démonstration. Tout d'abord, pour tout $h \in E$, on a

$$(e^{-iAt_0})_* h = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2\pi}\,\delta_{t_0}\,U(t)\,h\,dt = U(t_0)\,h.$$

Reste à prouver que

$$\varphi_*(A)\,U(t_0)\,h = [e^{-iAt_0}\varphi(A)]_* h.$$

On a

$$\varphi_*(A)\,U(t_0)\,h = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(t)\,U(t)\,U(t_0)\,h\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(t)\,U(t_0+t)\,h\,dt.$$

Observons maintenant que si une fonction $\mathscr{F} \in \mathscr{B}_N(\mathbf{R})$ est de la forme $\mathscr{F}(x) = \varphi(x)\,e^{-it_0x}$, alors $F^{-1}\mathscr{F} = (F^{-1}\varphi)_* \sqrt{2\pi}\,\delta_{t_0}$, de sorte que

$$\int_{-\infty}^{\infty} (F^{-1}\mathscr{F})(t)\,g(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} (F^{-1}\varphi)(t)\,g(t+t_0)\,dt$$

quel que soit $g \in C_N(\mathbf{R})$. Donc

$$[e^{-iAt_0}\varphi(A)]_* h = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(t)\,U(t_0+t)\,h\,dt = \varphi_*(A)\,U(t_0)\,h.$$

C.Q.F.D.

Lemme 1.9. *Soit $\psi(x) = \sum_{k=1}^{r} a_k e^{-it_k x}$. Alors*

$$\sqrt{2\pi}\,\|\psi_*(A)\,h\|_{\text{int}} \leqslant \|\psi\|_{\mathscr{B}_N(\mathbf{R})}\,\|h\|_{\text{int}}.$$

Démonstration. Les inégalités suivantes sont évidentes (pour $\psi \neq 0$)

$$\sup_{\substack{\varphi \in \mathscr{B}_N(\mathbf{R}) \\ \varphi \neq 0}} \frac{\|\varphi_*(A)\,h\|_2}{\|\varphi\|_{\mathscr{B}_N(\mathbf{R})}} \geqslant \sup_{\substack{\varphi \in \mathscr{B}_N(\mathbf{R}) \\ \varphi \neq 0}} \frac{\|[(\varphi\psi)_*(A)]\,h\|_2}{\|\psi \cdot \varphi\|_{\mathscr{B}_N(\mathbf{R})}} \geqslant \sup_{\substack{\varphi \in \mathscr{B}_N(\mathbf{R}) \\ \varphi \neq 0}} \frac{\|(\varphi \cdot \psi)_*(A)\,h\|_2}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|\psi\|_{\mathscr{B}_N(\mathbf{R})}\,\|\varphi\|_{\mathscr{B}_N(\mathbf{R})}}$$

De là et du lemme 1.8 il résulte que

$$\frac{1}{\|\psi\|_{\mathscr{B}_N(\mathbf{R})}}\|\psi_*(A)h\|_{\text{int}}=\sqrt{2\pi}\sup_{\substack{\varphi\in\mathscr{B}_N(\mathbf{R})\\ \varphi\neq 0}}\frac{\|\varphi_*(A)\psi_*(A)h\|_2}{\|\psi\|_{\mathscr{B}_N(\mathbf{R})}\|\varphi\|_{\mathscr{B}_N(\mathbf{R})}}\leqslant$$

$$\leqslant\sup_{\substack{\varphi\in\mathscr{B}_N(\mathbf{R})\\ \varphi\neq 0}}\frac{\|\varphi_*(A)h\|_2}{\|\varphi\|_{\mathscr{B}_N(\mathbf{R})}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|h\|_{\text{int}}.$$

C.Q.F.D.

Lemme 1.10. *La fonction u de la définition du générateur vérifie l'inégalité suivante*

$$\|u(t_2)\|_{\text{int}}\leqslant(1+|t_1-t_2|)^N\|u(t_1)\|_{\text{int}}$$

quels que soient t_1, $t_2\in\mathbf{R}$.

Démonstration. Le lemme 1.1 nous donne

$$u(t_0+t)=U(t)\,u(t_0).$$

Donc, en vertu du lemme 1.3 on a $u(t_0+t)=(e^{-iAt})_*u(t_0)$. Par suite, d'après le lemme 1.9

$$\|u(t_0+t)\|_{\text{int}}\leqslant\|\delta_t\|_{C_N^+(\mathbf{R})}\|u(t_0)\|_{\text{int}}=(1+|t|)^N\|u(t_0)\|_{\text{int}},$$

ce que nous voulions.

En reprenant les raisonnements du lemme 1.3, on établit le lemme suivant.

Lemme 1.11. *Quels que soient $\psi\in\mathscr{B}_N(\mathbf{R})$, $h\in E$, l'élément $I_{\text{int}}[\psi;h]$ de l'espace B_{int}^{**} défini par la formule*

$$I_{\text{int}}[\psi;h](h^*)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\psi}(t)\,h^*(U(t)h)\,dt,\qquad h^*\in B_{\text{int}}^*,\qquad \psi=F\tilde{\psi},$$

appartient à B_{int} et de plus

$$\|I_{\text{int}}[\psi;h]\|_{\text{int}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|\psi\|_{\mathscr{B}_N(\mathbf{R})}\|h\|_{\text{int}}.$$

Désignons par $\psi_{\text{int}}(A)$ le prolongement de l'opérateur $h\to I_{\text{int}}[\psi;h]$ en un homomorphisme de B_{int} dans B_{int}. Il est évident que

$$\|\psi_{\text{int}}(A)\|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|\psi\|_{\mathscr{B}_N(\mathbf{R})}.$$

Lemme 1.12. *L'application $\psi\to\psi_{\text{int}}(A)$ est un homomorphisme de l'algèbre $\mathscr{B}_N(\mathbf{R})$ dans l'algèbre des opérateurs de l'espace B_{int}.*

Démonstration. Il faut prouver que $\psi_{\text{int}}(A)\,\varphi_{\text{int}}(A)=(\psi\varphi)_{\text{int}}(A)$ quels que soient φ, $\psi\in\mathscr{B}_N(\mathbf{R})$. Pour tout $g^*\in B^*_{\text{int}}$, on a

$$g^*(\varphi_{\text{int}}(A)\,h)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\varphi}(t)\,g^*(U(t)\,h)\,dt.$$

Comme $\psi_{\text{int}}(A)$ est un homomorphisme, il vient

$$g^*(\psi_{\text{int}}(A)\,\varphi_{\text{int}}(A)\,h)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\varphi}(t)\,g^*(\psi_{\text{int}}(A)\,U(t)\,h)\,dt.$$

En traitant A comme un générateur de couple déterminant (B_1, B_{int}) et en appliquant le lemme 1.8 on trouve que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\varphi}(t)\,g^*(\psi_{\text{int}}(A)\,U(t)\,h)\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\varphi}(t)\,g^*((\psi(A)\,e^{-iAt})_{\text{int}}h)\,dt=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\varphi}(t)\left(\int_{-\infty}^{\infty}(\tilde{\psi}*\delta_t)(t')\,g^*(U(t')\,h)\,dt'\right)dt.$$

D'autre part,

$$g^*((\psi\cdot\varphi)_{\text{int}}(A)\,h)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\tilde{\psi}*\tilde{\varphi})(t)\,g^*(U(t)\,h)\,dt.$$

La démonstration de ce lemme sera achevée lorsqu'on aura démontré que pour tous $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\psi}\in C_N^+(\mathbf{R})$, $f\in C_N(\mathbf{R})$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\varphi}(t)\,dt\int_{-\infty}^{\infty}(\tilde{\psi}*\delta_t)(t')\,f(t')\,dt'=\int_{-\infty}^{\infty}(\tilde{\psi}*\tilde{\varphi})(t)\,f(t)\,dt. \tag{1.13}$$

Remarquons que

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\tilde{\psi}*\delta_t)(t')\,f(t)\,dt'=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\psi}(\tau)\,f(\tau+t)\,d\tau,$$

de sorte que (1.13) devient

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\varphi}(t)\,dt\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\psi}(\tau)\,f(\tau+t)\,d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}(\tilde{\psi}*\tilde{\varphi})(t)\,f(t)\,dt. \tag{1.14}$$

Or la formule (1.14) a été établie au chapitre II. C.Q.F.D.

Lemme 1.13. *Il existe une suite* $\{\varphi_n\}\in C_0^\infty(\mathbf{R})$ *telle que*

$$\lim_{n\to\infty}h^*[\varphi_{n_{\text{int}}}(A)-1)\,h]=0$$

quels que soient $h\in B_{\text{int}}$, $h^*\in B^*_{\text{int}}$.

Démonstration. Choisissons la suite $\{\varphi_n\}$ de la forme suivante:

$$\varphi_1(x)=1 \text{ pour } |x|<1, \quad \varphi_1(x)=0 \text{ pour } |x|>2,$$
$$\varphi_n(x)=\varphi_1(x/n).$$

Cette suite est bornée dans $\mathscr{B}_N(\mathbf{R})$. En effet, si $\tilde{\varphi}_n$ est la transformée réciproque de Fourier de la fonction φ_n, on a

$$\tilde{\varphi}_n(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\varphi_n(x)\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\varphi_1\left(\frac{x}{n}\right)dx=$$

$$=\frac{n}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itxn}\varphi_1(x)\,dx=n\tilde{\varphi}_1(nt).$$

Par ailleurs, pour toute fonction $f\in C_N(\mathbf{R})$ on a

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\varphi}_n(t)f(t)\,dt\right|=\left|\int_{-\infty}^{\infty}n\tilde{\varphi}_1(nt)f(t)\,dt\right|=$$

$$=\left|\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\varphi}_1(t)f\left(\frac{t}{n}\right)dt\right|\leqslant\|\tilde{\varphi}_1\|_{C_N^*(\mathbf{R})}\sup_{t\in\mathbf{R}}\frac{\left|f\left(\frac{t}{n}\right)\right|}{(1+|t|)^N}=\|\varphi_1\|_{C_N^*(\mathbf{R})}\sup_{t\in\mathbf{R}}\frac{|f(t)|}{(1+n|t|)^N}\leqslant$$

$$\leqslant\|\varphi_1\|_{C_N^*(\mathbf{R})}\sup_{t\in\mathbf{R}}\frac{|f(t)|}{(1+|t|)^N}=\|\varphi_1\|_{C_N^*(\mathbf{R})}\|f\|_{C_N(\mathbf{R})}.$$

D'où il s'ensuit que $\|\varphi_n\|_{\mathscr{B}_N(\mathbf{R})}\leqslant\|\varphi_1\|_{\mathscr{B}_N(\mathbf{R})}$. Posons $\psi_n(x)=\dfrac{\varphi_n(x)}{x+i}$. Alors $\psi_n(x)-\dfrac{1}{x+i}\to 0$ dans tout espace de Sobolev $W_2^l(\mathbf{R})$. Donc $\psi_n(x)\to\dfrac{1}{x+i}$ dans $\mathscr{B}_N(\mathbf{R})$, de sorte que la suite des opérateurs $\psi_{n_{\text{int}}}(A)$ converge en norme vers l'opérateur $\left(\dfrac{1}{A+i}\right)_{\text{int}}$. On a par ailleurs

$$\varphi_{n_{\text{int}}}(A)\,h=\psi_{n_{\text{int}}}(A)\,(A+i)\,h \tag{1.15}$$

pour tout $h\in E$. A noter que

$$\left(\frac{1}{A+i}\right)_{\text{int}}(A+i)\,h=h \tag{1.16}$$

pour tout $h\in E$. Donc on a la relation suivante:

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_{n_{\text{int}}}(A)\,h=h \tag{1.17}$$

pour tout $h \in E$. De (1.17) on déduit que

$$h^*[(\varphi_{n_{\text{int}}}(A)-1)\,h] \to 0 \quad \text{lorsque } n \to \infty$$

pour tous $h \in E$, $h^* \in B^*_{\text{int}}$.

Soit maintenant h un élément arbitraire de B_{int}, $h^* \in B^*_{\text{int}}$. La suite d'opérateurs $\{\varphi_{n_{\text{int}}}(A)-1\}$ étant uniformément bornée par une constante M, en prenant pour un $\varepsilon > 0$ donné un élément $\bar{h} \in E$ tel que $\|\bar{h}-h\|_{\text{int}} < \varepsilon$, on trouve que

$$|h^*[(\varphi_{n_{\text{int}}}(A)-1)\,h]| \leqslant |h^*[(\varphi_{n_{\text{int}}}(A)-1)\bar{h}]| + M\,\|h^*\|\,\varepsilon \to M\,\|h^*\|\,\varepsilon$$

lorsque $h \to \infty$; or cela signifie que

$$\lim_{n\to\infty} h^*[(\varphi_{n_{\text{int}}}(A)-1)\,h] = 0,$$

puisque ε est arbitraire. Ce qui prouve le lemme.

Corollaire. *L'ensemble*

$$M = \bigcup_{\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R})} R(\varphi_{\text{int}}(A))$$

est dense dans B_{int}.

Démonstration. Supposons par absurde que $\overline{M} \neq B_{\text{int}}$. Alors, en vertu du théorème de Hahn-Banach, il existerait un élément non nul $h^* \in B^*_{\text{int}}$ tel que $h^*(h) = 0$ pour tout $h \in M$. Supposons que $h^*(h_0) \neq 0$. Considérons la suite $\{h_n\} = \{\varphi_{n_{\text{int}}}(A)\,h_0\}$, où $\{\varphi_n\}$ est la suite de fonctions de $C_0^\infty(\mathbf{R})$ introduite dans le lemme 1.13. On a $h^*(h_n) = 0$ pour tout n. Par ailleurs, d'après le lemme 1.13

$$\lim_{n\to\infty} h^*(h_n) = h^*(h_0) \neq 0.$$

Cette contradiction prouve que M est dense dans B_{int}.

Lemme 1.14. *Si* $\operatorname{Im} z \neq 0$, *l'opérateur* $[(A-z)^{-1}]_{\text{int}}$ *est inversible.*

Démonstration. Soit $h \in B_{\text{int}}$ et soit $[(A-z)^{-1}]_{\text{int}}\,h = 0$. Si $\{\varphi_n\}$ est la suite de fonctions de $C_0^\infty(\mathbf{R})$ considérée dans le lemme 1.13, alors

$$0 = [(A-z)\,\varphi_n(A)]_{\text{int}}\,[(A-z)^{-1}]_{\text{int}}\,h = \varphi_{n_{\text{int}}}(A)\,h$$

pour tous les n naturels. D'après le lemme 1.13

$$0 = \lim_{n\to\infty} h^*[\varphi_{n_{\text{int}}}(A)\,h] = h^*(h)$$

pour tout $h^* \in B^*_{\text{int}}$. Donc $h = 0$. C.Q.F.D.

Lemme 1.15. *L'opérateur A possède une fermeture* $\overline{A}$ *dans* B_{int}.

Démonstration. Supposons que $\operatorname{Im} z \neq 0$. Alors l'opérateur réciproque de $[(A-z)^{-1}]_{\text{int}}$ est fermé; cet opérateur est le prolongement de l'opérateur $A-z$ d'après le lemme 1.5. Donc l'opérateur $A = (A-z)+z$ admet aussi un prolongement fermé. Ce qui prouve le lemme.

L'opérateur $\overline{A}$ sera aussi appelé *générateur.*

Donnons maintenant une nouvelle interprétation de la formule

$$\varphi_{\text{int}}(A)\,h=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\varphi}(t)\,U(t)h\,dt,\qquad \tilde{\varphi}=F^{-1}\varphi. \tag{1.18}$$

Considérons l'espace $C_N(\mathbf{R}^n, B)$ des fonctions continues sur $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans un espace de Banach B, de norme finie

$$\|f\|_{C_N(\mathbf{R}^n, B)}=\sup_{x\in\mathbf{R}^n}\frac{\|f(x)\|}{(1+|x|)^N}.$$

Exemple. Pour tout $h\in E$, la fonction

$$f(t)=U(t)\,h$$

appartient à l'espace $C_N(\mathbf{R}, B_{\text{int}})$, et de plus

$$\|f\|_{C_N(\mathbf{R}, B_{\text{int}})}\leqslant\|h\|_{\text{int}}.$$

Considérons par ailleurs pour tout $f\in C_N(\mathbf{R}^n, B)$ l'opérateur $I_0[f]: F^{-1}\mathscr{B}_N^0\to B$ défini par les formules

$$I_0[f]\,\delta_\xi=f(\xi),\qquad I_0[f]\,\varphi=\int_{\mathbf{R}^n}\varphi(x)\,f(x)\,dx,\qquad \varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n).$$

Exercice. Montrer que $\|I_0[f]\|\leqslant\|f\|_{C_N(\mathbf{R}^n, B)}$.

Indication. Quels que soient $\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ et les réels $\xi_1,\ldots,\xi_k$, on a

$$\Big\|\varphi+\sum_{i=1}^{k}a_i\delta_{\xi_i}\Big\|_{C_N^+(\mathbf{R}^n)}=\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x)|(1+|x|)^N dx+\sum_{i=1}^{k}|a_i|(1+|\xi_i|)^N.$$

Prolongeons l'opérateur $I_0[f]$ en un homomorphisme $I[f]$: $C_N^+(\mathbf{R}^n)\to B$. On se servira de la notation

$$I[f]\,\varphi=\int_{\mathbf{R}^n}\varphi(x)\,f(x)\,dx,$$

qui nous donne l'interprétation voulue de l'égalité (1.18). Il est évident que les deux définitions de l'opération $\varphi_{\text{int}}(A)$ sont confondues.

Soit $f\in C_N(\mathbf{R}^n, B)$ et supposons que la fonction $\mathscr{F}$ définie par la formule $\mathscr{F}(x)=\hat{C}f(x)$, où $\hat{C}$ est un opérateur fermé dans B, appartient à $C_N(\mathbf{R}^n, B)$. Alors, pour tout $\varphi\in F^{-1}\mathscr{B}_N^0(\mathbf{R}^n)$,

$$\int_{\mathbf{R}^n}\varphi(x)\,\hat{C}f(x)\,dx=\hat{C}\int_{\mathbf{R}^n}\varphi(x)f(x)\,dx. \tag{1.19}$$

Si φ est un élément arbitraire de $C^+(\mathbf{R}^n)$, alors en prenant une suite $\{\varphi_k\}\subset F^{-1}\mathscr{B}_N^0(\mathbf{R}^n)$ convergeant vers φ et en passant à la limite pour $k\to\infty$ dans l'égalité

$$\int_{\mathbf{R}^n}\varphi_k(x)\,\hat{C}f(x)\,dx=\hat{C}\int_{\mathbf{R}^n}\varphi_k(x)\,f(x)\,dx,$$

on constate que la formule (1.19) est valable dans ce cas aussi.

Lemme 1.16. *Soit* $\operatorname{Im} z \neq 0$. *Alors*

$$(\overline{A}-z)^{-1}=[(A-z)^{-1}]_{\text{int}}.$$

Démonstration. Il nous faut prouver deux formules:

$$[(A-z)^{-1}]_{\text{int}}(A-z)\,h=h, \quad h\in D_{\overline{A}}, \tag{1.20}$$

$$(\overline{A}-z)[(A-z)^{-1}]_{\text{int}}=1. \tag{1.21}$$

La première est valable pour $h\in E$ en vertu du lemme 1.5; si $h_n\to h$, $h\in D_{\overline{A}}$, alors on peut passer à la limite dans (1.20), puisque $\overline{A}-z$ est un opérateur fermé et $[(A-z)^{-1}]_{\text{int}}$ est un homomorphisme. Ceci prouve la formule (1.20).

Soit encore $h\in E$; désignons par $\tilde{r}_z$ la transformée réciproque de Fourier de la fonction $r_z(x)=(x-z)^{-1}$. On a

$$h=[(A-z)^{-1}]_{\text{int}}(A-z)\,h=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{r}_z(t)\,U(t)\,(A-z)h\,dt=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{r}_z(t)\,(A-z)\,U(t)h\,dt=$$

$$=(\overline{A}-z)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{r}_z(t)\,U(t)h\,dt=(\overline{A}-z)\,[(A-z)^{-1}]_{\text{int}}h.$$

On s'est servi de la formule (1.19). Donc, pour $h\in E$, on a

$$(\overline{A}-z)\,[(A-z)^{-1}]_{\text{int}}h=h.$$

L'opérateur $\overline{A}$ étant fermé et l'ensemble E, dense dans B_{int}, cette égalité est satisfaite pour tout $h\in B_{\text{int}}$, autrement dit la formule (1.21) est vraie. Ce qui achève la démonstration du lemme.

Récapitulons les principales propositions établies dans ce paragraphe sous la forme du théorème suivant.

Théorème 1.1. 1) *Le générateur A traité comme un opérateur de B_{int} possède une fermeture $\overline{A}$.*

2) *Il existe un homomorphisme $\mathscr{M}$ de l'algèbre de Banach $\mathscr{B}_N(\mathbf{R})$ dans l'algèbre* $\operatorname{Op}(B_{\text{int}})$ *des homomorphismes $B_{\text{int}}\to B_{\text{int}}$ associant à la fonction*

$$x\to\frac{1}{x-z}, \quad \operatorname{Im} z\neq 0,$$

l'opérateur $(\overline{A}-z)^{-1}$

Notation. Supposons qu'à une fonction $\varphi \in \mathscr{B}_N(\mathbf{R})$ est associé un homomorphisme $\Phi: B_{\text{int}} \to B_{\text{int}}$. Convenons de désigner $\Phi = \varphi(\overline{A})$. Notons a_N l'image de l'homomorphisme $\mathscr{M}$.

Toute fonction $\varphi \in \mathscr{B}_N(\mathbf{R})$ sera appelée *symbole de l'opérateur* $\varphi(\overline{A})$.

§ 2. Extension de la classe des symboles admissibles

Soit A un générateur de degré N de couple déterminant (B_1, B_2) d'espaces de Banach contenant chacun une variété linéaire $D = D_A$ dense dans eux. Au paragraphe précédent nous avons introduit des opérateurs de la forme $\varphi(\overline{A})$, où $\varphi \in \mathscr{B}_N(\mathbf{R})$. Nous avons posé par définition $\varphi(\overline{A}) = \overline{\varphi_{\text{int}}(A)}$, où $\varphi_{\text{int}}(A)$ est un opérateur défini sur E. Exhibons maintenant une formule plus explicite de $\varphi(\overline{A})$. Plus exactement,

$$\varphi(\overline{A})h = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(t) e^{-i\overline{A}t} h \, dt$$

pour tout $h \in B_{\text{int}}$. En effet, soit $\{h_n\}$ une suite d'éléments de E convergeant vers h. Alors

$$\left\| e^{-i\overline{A}t} h - U(t) h_n \right\| = \left\| e^{-i\overline{A}t} (h - h_n) \right\| \leqslant (1 + |t|)^N \left\| h - h_n \right\|.$$

Donc les fonctions $U(t) h_n$ convergent vers $e^{-i\overline{A}t} h$ dans l'espace $C_N(\mathbf{R}, B_{\text{int}})$. Par conséquent

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(t) \, e^{-iAt} h \, dt = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(t) \, u(t) h_n \, dt =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \varphi_{\text{int}}(A) h_n = \varphi(\overline{A}) h.$$

C.Q.F.D.

Théorème 2.1. *Soit* $\varphi \in \mathscr{B}_N(\mathbf{R})$ *et supposons que la fonction*

$$\psi(x) = x^k \varphi(x),$$

où k *est un nombre naturel, appartient aussi à* $\mathscr{B}_N(\mathbf{R})$. *Alors*

$$\psi(\overline{A}) = \overline{A}^k \varphi(\overline{A}) = \overline{\varphi(\overline{A}) A^k} = \overline{\varphi(\overline{A}) \overline{A}^k}.$$

La démonstration de ce théorème passe par celle du lemme suivant.

Lemme 2.1. *Pour tout* $h \in D_{\overline{A}}$, *on a la formule*

$$e^{-i\overline{A}t} \overline{A} h = \overline{A} e^{-i\overline{A}t} h.$$

Démonstration. Soit $\{h_n\}$ une suite d'éléments de E convergeant vers h et de plus $\overline{A}h = \lim_{n\to\infty} Ah_n$. Alors

$$e^{-i\overline{A}t}\overline{A}h = \lim_{n\to\infty} e^{-i\overline{A}t}\overline{A}h_n = \lim_{n\to\infty} Ae^{-i\overline{A}t}h_n = \overline{A}e^{-i\overline{A}t}h.$$

C.Q.F.D.

Démonstration du théorème 2.1. Pour tout $h\in E$, on a l'égalité $\psi_{\text{int}}(A)h = \varphi_{\text{int}}(A)A^k h$, c'est-à-dire que

$$\psi_{\text{int}}(A)\,h = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(t)\,U(t)\,A^k h\,dt. \tag{2.1}$$

Grâce à (1.19) on peut mettre cette égalité sous la forme

$$\psi_{\text{int}}(A)h = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\overline{A}^k \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(t)\,u(t)h\,dt = \overline{A}^k\,\varphi_{\text{int}}(A)h.$$

Nous nous sommes servis ici du fait que la puissance d'un opérateur fermé est fermée (cf. chapitre I) et du fait que $(\overline{A}+i)^{-1}$ est un homomorphisme $B_{\text{int}}\to B_{\text{int}}$. Nous avons montré que les opérateurs $\psi(\overline{A})$ et $\overline{A}^k\,\varphi(\overline{A})$ sont confondus sur l'ensemble E dense dans B_{int}. Les opérateurs $\overline{A}^k\,\varphi(\overline{A})$ et $\psi(\overline{A})$ sont partout confondus, puisque $\varphi(\overline{A})$ et $\psi(\overline{A})$ sont des homomorphismes et l'opérateur $\overline{A}^k$, fermé.

D'autre part, l'égalité (2.1) exprime que l'opérateur $\varphi(\overline{A})A^k$ est la restriction de l'homomorphisme $\psi(\overline{A})$ à l'ensemble partout dense E. On a donc la formule

$$\psi(\overline{A}) = \overline{\varphi(\overline{A})A^k}.$$

Reste à prouver la formule

$$\psi(\overline{A}) = \overline{\varphi(\overline{A})\,\overline{A^k}}.$$

Autrement dit, il faut montrer que l'opérateur $\varphi(\overline{A})\overline{A^k}$ admet un prolongement fermé, car il est confondu avec l'homomorphisme $\psi(\overline{A})$ sur l'ensemble dense E. Supposons que $h_n\in D_{\overline{A^k}}$, $h_n\to 0$, et que la suite $\varphi(\overline{A})\overline{A^k}h_n$ converge. On a

$$\varphi(\overline{A})\overline{A^k}h_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\varphi}(t)e^{-i\overline{A}t}\overline{A^k}h_n\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\varphi}(t)\overline{A}^k e^{-i\overline{A}t}h_n\,dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\overline{A}^k\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\varphi}(t)e^{-i\overline{A}t}h_n\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\overline{A}^k\,\varphi(A)h_n \to 0$$

lorsque $n\to\infty$, puisque l'opérateur $\overline{A}^k$ est fermé. Ce qui prouve le théorème.

Nous avons ainsi montré que la formule $[fg]\,(\overline{A})=f(\overline{A})\,g(\overline{A})$ est valable non seulement lorsque $f,\ g\in\mathscr{B}_N(\mathbf{R})$ mais aussi lorsque f est un polynôme, $g\in\mathscr{B}_N(\mathbf{R})$ et $fg\in\mathscr{B}_N(\mathbf{R})$.

Adoptons maintenant la convention suivante: désignons simplement par A la fermeture $\overline{A}$ de A dans B_{int} en faisant une mention spéciale si une confusion est à craindre.

Lemme 2.2. *Si $\varphi\in\mathscr{B}_N(\mathbf{R})$ et si $\varphi(x)$ ne s'annule en aucun point de* **R**, *l'opérateur $\varphi(A)$ est inversible (autrement dit $\varphi(A)h\neq 0$ pour $h\neq 0$).*

Démonstration. Soit $\{e_n\}$ une suite de fonctions de $C_0^\infty(\mathbf{R})$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} h^*\left(e_n(A)h\right)=h^*(h)$$

pour tous $h\in B_{\text{int}}$, $h^*\in B_{\text{int}}^*$. L'existence de telles suites est établie dans le lemme 1.3. Si $\varphi(A)h=0$, alors

$$\psi_n(A)\,\varphi(A)h=0,$$

où $\psi_n(x)=e_n(x)/\varphi(x)$. Mais $\psi_n(A)\,\varphi(A)=e_n(A)$. Donc, pour tout $h^*\in B_{\text{int}}^*$,

$$h^*(h)=\lim_{n\to\infty} h^*\left(e_n(A)h\right)=0.$$

D'où $h=0$. C.Q.F.D.

Théorème 2.2. *Pour tout $f\in\mathscr{B}_N(\mathbf{R})$ et tout polynôme P, l'opérateur $f(A)\,P(A)$ possède une fermeture dans B_{int}.*

Démonstration. Supposons que $h_n\to 0$ et que $f(A)\,P(A)h_n\to q$ lorsque $n\to\infty$. Montrons que $q=0$. Désignons par φ une fonction de S partout non nulle. On a

$$\lim_{n\to\infty}\varphi(A)f(A)\,P(A)h_n=\varphi(A)q.$$

Or $\varphi fP\in\mathscr{B}_N(\mathbf{R})$, donc en vertu du théorème 2.1 on a

$$\varphi(A)q=\lim_{n\to\infty}\varphi(A)f(A)\,P(A)h_n=\lim_{n\to\infty}P(A)\,\varphi(A)\,f(A)h_n=0.$$

De là il s'ensuit que $q=0$, puisque l'opérateur $\varphi(A)$ est inversible. C.Q.F.D.

Théorème 2.3. *Soient $f\in\mathscr{B}_N(\mathbf{R})$, P un polynôme. Alors l'opérateur $P(A)f(A)$ est le prolongement de l'opérateur $f(A)\,P(A)$.*

Démonstration. Si h appartient au domaine de définition de l'opérateur $P(A)$, alors

$$f(A)\,P(A)h=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(t)\,e^{-iAt}P(A)h\,dt.$$

où $\tilde{f}$ est la transformée réciproque de Fourier de la fonction f. D'où, grâce au lemme 2.1 et à la fermeture de l'opérateur $P(A)$, l'on déduit

$$f(A)\,P(A)h=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(t)\,P(A)\,e^{-iAt}h\,dt=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}P(A)\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(t)\,e^{-iAt}h\,dt=P(A)\,f(A)h,$$

de sorte que l'opérateur $P(A)f(A)$ est le prolongement de l'opérateur $f(A)\,P(A)$.

Soit maintenant h un élément quelconque du domaine de définition de l'opérateur $f(A)\,P(A)$. Il existe alors une suite $\{h_n\}$ d'éléments du domaine de définition de l'opérateur $P(A)$ telle que

$$\lim_{n\to\infty}h_n=h,\qquad \lim_{n\to\infty}f(A)\,P(A)h_n=f(A)\,P(A)\,h.$$

L'opérateur $f(A)$ étant un homomorphisme et $f(A)\,P(A)$ la restriction de $P(A)f(A)$, il vient

$$\lim_{n\to\infty}f(A)h_n=f(A)h,\qquad \lim_{n\to\infty}P(A)f(A)h_n=f(A)\,P(A)\,h.$$

De là et du fait que $P(A)$ est fermé, il s'ensuit que

$$P(A)f(A)h=f(A)\,P(A)h.$$

C.Q.F.D.

Lemme 2.3. *Soient f_1, f_2, f_3 des fonctions de $\mathscr{B}_N(\mathbf{R})$, P et Q des polynômes et de plus*

$$f_1(x)\,P(x)=f_2(x)\,Q(x)+f_3(x).$$

Alors pour tout $h\in D_{P(A)f_1(A)}\cap D_{Q(A)f_2(A)}$, on a

$$P(A)\,f_1(A)h=Q(A)\,f_2(A)h+f_3(A)h.$$

Démonstration. Supposons qu'une fonction $\varphi\in S$ ne s'annule en aucun point. En vertu du lemme 2.2, l'opérateur $\varphi(A)$ est inversible, de sorte qu'il suffit de montrer que

$$\varphi(A)\,[P(A)\,f_1(A)-Q(A)f_2(A)-f_3(A)]\,h=0.$$

Les fonctions φP et φQ appartiennent à $\mathscr{B}_N(\mathbf{R})$ et de plus

$$\varphi(A)\,P(A)\subset[P\varphi](A),\qquad \varphi(A)\,Q(A)\subset[Q\varphi](A).$$

Donc

$$\varphi(A)\,[P(A)f_1(A)-Q(A)\,f_2(A)-f_3(A)]\,h=$$

$$=[(P\varphi)(A)\,f_1(A)-(Q\varphi)(A)\,f_2(A)-\varphi(A)\,f_3(A)]\,h=0,$$

puisque l'opérateur $[P\varphi](A)f_1(A)-[Q\varphi](A)f_2(A)-\varphi(A)f_3(A)$ est associé au symbole $\varphi(Pf_1-Qf_2-f_3)=0$. Ce qui prouve le lemme.

Donnons maintenant une définition des fonctions croissantes d'un générateur.

Définition. Soit $g(x)=f(x)P(x)+f_1(x)$, où $f, f_1\in\mathscr{B}_N(\mathbf{R})$ et où P est un polynôme. *Posons*

$$g(A)h \stackrel{\text{déf}}{=} f(A)P(A)h+f_1(A)h.$$

Remarque. Un élément h de B_{int} appartient au domaine de définition de l'opérateur $g(A)$ si et seulement s'il existe une représentation de la fonction g de la forme

$$g(x)=f(x)P(x)+f_1(x)$$

telle que

$$h\in D_{\overline{f(A)P(A)}},$$

où $f, f_1\in\mathscr{B}_N(\mathbf{R})$ et P est un polynôme.

Du lemme 2.3 et du théorème 2.3 il résulte que cette définition est correcte en ce sens que l'opérateur $g(A)$ ne dépend pas du procédé de représentation de la fonction g sous la forme $fP+f_1$. Lorsque $g\in\mathscr{B}_N(\mathbf{R})$, cette définition concorde visiblement avec celle de l'homomorphisme $g(A)$ du paragraphe précédent. Lorsque g est un polynôme, elle concorde aussi avec celle de polynôme d'un opérateur. En effet, soit

$$g(x)=f(x)P(x)+f_1(x),$$

où $f, f_1\in\mathscr{B}_N(\mathbf{R})$ et où P et g sont des polynômes. Signalons tout d'abord que le polynôme P est de degré supérieur à celui de g, puisque les fonctions f et f_1 sont bornées. Donc le domaine de définition de l'opérateur $P(A)$ est contenu dans celui de l'opérateur $g(A)$. Il faut montrer que le domaine de définition de l'opérateur $f(A)P(A)$ n'est pas plus large que celui de l'opérateur $g(A)$. Soit h un élément quelconque du domaine de définition de l'opérateur $f(A)P(A)$. Il existe alors une suite $\{h_n\}$ d'éléments du domaine de définition de l'opérateur $P(A)$ telle que $\lim_{n\to\infty} h_n=h$, et la suite $\{f(A)P(A)h_n\}$ est de Cauchy. Or $h_n\in D_{g(A)}$, donc en vertu du théorème 2.3 et du lemme 2.3, on a l'égalité

$$g(A)h_n=f(A)P(A)h_n+f_1(A)h_n,$$

de sorte que la suite $\{g(A)h_n\}$ converge. L'opérateur $g(A)$ étant fermé, il vient $h\in D_{g(A)}$. C.Q.F.D.

Supposons maintenant que l'opérateur fermé A est inversible.

Théorème 2.4. *Soit* $\varphi\in\mathscr{B}_N(\mathbf{R})$ *et supposons que la fonction*

$$\psi(x)=x^{-k}\varphi(x),$$

où k est un nombre naturel, appartient aussi à $\mathscr{B}_N(\mathbf{R})$. Alors

$$\psi(A)=A^{-k}\varphi(A).$$

Démonstration. On a

$$\varphi(x)=x^k\psi(x).$$

Donc

$$\varphi(A)=A^k\psi(A), \quad \psi(A)=A^{-k}\varphi(A).$$

Définissons maintenant les opérateurs associés aux symboles présentant une singularité en 0.

Définition. Soit $g(x)=f(x)x^{-k}$, où $f\in\mathscr{B}_N(\mathbf{R})$ et k est un nombre naturel. *Posons*

$$g(A) \stackrel{\text{déf}}{=} A^{-k}f(A).$$

Vérifions la validité de cette définition. Soient f_1, $f_2\in\mathscr{B}_N(\mathbf{R})$, $x^{-k_1}f_1(x)=x^{-k_2}f_2(x)$. Montrons que

$$A^{-k_1}f_1(A)=A^{-k_2}f_2(A).$$

En effet, supposons pour fixer les idées que $k_2>k_1$. On a $f_2(x)=x^{k_2-k_1}f_1(x)$; donc $f_2(A)=A^{k_2-k_1}f_1(A)$. En multipliant les deux membres de cette relation à gauche par A^{-k_2}, on obtient la relation annoncée.

Lemme 2.4. *Soient $f\in\mathscr{B}_N(\mathbf{R})$, $h\in D_{A^{-k}}$. Alors*

$$f(A)A^{-k}h=A^{-k}f(A)h.$$

Démonstration. On a

$$f(A)h=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(t)e^{-iAt}h\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(t)e^{-iAt}A^kA^{-k}h\,dt=$$

$$=\frac{A^k}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(t)e^{-iAt}A^{-k}h\,dt=A^kf(A)A^{-k}h.$$

En multipliant les deux membres de cette égalité par A^{-k}, on est conduit à la proposition du lemme.

Définition. Soit $g(x)=f_1(x)P(x)+f_2(x)x^{-k}+f_3(x)$, où f_1, f_2, $f_3\in\mathscr{B}_N(\mathbf{R})$, P, un polynôme, k, un nombre naturel. *Posons*

$$g(A)h=g_1(A)h+g_2(A)h+f_3(A)h,$$

où $g_1(x)=f_1(x)P(x)$, $g_2(x)=f_2(x)x^{-k}$, h un élément quelconque de $D_{g_1(A)}\cap D_{g_2(A)}$.

Assurons-nous que cette définition est correcte. Soit

$$g(x)=g_1(x)+g_2(x)+f_3(x)=g_4(x)+g_5(x)+f_6(x),$$

où

$$g_1(x)=f_1(x)\,P(x), \qquad g_2(x)=f_2(x)\,x^{-k},$$

$$g_4(x)=f_4(x)\,Q(x), \qquad g_5(x)=f_5(x)\,x^{-l},$$

$f_j \in \mathscr{B}_N(\mathbf{R})$, $j=1, 2, \ldots, 6$, P et Q sont des polynômes, k et l des nombres naturels. Remarquons tout d'abord que les fonctions g_2 et g_5 peuvent être corrigées au voisinage de 0 de sorte à appartenir à $\mathscr{B}_N(\mathbf{R})$. Comme

$$g_1-g_4=g_5-g_2+f_6+f_3$$

et que la fonction g_1-g_4 est confondue au voisinage de 0 avec une fonction de $\mathscr{B}_N(\mathbf{R})$, il vient que

$$g_1(x)-g_4(x)=f_7(x),$$

où $f_7(x)\in\mathscr{B}_N(\mathbf{R})$. Donc, $g_1(A)=g_4(A)+f_7(A)$. Par ailleurs, on a

$$g_2(x)=g_5(x)+f_8(x),$$

où $f_8=f_3+f_6-f_7\in\mathscr{B}_N(\mathbf{R})$. Soit

$$h\in D_{A^{-k}f_2(A)}\cap D_{A^{-l}f_5(A)}.$$

Posons

$$q=[g_2(A)-g_5(A)-f_8(A)]\,h=[A^{-k}f_2(A)-A^{-l}f_5(A)-f_8(A)]\,h.$$

On demande de prouver que $q=0$. Conduisons la démonstration comme suit: soit $\varphi\in S$ une fonction ne s'annulant en aucun point et soit $\varphi_m(x)=x^m\varphi(x)$, $m=1, 2, \ldots$ Montrons que l'opérateur $\varphi_m(A)$ est inversible et que $\varphi_m(A)\,q=0$ pour m assez grand. On a $\varphi_m(A)=A^m\varphi(A)$. Donc

$$(\varphi_m(A)\,u=0)\Rightarrow(A^m\varphi(A)\,u=0\Rightarrow(\varphi(A)\,u=0)\Rightarrow(u=0).$$

Nous nous sommes servis de l'inversibilité des opérateurs A et $\varphi(A)$. Nous avons ainsi prouvé que $\varphi_m(A)$ est inversible.

Soit $m\geqslant\max(k, l)$. Les fonctions $x^{-k}\varphi_m(x)$ et $x^{-l}\varphi_m(x)$ appartiennent alors à l'espace $\mathscr{B}_N(\mathbf{R})$. Grâce au théorème 2.4 et au lemme 2.4, on obtient

$$\varphi_m(A)\,q=[A^{m-k}\varphi(A)\,f_2(A)-A^{m-l}\varphi(A)\,f_5(A)-A^m\varphi(A)\,f_8(A)]\,h=0.$$

C.Q.F.D.

Exemple. Soit $\sqrt{x}\overset{\text{déf}}{=}i\sqrt{|x|}$ pour $x<0$. Alors la fonction $x^{N+1}\sqrt{x}$ est $N+1$ fois continûment dérivable sur $\mathbf{R}$. Soit $1=e_1(x)+e_2(x)$, où

$e_1 \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, $e_1(x)=1$ pour x assez petit. Posons $f_1(x)=e_1(x)\,x^{N+1}\sqrt{x}$, $f_2(x)=e_2(x)/\sqrt{x}$. Alors $f_1, f_2 \in \mathscr{B}_N(\mathbf{R})$ et

$$\sqrt{x}=g_1(x)+g_2(x),$$

où $g_1(x)=x^{-N-1}f_1(x)$, $g_2(x)=xf_2(x)$. Donc

$$\sqrt{Ah}=A^{-N-1}f_1(A)\,h+Af_2(A)\,h,$$

pour tout $h \in D_{g_1(A)} \cap D_{g_2(A)}$.

Exercice. Montrer que les fonctions d'opérateurs commutables, indéfiniment dérivables et ne croissant pas plus vite que n'importe quelle puissance de l'argument, forment une algèbre munie d'une μ-structure, où A est l'algèbre des opérateurs commutables non bornés et l'ensemble M est composé de générateurs et de fonctions réelles de ces générateurs.

§ 3. Homomorphisme des formules asymptotiques. Méthode de phase stationnaire

Soit A la fermeture dans B_{int} d'un générateur de degré N, et soit k un nombre naturel. Du théorème 2.1 il s'ensuit que si φ, $\psi \in \mathscr{B}_N(\mathbf{R})$ et $\varphi(x)-\psi(x)=O(x^{-k})$ au sens que $x^k[\varphi(x)-\psi(x)] \in \mathscr{B}_N(\mathbf{R})$, alors le vecteur $\varphi(A)g-\psi(A)g$ appartient au domaine de définition de l'opérateur A^k pour tout $g \in B_{\text{int}}$.

Considérons à titre d'exemple la méthode de phase stationnaire. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, et soit $\mathscr{F} \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ une fonction réelle. Supposons que l'équation $\mathscr{F}'(\xi)=0$ admet une seule solution ξ_0 sur le support de la fonction φ, et de plus $\mathscr{F}''(\xi_0)\neq 0$. Considérons l'intégrale

$$I(x)=\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\,e^{ix\mathscr{F}(\xi)}\,d\xi. \tag{3.1}$$

La méthode de phase stationnaire nous donne le développement asymptotique de la fonction $I(x)$ suivant les puissances de $\frac{1}{x}$:

$$I(x)=e^{ix\mathscr{F}(\xi_0)}\sum_{j=0}^{n} a_j(\varphi,\mathscr{F})\,x^{-j-1/2}+R_{n+1}(x),$$

où $R_{n+1}(x)=O(x^{-n-3/2})$. Nous allons établir la formule de la méthode de phase stationnaire pour déduire la majoration du reste R_{n+1} dans la forme qui nous convient le mieux.

Faisons le changement de variables suivant dans l'intégrale (3.1):

$$[\mathscr{F}(\xi)-\mathscr{F}(\xi_0)]=t^2\,\operatorname{sign}[\mathscr{F}''(\xi)]$$

et posons $\omega=|x|$, $\sigma=\operatorname{sign}[x\mathscr{F}''(\xi_0)]$. On obtient

$$I(x)=e^{ix\mathscr{F}(\xi_0)}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\sigma t^2}\,\psi(t)\,dt, \tag{3.2}$$

où $\psi(t)=\varphi(\xi(t))\,d\xi/dt$, $\psi\in C_0^\infty(\mathbf{R})$. Transformons la formule (3.2) de la manière suivante:

$$e^{-ix\mathcal{F}(\xi_0)}I(x)=\psi(0)\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega\sigma t^2}\,dt+\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega\sigma t^2}[\psi(t)-\psi(0)]\,dt=$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{\omega}}\,e^{i\sigma\pi/4}\,\psi(0)-\frac{1}{2i\omega\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega\sigma t^2}\psi_1(t)\,dt,$$

où $\psi_1(t)=\dfrac{d}{dt}\,\dfrac{\psi(t)-\psi(0)}{t}$; nous avons effectué une intégration par parties. Il est immédiat de voir qu'à l'extérieur du support de la fonction $\psi(t)$, on a l'égalité

$$\psi_1(t)=\frac{\psi(0)}{t^2}.$$

En transformant l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega\sigma t^2}\psi_1(t)\,dt$ comme nous l'avons fait pour l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega\sigma t^2}\psi(t)\,dt$, nous obtenons la formule

$$e^{-ix\mathcal{F}(\xi_0)}I(x)=\sqrt{\frac{\pi}{\omega}}\,e^{i\sigma\pi/4}\left(\psi(0)+\frac{i}{2\omega\sigma}\,\psi_1(0)\right)+$$

$$+\left[\frac{i}{2\omega\sigma}\right]^2\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega\sigma t^2}\psi_2(t)\,dt,$$

où $\psi_2(t)=\dfrac{d}{dt}\,\dfrac{\psi_1(t)-\psi_1(0)}{t}$. En poursuivant ce processus, nous obtenons

$$e^{-ix\mathcal{F}(\xi_0)}I(x)=\sqrt{\frac{\pi}{\omega}}\,e^{i\sigma\pi/4}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{i}{2\omega\sigma}\right)^j\psi_j(0)+$$

$$+\left(\frac{i}{2\omega\sigma}\right)^{n+1}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega\sigma t^2}\,\psi_{n+1}(t)\,dt, \qquad (3.3)$$

où

$$\psi_{j+1}(t)=\frac{d}{dt}\,\frac{\psi_j(t)-\psi_j(0)}{t},\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ \psi_0=\psi_1$$

Pour justifier la formule (3.3), il nous faut encore nous assurer que pour tout j naturel

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\psi_j(t)-\psi_j(0)}{t}=0. \tag{3.4}$$

En nous servant de la formule explicite de $\psi_1(t)$ pour de grands t, nous établissons immédiatement par récurrence que si $t\notin\operatorname{supp}\psi$, alors $\psi_j(t)=t^{-2}P(t^{-1})$, où P est un polynôme dépendant de j. Ceci prouve la formule (3.4).

On obtient ainsi le développement suivant:

$$\sqrt{x}\, e^{-ix\mathscr{F}(\xi_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\mathscr{F}(\xi)}\varphi(\xi)\,d\xi=$$

$$=\sqrt{\pi}\, e^{i\pi/4\operatorname{sign}\mathscr{F}''(\xi_0)} \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{i}{2x\operatorname{sign}\mathscr{F}''(\xi_0)}\right)^j \psi_j(0)+r_{n+1}(x), \tag{3.5}$$

$$r_{n+1}(x)=\sqrt{x}\left(\frac{i\operatorname{sign}\mathscr{F}''(\xi_0)}{2x}\right)^{n+1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt^2\operatorname{sign}\mathscr{F}''(\xi_0)}\psi_{n+1}(t)\,dt, \tag{3.6}$$

et de plus pour $x<0$

$$\sqrt{x} \overset{\text{déf}}{=} \sqrt{|x|}\, e^{i\pi/2\operatorname{sign}\mathscr{F}''(\xi_0)}.$$

Nous ne pouvons substituer directement dans la formule (3.5) le générateur A à la variable x, puisque la fonction $1/x^j$ n'appartient pas à l'espace $\mathscr{B}_N(\mathbf{R})$. Modifions le développement (3.5) comme suit. Soient rad x et $\rho_j(x)$ des fonctions indéfiniment dérivables confondues respectivement avec $\sqrt{x}$ et x^{-j} à l'extérieur d'un voisinage fini de 0. Alors

$$(\operatorname{rad} x)\, e^{-ix\mathscr{F}(\xi_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\mathscr{F}(\xi)}\varphi(\xi)\,d\xi=$$

$$=\sqrt{\pi}\, e^{i\pi/4\operatorname{sign}\mathscr{F}''(\xi_0)} \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{i\operatorname{sign}\mathscr{F}''(\xi_0)}{2}\right)^j \rho_j(x)\psi_j(0)+\bar{r}_{n+1}(x), \tag{3.7}$$

où $\bar{r}_{n+1}(x)=r_{n+1}(x)$ pour $|x|$ assez grand.

A noter que tous les termes de (3.7) hormis $\bar{r}_{n+1}(x)$ sont de toute évidence indéfiniment dérivables. De là il s'ensuit qu'il en est de même de la fonction $\bar{r}_{n+1}(x)$.

Evaluons maintenant le reste $r_{n+1}(x)$ à l'infini. Supposons pour fixer les idées que $\operatorname{sign} \mathscr{F}''(\xi_0)=1$. En poursuivant le développement, on obtient pour tout $m \geqslant n+1$ naturel

$$x^{n+1} r_{n+1}(x)=\sqrt{\pi}\, e^{i\pi/4}\left(\frac{i}{2}\right)^{n+1} \psi_{n+1}(0)+$$

$$+\sqrt{\pi}\, e^{i\pi/4} \sum_{j=n+2}^{m}\left(\frac{i}{2}\right)^{j} x^{n+1-j} \psi_j(0)+$$

$$+\sqrt{x}\left(\frac{i}{2}\right)^{m+1} x^{n-m} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt^2} \psi_{m+1}(t)\, dt. \qquad (3.8)$$

Le premier terme du second membre de (3.8) est une constante, donc il appartient à l'espace $\mathscr{B}_N(\mathbf{R})$. D'autre part, tous les termes de la somme $\sum_{j=n+2}^{m}$ du second membre de (3.8) sont de carré intégrable au voisinage de l'infini, de même que toutes leurs dérivées. Considérons enfin la fonction

$$f(x)=\sqrt{x}\, x^{n-m} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt^2} \psi_{m+1}(t)\, dt \stackrel{\text{déf}}{=} \sqrt{x}\, x^{n-m} g(x).$$

La fonction g est bornée; estimons ses dérivées. On a

$$g'(x)=\int_{-\infty}^{\infty} it^2 e^{ixt^2} \psi_{m+1}(t)\, dt=-\frac{1}{2x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt^2}\left[t\psi_{m+1}(t)\right]' dt.$$

Nous avons effectué une intégration par parties et utilisé le fait que $\lim_{t\to\infty} t\psi_{m+1}(t)=0$. Pour calculer $g''(x)$ on remarquera que la fonction $[t\psi_{m+1}(t)]'$ se représente comme la fonction $\psi_{m+1}(t)$ par le produit de t^{-2} par un polynôme de t^{-1}, de sorte que

$$g''(x)=\frac{1}{(2x)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt^2} \frac{d}{dt}\, t\, \frac{d}{dt}\, t\psi_{m+1}(t)\, dt.$$

Le calcul des dérivées suivantes fait apparaître que la fonction $g(x)$ est indéfiniment dérivable et $g^{(k)}(x)=O(|x|^{-k})$. De là il s'ensuit que si m est assez grand, la fonction est intégrable au voisinage de l'infini pour $k \leqslant N+1$.

Des majorations obtenues il résulte que la fonction $x^{n+1}\bar{r}_{n+1}(x)$ se représente par la somme d'une constante et d'une fonction de $W_2^{N+1}(\mathbf{R})$ et,

par suite, appartient à l'espace $\mathscr{B}_N(\mathbf{R})$. La fonction $\bar{r}_{n+1}$ appartient elle aussi visiblement à l'espace $\mathscr{B}_N(\mathbf{R})$. Donc, pour tout $g \in B_{\text{int}}$

$$\bar{r}_{n+1}(A)\, g \in D_{A^{n+1}}.$$

Penchons-nous maintenant sur le premier membre de la formule (3.7). Cette fonction appartient à $\mathscr{B}_N(\mathbf{R})$, puisqu'il en est de même du second membre. Posons

$$\operatorname{rad} x \cdot I(x) \stackrel{\text{déf}}{=} K(x).$$

On a le développement

$$K(A) = \sqrt{\pi}\, e^{i(A\mathscr{F}(\xi_0) + \frac{\pi}{4}\operatorname{sign}\mathscr{F}''(\xi_0))} \times \sum_{j=0}^{n} \left[\frac{i \operatorname{sign} \mathscr{F}''(\xi_0)}{2}\right]^j \varphi_j(0)\, \rho_j(A) + \bar{r}_{n+1}(A),$$

le domaine des valeurs de l'opérateur $\bar{r}_{n+1}(A)$ étant contenu dans celui de l'opérateur A^{n+1}. Posons maintenant

$$g(x, \xi) = \frac{1}{(x+i)^2}\, \varphi(\xi)\, e^{ix\mathscr{F}(\xi)}, \qquad L(x) = \frac{1}{(x+i)^2}\, I(x).$$

La fonction $g(x, \xi)$ engendre une fonction $G(\xi)$ à valeurs dans $W_2^{N+1}(\mathbf{R}) \subset \mathscr{B}_N(\mathbf{R})$. La fonction G est continue. En effet, on a l'estimation

$$\frac{\partial^{j+1} g(x, \xi)}{\partial \xi\, \partial x^j} = O\left(\frac{1}{(x^2+1)^{1/2}}\right),$$

uniformément en ξ. Donc

$$L(A) = \int_{-\infty}^{\infty} g(A, \xi)\, d\xi.$$

On vérifie sans peine que $I \in \mathscr{B}_N(\mathbf{R})$, donc la dernière égalité peut se mettre sous la forme

$$(A+i)^{-2} I(A) = \int_{-\infty}^{\infty} g(A, \xi)\, d\xi, \qquad I(A) = (A+i)^2 \int_{-\infty}^{\infty} g(A, \xi)\, d\xi.$$

Montrons que $K(A) = \operatorname{rad} A \cdot I(A)$. Supposons que $h \in E$. Alors pour tout k naturel et tout $\chi \in \mathscr{B}_N(\mathbf{R})$, on a

$$\chi(A)(A+i)^k h = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\chi}(t)(A+i)^k U(t) h\, dt = (A+i)^k \chi(A) h.$$

De là il s'ensuit en particulier que $\chi(A)h$ appartient au domaine de définition de toute puissance de l'opérateur A. Posons

$$\mathrm{rad}_k(x)=\frac{\mathrm{rad}\,x}{(x+i)^k};$$

pour les k assez grands on a $\mathrm{rad}_k\in\mathscr{B}_N(\mathbf{R})$. Pour tout $h\in E$, on a $\mathrm{rad}\,A\cdot I(A)h=\mathrm{rad}_k(A)(A+i)^k I(A)h=\mathrm{rad}_k(A)I(A)(A+i)^k h$. D'autre part

$$(A+i)^{-k}K(A)=\mathrm{rad}_k(A)I(A);$$

donc

$$\mathrm{rad}\,A\cdot I(A)h=(A+i)^{-k}K(A)(A+i)^k h=K(A)h.$$

Soient maintenant h un élément quelconque de B_{int}, $h_j\in E$, $h_j\to h$ lorsque $j\to\infty$. Alors

$$K(A)h_j\to K(A)h,\qquad I(A)h_j\to I(A)h \text{ pour } j\to\infty,$$

donc

$$K(A)h=\lim_{j\to\infty}\mathrm{rad}\,A\cdot I(A)h_j=\mathrm{rad}\,A\cdot I(A)h,$$

ce que nous voulions. Nous pouvons maintenant écrire la formule

$$K(A)=\mathrm{rad}\,A\cdot(A+i)^2\int_{-\infty}^{\infty}g(A,\xi)\,d\xi.$$

D'où il vient que pour tout $h\in E$

$$K(A)h=\mathrm{rad}\,A\cdot(A+i)^2\int_{-\infty}^{\infty}g(A,\xi)h\,d\xi=\mathrm{rad}\,A\int_{-\infty}^{\infty}g(A,\xi)(A+i)^2 h\,d\xi=$$

$$=\mathrm{rad}\,A\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{iA\mathscr{F}(\xi)}h\,\xi.$$

Pour généraliser l'égalité

$$K(A)h=\mathrm{rad}\,A\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{iA\mathscr{F}(\xi)}h\,d\xi$$

obtenue pour $h\in E$ à un h quelconque de B_{int}, montrons que la fonction

$$\xi\to\varphi(\xi)e^{iA\mathscr{F}(\xi)}h \tag{3.9}$$

à valeurs dans B_{int} est continue sur $\mathbf{R}$. Il suffit de montrer que l'application

$$t\to e^{iAt}h,\qquad t\in\mathbf{R},$$

est continue, ce qui, puisque l'opérateur e^{iAt} est borné, équivaut à montrer que pour tout $\varepsilon>0$, on peut exhiber un $\delta>0$ tel que pour $|\tau|<\delta$ l'on a

$$\|e^{iA\tau}h-h\|<\varepsilon.$$

Choisissons un $h_0 \in E$ tel que l'inégalité

$$\|(e^{iA\tau}-1)(h-h_0)\| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.10}$$

soit réalisée pour tout τ d'un voisinage borné fixe de 0. Posons $q_0=(A+i)^2 h_0$. Alors

$$\|(e^{iA\tau}-1)h_0\| - \|(A+i)^{-2}(e^{iA\tau}-1)q_0\| \to 0$$

lorsque $\tau \to 0$, puisque la fonction G à valeurs dans $W_2^{N+1}(\mathbf{R})$ définie par la formule

$$[G(\tau)](x) = \frac{1}{(x+i)^2}[e^{ix\tau}-1],$$

est continue. Choisissons un $\delta>0$ tel que pour $|\tau|<\delta$ soient réalisées les inégalités (3.10) et

$$\|(e^{iA\tau}-1)h_0\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors pour $|\tau|<\delta$

$$\|(e^{iA\tau}-1)h\| \leqslant \|(e^{iA\tau}-1)h_0\| + \|(e^{iA\tau}-1)(h-h_0)\| < \varepsilon.$$

Ceci prouve la continuité de la fonction (3.9). Donc l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{iA\mathscr{F}(\xi)} h\, d\xi,$$

comprise comme la limite de sommes intégrales pour la norme de l'espace B_{int} existe bien.

Par ailleurs, si $h_n \to h$ lorsque $n\to\infty$, alors $\|\varphi(\xi)e^{iA\mathscr{F}(\xi)}(h_n-h)\|B_{\text{int}} \to 0$ uniformément en ξ lorsque $n\to\infty$, puisque

$$\|e^{iA\mathscr{F}(\xi)}\| \leqslant (1+|\mathscr{F}(\xi)|)^N.$$

Soient h un élément quelconque de B_{int} et $\{h_m\}$ une suite d'éléments de E convergeant vers h. Alors

$$\lim_{m\to\infty} I(A)h_m = I(A)h,$$

$$\lim_{m\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{iA\mathscr{F}(\xi)} h_m\, d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{iA\mathscr{F}(\xi)} h\, d\xi.$$

Or $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{iA\mathscr{F}(\xi)} h_m\, d\xi = I(A)h_m$; donc

$$I(A)h = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{iA\mathscr{F}(\xi)} h\, d\xi;$$

d'où il vient que

$$K(A)h = \operatorname{rad} A \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\, e^{iA\mathscr{F}(\xi)} h\, d\xi.$$

Posons

$$a_j(\varphi, \mathscr{F}) = \sqrt{\pi}\; e^{i\pi/4 \operatorname{sign} \mathscr{F}''(\xi_0)} \left[\frac{i \operatorname{sign} \mathscr{F}''(\xi_0)}{2}\right]^j \psi_j(0),$$

où les fonctions ψ_j sont construites à l'aide des fonctions φ et $\mathscr{F}$ avec le procédé décrit ci-dessus. Les nombres $a_j(\varphi, \mathscr{F})$ ne dépendent que des valeurs prises en ξ_0 par les fonctions φ et $\mathscr{F}$ et par leurs dérivées jusqu'à un ordre dépendant de j.

On obtient ainsi la proposition suivante.

Théorème 3.1. *Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ et soit $\mathscr{F}$ une fonction réelle indéfiniment dérivable sur* **R** *admettant un seul point critique ξ_0 sur* supp φ, *et de plus $\mathscr{F}''(\xi_0) \neq 0$. Supposons par ailleurs que* rad x *est une fonction indéfiniment dérivable confondue en dehors d'un voisinage borné de* 0 *avec la fonction*

$$x^{1/2} \overset{\text{déf}}{=} \begin{cases} \sqrt{x} & \text{pour } x \geqslant 0, \\ \sqrt{|x|}\; e^{i\pi/2 \operatorname{sign} \mathscr{F}''(\xi_0)} & \text{pour } x < 0, \end{cases}$$

et enfin que $\rho_j(x)$ sont des fonctions indéfiniment dérivables confondues avec les fonctions x^{-j} en dehors d'un voisinage borné de 0.

Alors pour tout $n \geqslant 0$, on a le développement

$$\operatorname{rad} A \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\, e^{iA\mathscr{F}(\xi)} h\, d\xi =$$

$$= e^{iA\mathscr{F}(\xi)} \sum_{j=0}^{n} a_j(\varphi, \mathscr{F})\, \rho_j(A) h + q_{n+1}, \tag{3.11}$$

où q_{n+1} appartient au domaine de définition de l'opérateur A^{n+1}.

Remarque. Supposons que l'opérateur A est inversible. Dans la formule (3.11) on peut alors remplacer $\rho_j(A)h$ par $A^{-j}h$ sous réserve que $h \in D_{A^{-n}}$. Pour s'en assurer, il suffit de montrer que

$$[\rho_j(A) - A^{-j}]\, h \in D_{A^{n+1}}$$

pour tout $h \in D_{A^{-j}}$. Posons $[\rho_j(A) - A^{-j}]\, h = q$. Alors $A^j q = [A^j \rho_j(A) - 1]\, h$. La fonction $x^j \rho_j(x)$ appartient à $\mathscr{B}_N(\mathbf{R})$ et est identiquement égale à 1 au voisinage de l'infini. Donc la fonction $x^m(x^j \rho_j(x) - 1)$ appartient à l'espace $\mathscr{B}_N(\mathbf{R})$ pour tout m naturel, de sorte que le domaine des valeurs de l'opérateur $A^j \rho_j(A) - 1$ est contenu dans D_{A^m}. Donc, pour tout m, on a $q \in D_{A^{j+m}}$; en particulier, $q \in D_{A^{n+1}}$.

§ 4. Fonctions de l'opérateur de dérivation. Opérateur de Hilbert

Soient dans les notations du paragraphe précédent

$$B_1 = B_2 = W_2^{-s}(\mathbf{R}), \quad s \geqslant 0, \quad D = C_0^\infty(\mathbf{R}),$$

et supposons que l'opérateur A est défini par la formule

$$A\varphi(x) = i\varphi'(x).$$

Lemme 4.1. *L'opérateur A est un générateur de degré nul.*

Démonstration. Considérons le problème de Cauchy

$$\frac{du}{dt} + iAu = 0, \quad u(0) = h, \quad h \in C_0^\infty(\mathbf{R}). \tag{4.1}$$

Le problème (4.1) admet une solution; plus exactement, la fonction

$$[u(t)](x) = h(x+t).$$

En effet, tout d'abord

$$[iAu(t)](x) = -h'(x+t).$$

Ensuite,

$$\frac{h(x+t+\delta) - h(x+t)}{\delta} - h'(x+t) = h'(x+t+\theta\delta) - h'(x+t),$$

où $|\theta| \leqslant 1$; la fonction h' étant uniformément continue, la relation aux différences

$$\frac{h(x+t+\delta) - h(x+t)}{\delta}$$

converge uniformément en x vers $h'(x+t)$ lorsque $\delta \to 0$. Donc

$$\lim_{\delta \to 0} \int_R \left| \frac{h(x+t+\delta) - h(x+t)}{\delta} - h'(x+t) \right|^2 dx = 0,$$

de sorte que $\dfrac{du}{dt} = -iAu$, si la dérivation est comprise au sens de la convergence dans $L_2(\mathbf{R})$ et *a fortiori* au sens de la convergence dans $W_2^{-1}(\mathbf{R})$.

Prouvons maintenant l'unicité de la solution du problème (4.1). Remarquons tout d'abord que l'opérateur A est symétrique: $A^* \supset A$. En effet, pour tous $\varphi, \psi \in D_A$

$$(A\varphi, \psi)_{W_2^{-1}(\mathbf{R})} = \int_{-\infty}^{\infty} (-p)\,\tilde{\varphi}(p)\,\tilde{\bar{\psi}}(p)\,(1+p^2)^{-s}\,dp = (\varphi, A\psi)_{W_2^{-1}(\mathbf{R})},$$

où $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{\bar{\psi}}$ sont les transformées de Fourier respectivement des fonctions φ et $\bar{\psi}$.

D'après le théorème 4.1 du chapitre I, pour prouver l'unicité de la solution du problème de Cauchy (4.1), il suffit de montrer que pour tout $h \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ et pour tous réels a, b, T, il existe une fonction v continue pour la norme de $L_2(\mathbf{R})$ à valeurs dans $C_0^\infty(\mathbf{R})$ vérifiant les conditions

$$\frac{dv}{dt} + iAv = \begin{cases} h \text{ pour } t \in]a, b[, \\ 0 \text{ pour } t \notin [a, b], \end{cases}$$
$$v(T) = 0$$

(la dérivation est comprise au sens de la convergence dans $L_2(\mathbf{R})$). Supposons pour fixer les idées que $a < b < T$, et posons

$$[v(t)](x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } b \leqslant t \leqslant T, \\ \int_b^t h(x+t-\tau)\, d\tau & \text{pour } a \leqslant t \leqslant b, \end{cases}$$

$$v_0(x) = \int_b^a h(x+a-\tau)\, d\tau.$$

Prolongeons la fonction v au domaine $t < a$ de telle sorte qu'elle soit solution du problème de Cauchy

$$\frac{dv}{dt} + iAv = 0, \quad t < a, \quad v(a) = v_0;$$

l'existence de cette solution se prouve comme pour le problème (4.1). La fonction v que nous avons définie remplit toutes les conditions exigées; seule a besoin d'être vérifiée la condition

$$\frac{dv}{dt} + iAv = h \quad \text{pour} \quad t \in]a, b[.$$

Soit $t \in]a, b[$. Alors $[Av(t)](x) = i \int_b^t h'(x-\tau+t)\, d\tau$. Par ailleurs, on établirait sans peine (comme ceci a été précédemment fait pour la fonction u) que

$$\left[\frac{dv(t)}{dt}\right](x) = \frac{\partial}{\partial t} \int_b^t h(x-\tau+t)\, d\tau = h(x) + \int_b^t h'(x+t-\tau)\, d\tau =$$
$$= h(x) - i[Av(t)](x).$$

Nous avons ainsi acquis l'unicité de la solution du problème (4.1).

Nous avons vu que l'opérateur A engendre un groupe à un paramètre $\{U(t)\}$ d'homomorphismes de l'espace vectoriel $C_0^\infty(\mathbf{R})$. On a la formule

$$U(t)\, \varphi(x) = \varphi(x+t);$$

pour cette raison le groupe $\{U(t)\}$ s'appelle *groupe de translations*. Il est évident que pour tout t réel, l'opérateur $U(t): W_2^{-s}(\mathbf{R}) \to W_2^{-s}(\mathbf{R})$ est isométrique, et par suite peut être prolongé en un opérateur unitaire e^{-iAt}. On en déduit en particulier que A est un générateur de degré nul. Ce qui prouve le lemme.

Lemme 4.2. *L'opérateur $\overline{A}$ est inversible.*

Démonstration. Soit $\{h_n\}$ une suite de fonctions de $C_0^\infty(\mathbf{R})$ qui est de Cauchy pour la norme de l'espace $W_2^{-s}(\mathbf{R})$ et telle que

$$\lim_{n\to\infty} \|Ah_n\|_{W_2^{-s}(\mathbf{R})} = 0.$$

On demande de prouver que dans ce cas $\lim_{n\to\infty} \|h_n\|_{W_2^{-s}(\mathbf{R})} = 0$. Supposons que $\tilde{h}_n \in \tilde{W}_2^{-s}(\mathbf{R})$ est la transformée de Fourier d'une fonction h_n, $\tilde{h}_n \in S$, et que $\tilde{q}_n$ est la transformée de Fourier de la fonction Ah_n. On a la formule

$$\tilde{q}_n(p) = -p\tilde{h}_n(p).$$

La suite $\{\tilde{h}_n\}$ est de Cauchy dans $\tilde{W}_2^{-s}(\mathbf{R}^n)$ et la suite $\{\tilde{q}_n\}$ converge vers 0 dans $\tilde{W}_2^{-s}(\mathbf{R})$. Il faut montrer que la suite $\{h_n\}$ converge vers 0 dans $\tilde{W}_2^{-s}(\mathbf{R})$. La suite d'éléments de $\tilde{W}_2^{-s}(\mathbf{R})$ peut être traitée comme une suite de fonctionnelles linéaires bornées sur $\tilde{W}_2^{s}(\mathbf{R})$. La convergence en norme de la suite de fonctionnelles entraînant la convergence simple vers la même limite, il nous suffit de prouver que pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}_n(p)\varphi(p)\,dp = 0;$$

ceci étant, on sait que pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |p\tilde{h}_n(p)\varphi(p)\,dp| \to 0$$

pour $n\to\infty$. Fixons une fonction $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut exhiber un numéro N tel que pour $n \geqslant N$ l'on ait

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(\tilde{h}_n(p) - \tilde{h}_N(p))\varphi(p)|\,dp < \varepsilon.$$

Par ailleurs, on peut trouver un $\delta > 0$ tel que

$$\int_{-\delta}^{\delta} |\tilde{h}_N(p)\varphi(p)|\,dp < \varepsilon.$$

On a

$$\int_{|p|>\delta} |\tilde{h}_n(p)\varphi(p)|\,dp \leqslant \frac{1}{\delta} \int_{|p|>\delta} |p\tilde{h}_n(p)\varphi(p)|\,dp \to 0$$

pour $n\to\infty$. Donc, on peut indiquer un $N_1\geqslant N$ tel que

$$\int\limits_{|p|>\delta}|\tilde{h}_{N_1}(p)\,\varphi(p)|\,dp<\varepsilon.$$

Comme pour $n\geqslant N$

$$\int\limits_{|p|>\delta}|(\tilde{h}_n(p)-\tilde{h}_N(p))\,\varphi(p)|\,dp\leqslant\int\limits_{-\infty}^{\infty}|(\tilde{h}_n(p)-\tilde{h}_N(p))\,\varphi(p)|\,dp<\varepsilon,$$

il vient

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{h}_N(p)\,\varphi(p)\,dp\right|\leqslant\int\limits_{-\delta}^{\delta}|\tilde{h}_N(p)\,\varphi(p)|\,dp+$$

$$+\int\limits_{|p|>\delta}|(\tilde{h}_N(p)-\tilde{h}_{N_1}(p))\,\varphi(p)|\,dp+\int\limits_{|p|>\delta}|\tilde{h}_{N_1}(p)\,\varphi(p)|\,dp<3\varepsilon$$

et par suite

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{h}_n(p)\,\varphi(p)\,dp\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{-\infty}^{\infty}|(\tilde{h}_n(p)-\tilde{h}_N(p))\,\varphi(p)|\,dp+\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\tilde{h}_N(p)\,\varphi(p)|\,dp<4\varepsilon,$$

ce qui prouve le lemme.

Soit φ une fonction de $C_0^\infty(\mathbf{R})$ égale à 1 au voisinage de 0. Posons $f_1(x)=[1-\varphi(x)]\operatorname{sign}x$, $f_2(x)=x^2\varphi(x)\operatorname{sign}x$. Alors

$$\operatorname{sign}x=f_1(x)+x^{-2}f_2(x),$$

et de plus $f_1, f_2\in\mathscr{B}_0(\mathbf{R})$. Donc la définition suivante est correcte.

Définition. On appelle *opérateur de Hilbert* (relativement à A) l'opérateur

$$I=\operatorname{sign}A=f_1(A)+A^{-2}f_2(A).$$

Lemme 4.3. *Si* $f\in\mathscr{B}_0(\mathbf{R})$, $\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R})$, $\psi=f(A)\varphi$, $\tilde{\varphi}=F\varphi$, $\tilde{\psi}=F\psi$, *alors* $\tilde{\psi}(p)=f(-p)\,\tilde{\varphi}(p)$.

Démonstration. Supposons tout d'abord que f est la transformée de Fourier d'une fonction de $C_0^\infty(\mathbf{R})$. On a

$$f(A)\varphi=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(t)\,U(t)\,\varphi\,dt,$$

où l'intégrale est comprise comme la limite de sommes intégrales pour une fonction continue à valeurs dans $W_2^{-s}(\mathbf{R})$. Mais la fonction

$$t\to U(t)\varphi$$

est continue aussi en tant que fonction à valeurs dans $W_2^1(\mathbf{R})$. En effet,

$$\|U(t+\delta)\varphi - U(t)\varphi\|_1^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x+t+\delta)-\varphi(x+t)|^2\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi'(x+t+\delta)-\varphi'(x+t)|^2\,dx \to 0$$

lorsque $\delta \to 0$. Le théorème d'immersion de Sobolev nous donne

$$\psi(x) = f(A)\,\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t)\,\varphi(x+t)\,dt. \tag{4.2}$$

L'intégrale est comprise ici comme une intégrale ordinaire d'une fonction numérique dépendant d'un paramètre x. De la formule (4.2) il vient immédiatement que

$$\tilde{\psi}(p) = f(-p)\,\tilde{\varphi}(p). \tag{4.3}$$

Supposons maintenant que $\tilde{f} = \delta_\xi$, de sorte que $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\xi t}$,

$$f(A)\,\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-iA\xi}\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varphi(x+\xi) = \psi(x).$$

Alors $\tilde{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ip\xi}\tilde{\varphi}(p)$ et la formule (4.3) est valable dans ce cas aussi.

Supposons enfin que f est une fonction arbitraire de $\mathscr{B}_0(\mathbf{R})$. Il existe une suite $\{f_n\}$ de fonctions de $\mathscr{B}_0(\mathbf{R})$ telle que $f_n \to f$ et

$$[Ff_n(A)\varphi](p) = f_n(-p)[F\varphi](p). \tag{4.4}$$

On a $f_n(A)\varphi \to f(A)\varphi$ dans W_2^{-s},

$$Ff_n(A)\varphi \to Ff(A) \quad \text{dans } \tilde{W}_2^{-s}(\mathbf{R}), \quad f_n(-p) \to f(-p)$$

uniformément en vertu de l'inclusion $\mathscr{B}_0(\mathbf{R}) \subset C(\mathbf{R})$. Signalons le fait suivant. Supposons qu'une suite $\{g_n\}$ de fonctions continues sur $\mathbf{R}$ converge uniformément vers une fonction g et concomitamment vers une fonction $\bar{g}$ dans $W_2^{-s}(\mathbf{R})$. Alors $g = \bar{g}$. En effet, pour tout $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)\,\chi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\chi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(x)\,\chi(x)\,dx.$$

En passant à la limite lorsque $n \to \infty$ dans la formule (4.4) et en se servant de la remarque faite ci-dessus, on s'assure de la validité de la formule dans le cas général. Ce qui prouve le lemme.

Le lemme 4.3 peut encore être formulé de la manière suivante. Soit $\tilde{A} = FAF^{-1}$, de sorte que $\tilde{A}\,\tilde{\varphi}(p) = -p\,\tilde{\varphi}(p)$ pour tout $\tilde{\varphi} \in \tilde{C}_0^\infty(\mathbf{R})$, où $\tilde{C}_0^\infty(\mathbf{R})$

est l'espace des transformées de Fourier des fonctions $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$. L'opérateur $\tilde{A}$ est un générateur de degré nul de couple déterminant $(\tilde{W}_2^{-s}(\mathbf{R}), \tilde{W}_2^{-s}(\mathbf{R}))$. Pour tous $\varphi \in \tilde{C}_0^\infty(\mathbf{R})$ et $f \in \mathscr{B}_0(\mathbf{R})$, on a la formule

$$f(\tilde{A})\,\varphi(p) = f(-p)\,\varphi(p).$$

En outre $f(\tilde{A}) = F f(A) F^{-1}$.

Conservons les notations de la définition 4.1 et considérons une fonction $\tilde{h} \in \tilde{C}_0^\infty(\mathbf{R})$. Montrons que $f_2(\tilde{A})\tilde{h}$ appartient au domaine de définition de l'opérateur $\tilde{A}^{-2}$, c'est-à-dire que $f_2(\tilde{A})\tilde{h} = \tilde{A}^2 q$, où q est un élément de $\tilde{W}_2^{-s}(\mathbf{R})$. On a

$$f_2(\tilde{A})\tilde{h}(p) = f_2(-p)\tilde{h}(p) = p^2 \varphi(-p)\,\mathrm{sign}(-p)\tilde{h}(p).$$

Soit la fonctionnelle

$$g \to \int_{-\infty}^{\cdot} \varphi(-p)\,\mathrm{sign}(-p)\tilde{h}(p)\,g(p)\,dp \overset{\text{déf}}{=} \langle q, g\rangle, \qquad g \in C_0^\infty(\mathbf{R}). \quad (4.5)$$

On a la majoration suivante

$$|\langle q, g\rangle| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(-p)\tilde{h}(p)\,g(p)|\,dp \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(-p)\tilde{h}(p)|^2 (p^2+1)^{-s}\,dp \int_{-\infty}^{\infty} |g(p)|^2 (p^2+1)^s\,dp \right)^{1/2} =$$

$$= \|g\|_{\tilde{W}_2^s(\mathbf{R})} \|\varphi(\tilde{A})\tilde{h}\|_{\tilde{W}_2^{-s}(\mathbf{R})}.$$

De cette majoration il résulte que la fonctionnelle (4.5) définit un élément q de l'espace $\tilde{W}_2^{-s}(\mathbf{R})$. Montrons que $q \in D_{\tilde{A}^2}$. A cet effet, on remarquera tout d'abord que la fonctionnelle

$$g \to \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sign}(-p)\,\tilde{h}(p)\,g(p)\,dp \overset{\text{déf}}{=} \langle q_1, g\rangle, \qquad g \in C_0^\infty(\mathbf{R})$$

définit un élément g_1 de l'espace $\tilde{W}_2^{-s}(\mathbf{R})$. Supposons maintenant que $\{q_1^{(n)}\}$ est une suite de fonctions de $C_0^\infty(\mathbf{R})$ convergeant vers q_1 dans l'espace $\tilde{W}_2^{-s}(\mathbf{R})$, et que $q^{(n)}(p) = \varphi(-p)\,q_1^{(n)}(p)$. Alors $q^{(n)} \to q$ dans $W_2^{-s}(\mathbf{R})$. Supposons, par ailleurs, que $z_n(p) = p^2 q^{(n)}(p)$. La fonction $\varphi_1(p) = p^2 \varphi(p)$ étant élément de l'espace $\tilde{C}_0^\infty(\mathbf{R})$, la suite $\{z_n\}$ converge dans $\tilde{W}_2^{-s}(\mathbf{R}^n)$ vers la fonction $z(p) = p^2 \varphi(-p)\,\mathrm{sign}(-p)\,\tilde{h}(p)$. Donc

$$f_2(\tilde{A})\,\tilde{h}(p) = z(p) = \tilde{A}^2\,q(p),$$

ce que nous voulions. Nous avons en même temps établi la formule

$$\tilde{A}^{-2} f_2(\tilde{A})\,\tilde{h}(p) = q(p) = \varphi(-p)\,\mathrm{sign}(-p)\,\tilde{h}(p),$$

qui entraîne que

$$(\mathrm{sign}\,\tilde{A})\,\tilde{h}(p) = -(\mathrm{sign}\,p)\,\tilde{h}(p). \quad (4.6)$$

A noter que pour toute fonction $q \in \tilde{W}_2^{-s}(\mathbf{R})$ continue par morceaux décroissant plus vite que toute puissance de p, on a la formule de réciprocité

$$(F^{-1}q)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} q(p)\, dp. \tag{4.7}$$

En effet, pour tout $\psi \in S$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} q(p)\, dp \right] \psi(x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} q(p)\, dp \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\, e^{ipx}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} q(p)\, \tilde{\psi}(-p)\, dp,$$

ce qui exprime que la relation (4.7) est valable en vertu de la formule de Parseval. En particulier, de la formule (4.6) il résulte que pour tout $h \in C_0^\infty(\mathbf{R})$

$$Ih(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} \operatorname{sign}(-p)\, \tilde{h}(p)\, dp, \tag{4.8}$$

où $\tilde{h}$ est la transformée de Fourier de h. En portant dans (4.8) l'expression de $\tilde{h}$, on obtient

$$Ih(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign}(-p)\, dp \int_{-\infty}^{\infty} e^{ip(x-\xi)}\, h(\xi)\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \lim_{a \to +\infty} \int_{-a}^{a} \operatorname{sign}(-p)\, dp \int_{-\infty}^{\infty} e^{ip(x-\xi)}\, h(\xi)\, d\xi =$$

$$= \lim_{a \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)\, d\xi \int_{-a}^{a} e^{ip(x-\xi)} \operatorname{sign}(-p)\, dp =$$

$$= \lim_{a \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi) \left\{ \frac{2}{i(x-\xi)} - \frac{2\cos a(x-\xi)}{i(x-\xi)} \right\} d\xi =$$

$$= \frac{1}{i\pi} \lim_{a \to +\infty} \left\{ \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\xi)}{x-\xi}\, d\xi - \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\xi) \cos a(x-\xi)}{x-\xi}\, d\xi \right\},$$

où v.p. désigne la valeur principale.

Transformons la dernière intégrale

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\xi)\cos a(x-\xi)}{x-\xi}\, d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\xi)-h(x)}{x-\xi}\cos a(x-\xi)\, d\xi + h(x)\ \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos a(x-\xi)}{x-\xi}\, d\xi.$$

En intégrant par parties on obtient

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\xi)-h(x)}{x-\xi}\cos a(x-\xi)\, d\xi = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\xi}\left[\frac{h(\xi)-h(x)}{x-\xi}\right]\sin a(x-\xi)\, d\xi = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} h_1(\xi)\sin a(x-\xi)\, d\xi,$$

où la fonction $h_1(\xi)$ décroît à l'infini comme ξ^{-2}. Donc

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\xi)-h(x)}{x-\xi}\cos a(x-\xi)\, d\xi\right| \leqslant \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} |h_1(\xi)\, d\xi \to 0,$$

lorsque $a\to\infty$. Par ailleurs,

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos a(x-\xi)}{x-\xi}\, d\xi = -\,\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\eta}{\eta}\, d\eta = 0,$$

puisque l'intégrant est impair. Nous avons ainsi obtenu le résultat suivant.

Le hilbertien I est un opérateur intégral de noyau de type de Cauchy:

$$Ih(x) = \frac{1}{i\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\xi)}{x-\xi}\, d\xi,$$

la dernière intégrale étant comprise au sens de la valeur principale.

§ 5. Spectre d'un générateur

Soit A un générateur de degré N.

Définition. On appelle *résolvante* $\rho(A)$ de l'opérateur A le sous-ensemble minimal ouvert de $\mathbf{R}$ doué de la propriété suivante :

$$(\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}) \text{ et } \operatorname{supp}\varphi \subset \rho(A)) \Rightarrow (\varphi(\overline{A}) = 0).$$

L'ensemble $\sigma(A) = \mathbf{R} \setminus \rho(A)$ s'appelle *spectre de l'opérateur A*.

Exercice. Montrer que $\sigma(A) \neq \varnothing$.

Théorème 5.1. *Soit $\lambda \in \rho(A)$. Alors l'opérateur $(\overline{A} - \lambda)^{-1}$ existe, est défini sur l'espace B_{int} tout entier et vérifie la majoration*

$$\|(\overline{A} - \lambda)^{-1}\| \leqslant f(d),$$

où d est la distance du point λ au spectre de A, et f, une fonction (numérique) décroissante.

Démonstration. Soit φ une fonction indéfiniment dérivable et $\varphi(x) = (x-\lambda)^{-1}$ pour $|x-\lambda| \geqslant \varepsilon$, où $\varepsilon < d$. Montrons que

$$\varphi(\overline{A}) = (\overline{A} - \lambda)^{-1}, \qquad \|(\overline{A} - \lambda)^{-1}\| \leqslant f(d). \tag{5.1}$$

L'égalité

$$\varphi(x)(x-\lambda) = 1 - \chi(\lambda),$$

où $\operatorname{supp}\chi \subset [\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon] \subset \rho(A)$, entraîne

$$(\overline{A} - \lambda)\varphi(\overline{A}) = 1,$$

$$\varphi(\overline{A})(A - \lambda)h = h \quad \forall h \in D_A.$$

Les deux dernières égalités expriment que

$$\varphi(\overline{A}) = (\overline{A} - \lambda)^{-1}.$$

Estimons la norme de l'opérateur $(\overline{A} - \lambda)^{-1} = \varphi(\overline{A})$. On a

$$\|(\overline{A} - \lambda)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\varphi\|_{\mathscr{F}_N(\mathbf{R})} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\varphi\|_{W_2^{N+1}(\mathbf{R})}.$$

La norme de la fonction φ dans $W_2^{N+1}(\mathbf{R})$ dépend de ε et de la manière dont a été prolongée la fonction $(x-\lambda)^{-1}$ à l'intervalle $|x-\lambda| < \varepsilon$. Soit Φ_ε l'ensemble de tous les φ à ε fixe. Alors

$$\|(\overline{A} - \lambda)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \inf_{\substack{0 \leqslant \varepsilon < d \\ \varphi \in \Phi_\varepsilon}} \|\varphi\|_{W_2^{N+1}(\mathbf{R})} = f(d).$$

C.Q.F.D.

Théorème 5.2. *Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Si $(\overline{A} - \lambda)^{-1}$ est un homomorphisme, alors $\lambda \in \rho(A)$.*

Démonstration. Soit $0<\delta<\dfrac{1}{\|(\overline{A}-\lambda)^{-1}\|}$. Montrons que $\varphi(\overline{A})=0$ pour toute fonction $\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R})$ vérifiant la condition $\operatorname{supp}\varphi\subset]\lambda-\delta, \lambda+\delta[$. Supposons que φ est une telle fonction. Alors

$$\|\varphi(\overline{A})\|=\|(\overline{A}-\lambda)^{-k}(\overline{A}-\lambda)^k\varphi(\overline{A})\|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|(\overline{A}-\lambda)^{-1}\|^k\,\|\psi_k\|_{W_2^{N+1}(\mathbf{R})},$$

où $\psi_k(x)=(x-\lambda)^k\varphi(x)$.

Il est aisé d'établir l'estimation suivante:

$$\|\psi_k\|_{W_2^{N+1}(\mathbf{R})}=O(\delta^k).$$

Donc

$$\|\varphi(\overline{A})\|=O[(\delta\|(\overline{A}-\lambda)^{-1}\|)^k]\to 0 \quad \text{pour } k\to\infty.$$

Ce qui exprime que $\|\varphi(\overline{A})\|=0$. C.Q.F.D.

Des théorèmes 5.1 et 5.2 il résulte que le spectre du générateur est confondu avec le spectre (usuel) de sa fermeture dans B_{int}, autrement dit $(\lambda\in\rho(A))\Leftrightarrow[(\overline{A}-\lambda)^{-1}$ est un homomorphisme].

Théorème 5.3. *Pour toute fonction $f\in\mathscr{B}_N(\mathbf{R})$ telle que $\operatorname{supp}f\subset\rho(A)$, on a*

$$f(\overline{A})=0.$$

Démonstration. Supposons tout d'abord que le support de la fonction f est compact. Soient $\{f_n\}$ une suite de fonctions indéfiniment dérivables convergeant vers f dans $\mathscr{B}_N(\mathbf{R})$, g une fonction de $C_0^\infty(\mathbf{R})$ à support dans $\rho(A)$ égale à 1 sur $\operatorname{supp}f$. Alors $gf_n\in C_0^\infty(\mathbf{R})$, $\operatorname{supp}(gf_n)\subset\rho(A)$ et $gf_n\to f$ dans $\mathscr{B}_N(\mathbf{R})$. Comme $g(\overline{A})f_n(\overline{A})=0$, il vient que $f(\overline{A})=0$.

Dédouanons-nous de la condition de compacité de l'ensemble $\operatorname{supp}f$. Soit $\{\varphi_n\}$ une suite de fonctions de $C_0^\infty(\mathbf{R})$ telle que pour tout $h^*\subset B^*$ et pour tout $h\in B$, l'on ait la relation

$$\lim_{n\to\infty} h^*(\varphi_n(\overline{A})h)=h^*(h).$$

Posons $f_n(x)=f(x)\varphi_n(x)$. Alors $\operatorname{supp}f_n\subset\rho(A)$, si bien que $f_n(\overline{A})=0$. Pour tout $h^*\in B^*$ et $h\in B$, il vient

$$0=\lim_{n\to\infty}h^*(f_n(\overline{A})h)=\lim_{n\to\infty}h^*(\varphi_n(\overline{A})f(\overline{A})h)=h^*(f(\overline{A})h),$$

d'où $f(\overline{A})=0$.

Considérons la sous-algèbre $\mathscr{B}_N(\rho(A))$ de l'algèbre de Banach $\mathscr{B}_N(\mathbf{R})$, obtenue par fermeture de l'ensemble des fonctions de $\mathscr{B}_N(\mathbf{R})$ s'annulant au voisinage (ce voisinage varie d'une fonction à l'autre) de l'ensemble $\sigma(A)$. Il est évident que $\mathscr{B}_N(\rho(A))$ est un idéal fermé dans $\mathscr{B}_N(\mathbf{R})$. Désignons par $\mathscr{B}_N(\sigma(A))$ l'algèbre quotient $\mathscr{B}_N(\mathbf{R})/\mathscr{B}_N(\rho(A))$ munie de la norme usuelle

$$\|\{\varphi\}\|=\inf_{\varphi\in\{\varphi\}}\|\varphi\|_{\mathscr{B}_N(\mathbf{R})}.$$

Il est évident que le théorème 5.3 reste en vigueur si l'on remplace $\mathscr{B}_N(\mathbf{R})$ par $\mathscr{B}_N(\sigma(A))$. Ceci étant, la majoration de la norme de l'opérateur $\varphi(\overline{A})$ s'améliore et le noyau de l'homomorphisme $\mathscr{M}$ se rétrécit. Mais cette application n'est pas un monomorphisme (c'est-à-dire pas une injection) même lorsque B_{int} est de dimension finie et N le degré de l'opérateur A. C'est que des blocs de Jordan différents de la matrice A peuvent engendrer des groupes d'homomorphismes ayant des ordres de croissance différents.

Exemple. Soient λ_1 et λ_2 des réels distincts et

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 1\\ 0 & 0 & \lambda_2\end{pmatrix}.$$

Alors

$$e^{-iAt}=\begin{pmatrix}e^{-i\lambda_1 t} & 0 & 0\\ 0 & e^{-i\lambda_2 t} & -ite^{-i\lambda_2 t}\\ 0 & 0 & e^{-i\lambda_2 t}\end{pmatrix},$$

de sorte que A est un générateur du premier degré, mais pas de degré nul. Pour toute fonction $\varphi\in\mathscr{B}_1(\mathbf{R})$, on a

$$\varphi(A)=\begin{pmatrix}\varphi(\lambda_1) & 0 & 0\\ 0 & \varphi(\lambda_2) & \varphi'(\lambda_2)\\ 0 & 0 & \varphi(\lambda_2)\end{pmatrix}.$$

Le spectre $\sigma=\sigma(A)$ de l'opérateur A est composé de deux points : λ_1 et λ_2. Soit $\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R})$, $\lambda_2\notin\operatorname{supp}\varphi$, $\varphi(\lambda_1)=0$, $\varphi'(\lambda_1)\neq 0$. Alors $\varphi(A)=0$, mais $\|\varphi\|_{\mathscr{B}_1(\sigma)}>0$ (par $\|\varphi\|_{\mathscr{B}_1(\sigma)}$ on désigne comme toujours la classe d'équivalence à laquelle appartient la fonction φ).

Bien que l'homomorphisme $\mathscr{M}_\sigma\colon \mathscr{B}_N(\sigma(A))\to\operatorname{Hom}B_{\text{int}}$ ne soit pas un monomorphisme, nous obtenons une majoration assez bonne pour $\|\varphi(A)\|$.

Définition. On appelle *élément propre* de l'opérateur $\overline{A}$ en un point λ un vecteur $g\in D_{\overline{A}}$ tel que $(\overline{A}-\lambda)g=0$. On appelle *élément associé* de degré k de l'opérateur $\overline{A}$ en un point λ un vecteur $g\in D_{\overline{A}^k}$ tel que $(\overline{A}-\lambda)^k g=0$, mais $(\overline{A}-\lambda)^{k-1}g\neq 0$. Les éléments propres et associés de l'opérateur $\overline{A}$ seront appelés p.a.-*éléments* de A.

On dit que le spectre d'un opérateur A est *discret* s'il n'est composé que de points isolés et si le nombre de p.a.-éléments linéairement indépendants correspondant à chaque point de ce spectre est fini.

Exercice. Soit h le vecteur propre de l'opérateur $\overline{A}$ en λ. Montrer que $e^{-i\overline{A}t}h=e^{-i\lambda t}h$ pour $h\in D_{\overline{A}}$.

Lemme 5.1. *Soit λ un point isolé du spectre d'un générateur A de degré N. Si g est un* p.a.*-élément de l'opérateur $\overline{A}$ en λ, alors $(\overline{A}-\lambda)^{N+1}g=0$.*

Démonstration. Soit g un p.a.-élément de l'opérateur $\overline{A}$ en λ. Alors pour un certain k

$$(\overline{A}-\lambda)^k g=0. \tag{5.2}$$

Montrons que si $k>N+1$, alors de (5.2) il résulte que $(\overline{A}-\lambda)^{k-1}g=0$. Supposons que $k>N+1$. Soit $\{\chi_n\}$ une suite de fonctions indéfiniment dérivables telles que $\chi_n(\lambda)=1$ et que $\operatorname{supp}\chi_n\subset\left]\lambda-\frac{1}{n},\lambda+\frac{1}{n}\right[$, de sorte que le support de la fonction χ_n ne contient qu'un seul point du spectre de A pour n assez grand; supposons par ailleurs que

$$\lim_{n\to\infty}=\|\psi_n\|_{\mathscr{B}_N(\mathbf{R})}=0,$$

où $\psi_n(x)=(x-\lambda)^{k-1}\chi_n(x)$. Il est aisé de voir qu'une telle suite existe. On a

$$\|\chi_n(A)\,(\overline{A}-\lambda)^{k-1}g\|\to 0 \text{ pour } n\to\infty. \tag{5.3}$$

Par ailleurs, le vecteur

$$h=(\overline{A}-\lambda)^{k-1}g$$

est élément propre de l'opérateur $\overline{A}$, puisque

$$(\overline{A}-\lambda)h=(\overline{A}-\lambda)^k g=0.$$

Donc

$$\chi_n(\overline{A})h=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\chi}_n(t)\,e^{-i\overline{A}t}h\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\chi}_n(t)\,e^{-i\lambda t}h\,dt=\chi_n(\lambda)h=h,$$

c'est-à-dire que

$$\chi_n(\overline{A})\,(\overline{A}-\lambda)^{k-1}g=(\overline{A}-\lambda)^{k-1}g.$$

De (5.3) il résulte que $(\overline{A}-\lambda)^{k-1}g=0$; par récurrence on établit que $(\overline{A}-\lambda)^{N+1}g=0$.

Théorème 5.4. *Supposons que le spectre d'un générateur A est composé de points isolés λ_i, $i=1, 2,\ldots$ Alors l'ensemble de tous les* p.a.*-éléments de l'opérateur A est complet, c'est-à-dire que l'enveloppe linéaire de cet ensemble est dense dans B_{int}.*

Démonstration. Soit χ^i une fonction arbitraire de $C_0^\infty(\mathbf{R})$ dont le support ne contient qu'un seul point du spectre de A et telle que $\chi^i(x)=1$ dans un voisinage du point λ_i. Alors $(A-\lambda_i)^{N+1}\chi^i(\overline{A})=0$. En effet, supposons que pour i fixe, la suite $\{\chi_n^i\}$ est celle considérée dans le lemme 5.1 (pour $k=N+2$, $\lambda=\lambda_i$), et de plus $\chi_n^i(x)=1$ dans un voisinage (dépendant de n) du point λ_i. On a pour n assez grand

$$\chi_n^i(\overline{A})=\chi^i(\overline{A}),$$

et

$$\|(\overline{A}-\lambda_i)^{N+1}\chi_n^i(\overline{A})\|\to 0 \text{ pour } n\to\infty,$$

d'où l'égalité annoncée.

Au § 1 on a démontré que l'enveloppe linéaire de l'ensemble des vecteurs de la forme $\varphi(\overline{A})h$, $\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R})$, $h\in B_{\text{int}}$, est dense dans B_{int}. Donc pour prouver le théorème, il suffit de s'assurer que pour tous $h\in B_{\text{int}}$ et $\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R})$, le vecteur $\varphi(A)h$ se représente par une somme finie $\sum_i g_i$, où g_i satisfait l'égalité $(\overline{A}-\lambda_i)^{N+1}g_i=0$. Soit $\{\Omega_i\}$ un recouvrement ouvert du support de la fonction φ, et en outre $\lambda_j\notin\Omega_i$ pour $i\neq j$, $\lambda_i\in\Omega_i$. Soit d'autre part $\{\chi^i\}$ une C^∞-partition de l'unité subordonnée au recouvrement*) $\{\Omega_i\}$. Alors $\varphi(\overline{A}h)=\Sigma\varphi(\overline{A})\chi^i(\overline{A})h$. Posons $g_i=\varphi(\overline{A}\chi^i(\overline{A})h$. On a

$$(A-\lambda_i)^{N+1}g_i=\varphi(\overline{A})(-\lambda_i)^{N+1}\chi^i(\overline{A})h=0.$$

Ce qui prouve le théorème.

De la démonstration du théorème 5.4 il résulte aussi qu'à tout point isolé λ_i du spectre de A est associé un vecteur propre non nul de $\overline{A}$ (en d'autres termes, λ_i est valeur propre de $\overline{A}$). En effet, il suffit de s'assurer qu'il existe un p.a.-élément non nul de $\overline{A}$ au point λ_i. Soit $\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R})$ une fonction dont le support contient exactement un point λ_i du spectre de A et telle que $\varphi(\overline{A})\neq 0$ (cette fonction existe en vertu de la définition du générateur). On peut exhiber alors un vecteur $h\in B_{\text{int}}$ tel que $g\overset{\text{déf}}{=}\varphi(\overline{A})h\neq 0$. Si χ^i est la fonction envisagée dans la démonstration du théorème 5.4, alors $\chi^i(\overline{A})\varphi(\overline{A})=\varphi(\overline{A})$, de sorte que $g=\chi^i(\overline{A})\varphi(\overline{A})h$, d'où il s'ensuit que $(\overline{A}-\lambda_i)^{N+1}g=0$.

Si λ est valeur propre de l'opérateur $\overline{A}$, alors $\|f(\overline{A})\|\geqslant|f(\lambda)|$ pour tout $f\in\mathscr{B}_N(\mathbf{R})$. En effet, si g est un élément propre non nul de $\overline{A}$ au point λ, alors $f(\overline{A})g=f(\lambda)g$. Donc, si le spectre de l'opérateur est constitué de points isolés, on obtient la minoration suivante pour $\|f(\overline{A})\|$:

$$\|f(\overline{A})\|\geqslant\sup_{\lambda\in\sigma(A)}|f(\lambda)|. \tag{5.4}$$

§ 6. Quelques propriétés du générateur

Précisons maintenant quelques propriétés du générateur.

Lemme 6.1. *Soit A un générateur dans un espace de Banach B, tel que $\|e^{-iAt}\|\leqslant c(1+|t|)^l$. Alors pour* $\operatorname{Im}\lambda\neq 0$ *et* $m=1, 2, \ldots$ *on a la majoration*

*) Ce qui signifie que $\chi^i\in C^\infty$, $\chi^i=0$ à l'extérieur de Ω_i, $0\leqslant\chi^i\leqslant 1$ et $\sum_i\chi^i\equiv 1$ sur $\operatorname{supp}\varphi$. Dans les cours d'Analyse on démontre que cet ensemble de fonctions existe.

$$\|(\lambda-A)^{-m}\| \leqslant c \sum_{k=0}^{l} C_l^k \, C_{m+k-1}^k \, \frac{k!}{|\operatorname{Im}\lambda|^{m+k}} \tag{6.1}$$

Démonstration. Posons $r_\lambda(x)=1/(\lambda-x)$. Le théorème 1.1 du § 1 nous dit que

$$(\lambda-A)^{-m}=r_\lambda^m(A)=\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int \underbrace{[\tilde{r}_\lambda * \ldots * \tilde{r}_\lambda]}_{m}(t)\, e^{-iAt}\,dt, \tag{6.2}$$

où $*$ désigne le produit de convolution des fonctions

$$(f*g)(t)=\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau,$$

où $\tilde{r}_\lambda$ est la transformée réciproque de Fourier de la fonction r_λ.

Il est aisé de voir que

$$\tilde{r}_\lambda(\tau)=-is_\lambda\,\theta(s_\lambda\tau)\,e^{i\lambda\tau}\sqrt{2\pi},$$

où

$$\theta(t)=\begin{cases}1 & \text{pour } t>0,\\ 0 & \text{pour } t<0,\end{cases} \qquad s_\lambda=\begin{cases}1 & \text{pour } \operatorname{Im}\lambda>0,\\ -1 & \text{pour } \operatorname{Im}\lambda<0.\end{cases}$$

Par un calcul immédiat on en déduit que

$$[\tilde{r}_\lambda * \ldots * \tilde{r}_\lambda](t)=(2\pi)^{1/2}(-i)^m\, s_\lambda\,\theta(s_\lambda t)\,e^{i\lambda t}\,\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}.$$

En portant ce résultat dans (6.2), on obtient la majoration

$$\|(\lambda-A)^{-m}\| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \theta(s_\lambda t)\,\frac{|t|^{m-1}}{(m-1)!}\,e^{-(\operatorname{Im}\lambda)t}\,\|e^{-iAt}\|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c}{(m-1)!}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\operatorname{Im}\lambda|t}\,t^{m-1}\,(1+t)^l\,dt=\sum_{k=0}^{l}\frac{cC_l^k}{(m-1)!}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\operatorname{Im}\lambda|t}\,t^{m+k-1}\,dt=$$

$$=\sum_{k=0}^{l}\frac{c}{(m-1)!}\,C_l^k\,\frac{(m+k-1)!}{|\operatorname{Im}\lambda|^{m+k}}.$$

Ce qui prouve le lemme.

Désignons l'opérateur $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-it)^m T^m}{m!}$ par e^{-iTt}, où T est un homo-

morphisme quelconque d'un espace de Banach B. Il est immédiat de voir que cette série converge pour la norme et définit un groupe à un paramètre d'homomorphismes de B:

$$e^{-iTt_1}\, e^{-iTt_2} = e^{-iT(t_1+t_2)}$$

quels que soient les réels t_1 et t_2. On dira que l'opérateur T *engendre* le groupe $\{e^{-iTt}\}$. L'opérateur T est générateur si et seulement si $\|e^{-iTt}\|$ croît pas plus vite qu'une certaine puissance de t lorsque $t \to \infty$.

On vérifie immédiatement que

$$e^{-i(T_1+T_2)t} = e^{-iT_1 t}\, e^{-iT_2 t},$$

où T_1 et T_2 sont des homomorphismes commutables quelconques de B.

Lemme 6.2. *Plaçons-nous dans les conditions du lemme* 6.1 *et supposons que* $c \geqslant 1$. *Alors pour tous réels* ε *et* t *tels que* $\varepsilon t \geqslant 0$, *on a la majoration*

$$\left\| e^{it(1+i\varepsilon A)^{-1} A} \right\| \leqslant c(1 + R_l(\varepsilon)|t|)^l, \tag{6.3}$$

où

$$\lim_{\varepsilon \to 0} R_l(\varepsilon) = 1 + l.$$

Démonstration. Du lemme 6.1, on déduit la majoration suivante pour $(1+i\varepsilon A)^{-m}$:

$$\left\|(1+i\varepsilon A)^{-m}\right\| \leqslant c \sum_{k=0}^{l} C_l^k \frac{(m+k-1)!}{(m-1)!} |\varepsilon|^k, \qquad m = 1, 2, \ldots$$

Posons

$$I_\varepsilon = (1+i\varepsilon A)^{-1}.$$

Pour $u \in D_A$, on a $u - I_\varepsilon u = i\varepsilon I_\varepsilon A u$. Donc l'opérateur $I_\varepsilon A$ est borné et sa fermeture engendre un groupe qui est défini par la série suivante:

$$e^{-itI_\varepsilon A} = e^{-\frac{t}{\varepsilon}} e^{\frac{t}{\varepsilon} I_\varepsilon} = e^{-\frac{t}{\varepsilon}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^m \frac{1}{m!} I_\varepsilon^m.$$

La majoration de I_ε^m nous donne

$$\left\| e^{-itI_\varepsilon A} \right\| \leqslant e^{-\frac{t}{\varepsilon}} + e^{-\frac{t}{\varepsilon}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^m c \sum_{k=0}^{l} C_l^k \frac{(m+k-1)!}{(m-1)!} |\varepsilon|^k =$$

$$= \left[e^{-\frac{t}{\varepsilon}} + c e^{-\frac{t}{\varepsilon}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^m \right] +$$

$$+\left[ce^{-\frac{t}{\varepsilon}}\sum_{k=1}^{l}\sum_{m=1}^{k-1}C_l^k|\varepsilon|^{k-m}|t|^m\frac{(k+m-1)!}{(m-1)!\,m!}\right]+$$

$$+\left[ce^{-\frac{t}{\varepsilon}}\sum_{k=1}^{l}C_l^k|t|^k\sum_{m=k}^{\infty}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^{m-k}\frac{(m+k-1)!}{(m-1)!\,m!}\right].$$

Comme $c\geqslant 1$ et que de toute évidence (pour $k\geqslant 1$)

$$\frac{(n+2k-1)!}{(n+k)!\,(n+k-1)!}\leqslant\frac{1}{n!}(1+k)^{k-1},$$

on peut prolonger cette majoration comme suit:

$$\left\|e^{-it\overline{I_\varepsilon A}}\right\|\leqslant ce^{-\frac{t}{\varepsilon}}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^m\right)+$$

$$+c\sum_{m=1}^{l-1}|t|^m\left(\sum_{k=m+1}^{l}C_l^k|\varepsilon|^{k-m}\frac{(k+m-1)!}{(m-1)!\,m!}\right)e^{-\frac{t}{\varepsilon}}+$$

$$+ce^{-\frac{t}{\varepsilon}}\sum_{m=1}^{l}C_l^m|t|^m(1+m)^{m-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^n\frac{1}{n!}\right)=$$

$$=c\left[1+\sum_{m=1}^{l-1}|t|^m\left(\sum_{k=m+1}^{l}C_l^k|\varepsilon|^{k-m}\frac{(k+m-1)!}{(m-1)!\,m!}+C_l^m(1+m)^{m-1}\right)+\right.$$

$$\left.+|t|^l(1+l)^{l-1}\right]\leqslant c(1+R_l(\varepsilon)|t|)^l,$$

où $R_l(\varepsilon)$ est une fonction strictement positive et de plus le nombre $R_l(0)$ est soumis à la seule condition suivante: $[R_l(0)]^m\geqslant(m+1)^{m-1}$, $m=0,\ldots,l$. Pour notre part, il nous suffit de prendre $R_l(0)=1+l$. Ceci prouve le lemme.

Ce lemme nous permet d'en prouver un autre qui dit que les groupes e^{-iAt} peuvent être approchés par une famille de groupes $e^{-i(1+i\varepsilon A)^{-1}At}$ engendrés par des générateurs bornés.

Lemme 6.3. *Soit A un générateur dans un espace de Banach B. Alors pour ε, t ($\varepsilon t\geqslant 0$) réels, les vecteurs $e^{-it(1+\varepsilon iA)^{-1}A}$ convergent, quels que soient*

$u \in B$, lorsque $\varepsilon \to 0$, vers e^{-iAt} pour la norme de l'espace B uniformément en t pris dans un quelconque ensemble compact.

Démonstration. Soit de nouveau $I_\varepsilon = (1+i\varepsilon A)^{-1}$. Evaluons la différence

$$e^{-i\overline{I_\varepsilon A}t} - e^{-i\overline{I_{\varepsilon'} A}t} = -\int_0^t \frac{d}{d\tau}\left[e^{-i\overline{I_\varepsilon A}(t-\tau)} e^{-i\overline{I_{\varepsilon'} A}\tau}\right] d\tau =$$

$$= -i\int_0^t e^{-i\overline{I_\varepsilon A}(t-\tau)} (\overline{I_\varepsilon A} - \overline{I_{\varepsilon'} A})\, e^{-i\overline{I_{\varepsilon'} A}\tau} d\tau. \qquad (6.4)$$

Les opérateurs $I_\varepsilon A$ et $e^{-iI_{\varepsilon'} A\tau}$ étant commutables, grâce au lemme 6.2 on obtient la majoration suivante ($u \in D_A$):

$$\left\| e^{-iI_\varepsilon At} u - e^{-iI_{\varepsilon'} At} u \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \left(c\int_0^t (1+|t-\tau|)^l (1+|\tau|)^l d\tau \right) \left\| (I_\varepsilon - I_{\varepsilon'})\, Au \right\|, \qquad (6.5)$$

$$c = \text{const}$$

sous réserve que A soit de degré l.

Montrons que $I_\varepsilon u$ converge vers u lorsque $\varepsilon \to 0$ pour tout $u \in B$. En effet, pour $u \in D_A$ on a

$$\left\| u - I_\varepsilon u \right\| = \left\| i\varepsilon I_\varepsilon Au \right\| \leqslant \varepsilon c_1 \left\| Au \right\|,$$

où c_1 est la constante de la majoration de $\left\| I_\varepsilon \right\|$. Ainsi, $I_\varepsilon u \to u$ lorsque $u \in D_A$ et $\left\| I_\varepsilon \right\|$ est borné lorsque $\varepsilon \to 0$. Donc le théorème de Banach-Steinhaus nous dit que $I_\varepsilon u \to u$ quel que soit $u \in B$.

Par ailleurs, de (6.5) il résulte que, lorsque $\varepsilon \to 0$ ($\varepsilon t \geqslant 0$) $e^{-I_\varepsilon At} u$ converge, quel que soit $u \in B$ (ne dépendant pas de t), vers un vecteur $v = T(t)u$, où $T(t)$ est un homomorphisme, la convergence étant uniforme en $t \in K$, où K est un ensemble compact. En passant à la limite pour $\varepsilon \to 0$ dans (6.3), on obtient

$$\left\| T(t) \right\| \leqslant c(1+(1+l)|t|)^l \leqslant \tilde{c}(1+|t|)^l, \qquad \tilde{c} = \text{const}. \qquad (6.6)$$

D'autre part, par analogie à (6.4) il vient

$$e^{-i\overline{I_\varepsilon A}t} u = u - i\int_0^t e^{-i\overline{I_\varepsilon A}\tau} I_\varepsilon Au\, d\tau, \qquad u \in D_A. \qquad (6.7)$$

Pour τ fixe, l'intégrant converge vers $T(\tau)\, Au$; en outre, il est borné (cf. (6.3)):

$$\left\| e^{-i\overline{I_\varepsilon A}\tau} I_\varepsilon Au \right\| \leqslant c(1+R_l(\varepsilon)|\tau|)^l c_1 \left\| Au \right\| \leqslant c_2 (1+|\tau|)^l \left\| Au \right\|.$$

En passant à la limite lorsque $\varepsilon \to 0$ ($\varepsilon t \geqslant 0$) dans (6.7), on obtient

$$T(t)u = u - i\int_0^t T(\tau)\, Au\, d\tau,$$

donc

$$i\frac{d}{dt}T(t)u=T(t)Au, \qquad T(t)u\Big|_{t=0}=u, \qquad u\in D_A. \tag{6.8}$$

Le groupe e^{-iAt} satisfait ce problème de Cauchy et la majoration (6.6).

Montrons que le problème (6.8) admet une seule solution vérifiant la condition (6.6). Soit D un ensemble dont l'intersection avec D_A est dense dans B. Supposons qu'une famille d'homomorphismes $\tilde{T}(t)$ vérifie la majoration (6.6) et les équations (6.8) pour $u\in D$. Alors pour $u\in D\cap D_A$, on a

$$e^{-i\overline{I_\varepsilon A}t}u-\tilde{T}(t)u=\int_0^t\frac{d}{d\tau}\left(e^{-i\overline{I_\varepsilon A}\tau}\tilde{T}(t-\tau)u\right)d\tau=$$

$$=-i\int_0^t e^{-i\overline{I_\varepsilon A}\tau}(\overline{I_\varepsilon A})\tilde{T}(t-\tau)u\,d\tau+i\int_0^t e^{-i\overline{I_\varepsilon A}\tau}\tilde{T}(t-\tau)Au\,d\tau.$$

De (6.8) il résulte que pour $u\in D$, on a l'égalité suivante: $\tilde{T}(t)Au=A\tilde{T}(t)u$; donc $\tilde{T}(t-\tau)$ commute à $\overline{I_\varepsilon A}$. Grâce aux majorations (6.3), (6.6) on obtient pour $\varepsilon t\geqslant 0$:

$$\|e^{-i\overline{I_\varepsilon A}t}u-\tilde{T}(t)u\|\leqslant c_3\left(\int_0^t(1+|t-\tau|)^l(1+|\tau|)^l\,d\tau\right)\|(1-I_\varepsilon)Au\|.$$

Or, on a démontré plus haut que $I_\varepsilon v\to v$ pour tout $v\in B$ lorsque $\varepsilon\to 0$; donc, $T(t)u=\tilde{T}(t)u$ sur l'ensemble dense $D\cap D_A$. Ce qui exprime que $T(t)\equiv\equiv\tilde{T}(t)$. On a ainsi prouvé l'unicité et partant que $T(t)=e^{-iAt}$.

Supposons maintenant qu'on n'ait pas spécifié *a priori* que A est un générateur.

Lemme 6.4. *Soit A un opérateur fermé dont le domaine de définition D_A est dense dans un espace de Banach B. Supposons que pour tous les $\mu\neq 0$ réels les opérateurs $(i\mu-A)^{-1}$ sont des homomorphismes et vérifient l'inégalité*

$$\|(i\mu-A)^{-m}\|\leqslant c\sum_{k=0}^{l}C_l^k\frac{(m+k-1)!}{(m-1)!}\frac{1}{|\mu|^{k+m}}, \qquad m=1,2,\ldots, \tag{6.9}$$

où $l\geqslant 0$ est un entier quelconque.

Alors A est un générateur de degré l dans l'espace B et de plus

$$\|e^{-iAt}\|\leqslant c(1+(1+l)|t|)^l. \tag{6.10}$$

Démonstration. La démonstration du lemme 6.2 repose uniquement sur la majoration (6.1); donc, grâce à (6.9) on obtient la majoration (6.3) exactement comme dans le lemme 6.2. En reproduisant ensuite la démonstration du lemme 6.3, on construit une famille $T(t)$ satisfaisant la majoration (6.6). L'unicité de la solution du problème (6.8) vérifiant la condition (6.6) se prouve comme dans le lemme 6.3.

On peut ensuite choisir dans B un ensemble dense $D \subset D_A$ tel que $A(D) \subset D$, $A(D) = \{y | y = Ax,\ x \in D\}$. En effet, posons

$$D = \bigcup_{u \in D_A} \bigcup_{f \in \tilde{C}_0^\infty(\mathbf{R})} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, T(t)\, u\, dt \right\}. \tag{6.11}$$

L'équation (6.8) admettant une solution dans le domaine de définition de l'opérateur A, il vient que

$$T(t)(D_A) \subset D_A \quad \text{et} \quad i\frac{d}{dt} T(t)u = T(t)Au = AT(t)u \tag{6.12}$$

pour $u \in D_A$. De là on déduit sans peine l'inclusion $A(D) \subset D$. En effet, supposons que

$$v = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, T(t)\, u\, dt,$$

où f est la transformée réciproque de Fourier d'une fonction de $C_0^\infty(\mathbf{R})$ et u un vecteur de D_A. Alors

$$Av = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) AT(t) u\, dt = i \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{d}{dt} T(t) u\, dt = -i \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\, T(t)\, u\, dt \in D,$$

puisque la transformée de Fourier de la fonction $-if'$ appartient à $C_0^\infty(\mathbf{R})$.

Par ailleurs, pour $u \in D_A$, $h^* \in B^*$, on a (cf. (6.6))

$$\left| h^* \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, T(t)\, u\, dt \right) \right| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, |h^*(T(t)u)| dt \leqslant$$

$$\leqslant \tilde{c} \|h^*\|\, \|u\| \int_{\infty}^{\infty} |f(t)| (1+|t|)^l\, dt, \quad f \in \tilde{C}_0^\infty(\mathbf{R}).$$

A l'aide de cette inégalité on démontre exactement comme dans le lemme 1.13 qu'il existe une suite $\theta_n(t) \in \tilde{C}_0^\infty(\mathbf{R})$ telle que pour tous les $h^* \in B^*$ et $u \in D_A$, on a

$$h^* \left(\int_{-\infty}^{\infty} \theta_n(t)\, T(t)\, u\, dt \right) \to h^*(u) \text{ pour } n \to \infty.$$

De là on déduit comme dans le corollaire du lemme 1.13 que l'ensemble D est dense dans B. Ainsi, l'opérateur A admet une restriction A_0 à une variété linéaire D dense dans B et invariante par A. De (6.11) il résulte que D est invariant par $T(t)$. Donc, A_0 est un générateur de degré l. L'opérateur $(\bar{A}_0 + i)^{-1}$ est confondu avec $(A+i)^{-1}$ sur le domaine de valeurs de l'opérateur $A_0 + i$, domaine qui est dense dans B. En outre, étant des homomorphismes, $(\bar{A}_0 + i)^{-1}$ et $(A+i)^{-1}$ sont nécessairement confondus, d'où $A = \bar{A}_0$, ce qui prouve le lemme.

Remarque. Il est immédiat de voir que le lemme 6.4 est valable si l'on exige que la majoration (6.9) ait lieu uniquement pour $|\mu| \geqslant \mu_0$, où $\mu_0 > 0$ est quelconque.

Nous avons ainsi obtenu le critère suivant.

Théorème 6.1. *Soit A un opérateur fermé dont le domaine de définition est dense dans un espace de Banach B. Une condition nécessaire et suffisante pour que l'opérateur A soit générateur de degré l dans B est que pour tous les μ réels, $|\mu| \geqslant \mu_0 > 0$, les opérateurs $(i\mu - A)^{-1}$ soient des homomorphismes et vérifient la majoration* (6.9) *pour $m = 1, 2, \ldots$*

Considérons maintenant le cas particulier d'un opérateur hermitien.

Lemme 6.5. *Soit A un opérateur hermitien dans un espace hilbertien H. Si $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ alors $\lambda \in \rho(A)$ et*

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{|\operatorname{Im}\lambda|}. \tag{6.13}$$

Démonstration. Soit $u \in D_A$. Alors $(Au, u) = (u, Au) = \overline{(Au, u)}$ est un nombre réel. Donc

$$\operatorname{Im}((\lambda - A)u, u) = \|u\|^2 \operatorname{Im}\lambda$$

et

$$|\operatorname{Im}\lambda| \, \|u\|^2 \leqslant |((\lambda - A)u, u)| \leqslant \|(\lambda - A)u\| \, \|u\|,$$

c'est-à-dire que

$$\|(\lambda - A)u\| \geqslant |\operatorname{Im}\lambda| \, \|u\|, \quad u \in D_A. \tag{6.14}$$

On en déduit que pour $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$, l'opérateur $\lambda - A$ admet un réciproque $(\lambda - A)^{-1}$ défini sur son domaine des valeurs. Le domaine des valeurs de l'opérateur $\lambda - A$ est dense dans H, puisque l'opérateur $(\lambda - A)^* = \lambda - A$ est inversible. Ainsi, l'opérateur $(\lambda - A)^{-1}$ est défini sur un ensemble dense et en vertu de (6.14) est borné:

$$\|v\| \geqslant |\operatorname{Im}\lambda| \, \|(\lambda - A)^{-1} v\|, \quad v \in (\lambda - A)(D_A).$$

Or, tout opérateur borné défini sur un ensemble partout dense se prolonge en un homomorphisme. Donc $\lambda \in \rho(A)$ et l'on a la majoration (6.13).

Corollaire. *Un opérateur hermitien A dans un espace hilbertien est un générateur de degré* 0, *et en outre le groupe $\{e^{-iAt}\}$ est un groupe d'opérateurs unitaires.*

Démonstration. De la majoration (6.13), il résulte que les conditions du lemme 6.4 sont remplies pour $l = 0$, c'est-à-dire que A est un générateur de degré 0.

La majoration (6.10) nous donne: $\|e^{-iAt}\| \leqslant 1$, c'est-à-dire que $\|e^{-iAt}u\| \leqslant u$ pour tous les $u \in B$, $t \in \mathbf{R}$. Par ailleurs, $\|u\| = \|e^{iAt} \times \times e^{-iAt}u\| \leqslant \|e^{-iAt}u\|$. Ce qui exprime que $\|e^{-iAt}u\| = \|u\|$ pour tous les $u \in B$, $t \in \mathbf{R}$, autrement dit, tous les opérateurs e^{-iAt} sont isométriques (préservent la norme).

Leurs domaines de définition sont confondus avec B. *Idem* pour leurs domaines des valeurs, puisque $\{e^{-iAt}\}$ est un groupe. Donc, les opérateurs e^{-iAt} sont unitaires. Ce qui prouve le corollaire.

Etudions maintenant la stabilité des propriétés d'un générateur A_n lorsqu'on passe à la limite sur le paramètre n qui, pour simplifier, sera supposé être discret (prenant des valeurs entières). Supposons que la suite $\{A_n\}$ est composée de générateurs et qu'elle converge simplement vers un opérateur A. A la question de savoir quand cet opérateur sera générateur répond le lemme suivant.

Lemme 6.6. *Supposons que* $\|e^{-iA_nt}\| \leqslant c(1+|t|)^l$, *où* A_n *sont des générateurs fermés dans un espace de Banach* B. *Supposons d'autre part que la suite* $\{A_n\}$ *converge simplement vers un opérateur* A *dans un ensemble* $D=D_A$ *dense dans* B, *l'opérateur* A *admettant une fermeture. Supposons enfin que pour des nombres* (λ_1, λ_2) *satisfaisant la condition* $(\operatorname{Im}\lambda_1)(\operatorname{Im}\lambda_2)<0$, *les domaines des valeurs des opérateurs* $\lambda_1 - A$ *et* $\lambda_2 - A$ *sont denses dans* B. *Alors*:

1) *le spectre de l'opérateur* $\overline{A}$ *est contenu dans* $\mathbf{R}$ *et pour* $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ *la suite* $\{(\lambda - A_n)^{-1}\}$ *converge simplement vers* $(\lambda - \overline{A})^{-1}$;

2) *l'opérateur* $\overline{A}$ *est un générateur de degré* l *dans* B.

Démonstration. Démontrons 1). D'après le lemme 6.1

$$\|(\lambda - A_n)^{-1}\| \leqslant c_\lambda \text{ si } \operatorname{Im}\lambda \neq 0,$$

où

$$c_\lambda = c \sum_{k=0}^{l} \frac{l!}{(l-k)!} \frac{1}{|\operatorname{Im}\lambda|^k}.$$

On a la proposition générale suivante: si une suite d'opérateurs $\{F_n\}$ converge simplement vers un opérateur F sur un ensemble $D=D_F$ partout dense, F_n^{-1} étant des homomorphismes, $\|F_n^{-1}\| \leqslant c$ et le domaine des valeurs de F étant partout dense, alors l'opérateur F admet un réciproque $\|F^{-1}\| \leqslant c$ et la suite $\{F_n^{-1}\}$ converge simplement vers $\overline{F^{-1}}$.

En effet, pour $u \in D$

$$\|u\| = \|F_n^{-1} F_n u\| \leqslant c\|F_n u\| = c\|Fu\|.$$

Donc si $Fu=0$, alors $u=0$, autrement dit F est inversible. L'opérateur F^{-1} est défini sur un ensemble partout dense. Par ailleurs, pour $v \in D_{F^{-1}}$, on a $F^{-1}v - F^{-1}v = F_n^{-1}(F-F_n)F^{-1}v$. Donc $F_n^{-1}v \to F^{-1}v$. Le théorème de Banach-Steinhaus nous dit que la suite $\{F_n^{-1}\}$ converge simplement vers $\overline{F^{-1}}$. C.Q.F.D.

Dans notre cas: $(\lambda_1 - A_n) \to (\lambda_1 - A)$ simplement sur D et $\|(\lambda_1 - A_n)^{-1}\| \leqslant c_{\lambda_1}$. Il existe donc un opérateur $(\lambda_1 - A)^{-1}$ satisfaisant la condition $\|(\lambda_1 - A)^{-1}\| \leqslant c_{\lambda_1}$ et la suite $\{(\lambda_1 - A_n)^{-1}\}$ converge simplement

vers $(\overline{\lambda_1 - A})^{-1}$. L'opérateur $(\lambda_2 - A)^{-1}$ est justiciable du même raisonnement.

Considérons le disque $S(\lambda) = \{\mu \in \mathbf{C};\ |\mu - \lambda| < c_\lambda^{-1}\}$. Posons $R_n(\lambda) = (\lambda - A_n)^{-1}$, $R(\lambda_1) = (\overline{\lambda_1 - A})^{-1}$. Pour $\lambda \in S(\lambda_1)$, on a

$$R_n(\lambda) = R_n(\lambda_1)(1 - (\lambda_1 - \lambda) R_n(\lambda_1))^{-1}, \tag{6.15}$$

où l'opérateur réciproque du second membre est défini par une série convergeant pour la norme des opérateurs:

$$(1 - (\lambda_1 - \lambda) R_n(\lambda_1))^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_1 - \lambda)^k [R_n(\lambda_1)]^k,$$

$$\|(1 - (\lambda_1 - \lambda) R_n(\lambda_1))^{-1}\| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |(\lambda_1 - \lambda)|^k \|R_n(\lambda_1)\|^k \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_1 - \lambda|^k c_{\lambda_1}^k < \infty.$$

Signalons maintenant que le domaine des valeurs de l'opérateur $1 - (\lambda_1 - \lambda) R(\lambda_1)$ est l'espace B tout entier. En effet, pour tout $f \in B$, le vecteur

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_1 - \lambda)^k [R(\lambda_1)]^k f$$

est solution de l'équation

$$[1 - (\lambda_1 - \lambda) R(\lambda_1)] x = f.$$

Comme $R_n(\lambda_1) \to R(\lambda_1)$ simplement, il résulte de la majoration de $\|(1 - (\lambda_1 - \lambda) R_n(\lambda_1))^{-1}\|$ et de la proposition générale prouvée ci-dessus que pour $\lambda \in S(\lambda_1)$ il existe un homomorphisme $(1 - (\lambda_1 - \lambda) R(\lambda_1))^{-1}$ et une suite $\{(1 - (\lambda_1 - \lambda) R_n(\lambda_1))^{-1}\}$ convergeant simplement vers lui. Alors de (6.15) il résulte que pour $\lambda \in S(\lambda_1)$ la suite $\{R_n(\lambda)\}$ converge simplement vers l'opérateur $R'(\lambda)$

$$R'(\lambda) \stackrel{\text{déf}}{=} R(\lambda_1)(1 - (\lambda_1 - \lambda) R(\lambda_1))^{-1}.$$

Il est évident que

$$R'(\lambda) - R(\lambda_1) = (\lambda_1 - \lambda) R(\lambda_1) R'(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) R'(\lambda) R(\lambda_1). \tag{6.16}$$

D'autre part, pour $\lambda, \mu \in S(\lambda_1)$, on obtient

$$R'(\lambda) - R(\lambda_1) = (\lambda_1 - \mu) R(\lambda_1) R'(\lambda) + (\mu - \lambda) R(\lambda_1) R'(\lambda);$$

$$R'(\lambda) = R(\lambda_1)(1 - (\lambda_1 - \mu) R(\lambda_1))^{-1} +$$

$$+ (\mu - \lambda) R(\lambda_1)(1 - (\lambda_1 - \mu) R(\lambda_1))^{-1} R'(\lambda) =$$

$$= R'(\mu) + (\mu - \lambda) R'(\mu) R'(\lambda) = R'(\mu)[1 + (\mu - \lambda) R'(\lambda)].$$

De cette inégalité il résulte que le domaine des valeurs de l'opérateur $R'(\lambda)$ ne dépend pas de $\lambda \in S(\lambda_1)$, et notamment

$$R_{R(\lambda_1)} \stackrel{\text{déf}}{=} D' \supset D.$$

De la même égalité on déduit que tous les opérateurs $R'(\lambda)$ sont inversibles si $[R'(\mu)]^{-1}$ existe au moins pour une valeur $\mu \in S(\lambda_1)$. Montrons que l'opérateur $R(\lambda_1)$ est inversible. Soient u un vecteur arbitraire de B, $u_n \to u$, $u_n \in D_{(\lambda_1 - A)^{-1}}$. Alors $u_n = (\lambda_1 - \overline{A}) R(\lambda_1) u_n \to (\lambda_1 - \overline{A}) R(\lambda_1) u$, de sorte que

$$(\lambda_1 - \overline{A}) R(\lambda_1) = 1.$$

Supposons maintenant que u est un vecteur quelconque de D et que $\{u_n\}$ est une suite telle que $u_n \to u$, $Au_n \to \overline{A}u$. Alors $u_n = R(\lambda_1)(\lambda - A) u_n \to$ $\to R(\lambda_1)(\lambda - \overline{A}) u$, de sorte que

$$R(\lambda_1)(\lambda - \overline{A}) = 1_{D_{\overline{A}}}.$$

Donc $R(\lambda_1) = (\lambda - \overline{A})^{-1}$ et tous les $R'(\lambda)$ sont inversibles pour $\lambda \in S(\lambda_1)$.

Grâce à l'inversibilité de $R(\lambda)$ et à l'équation (6.16) on trouve que pour $u \in D$

$$R'(\lambda) R(\lambda_1) ([R'(\lambda)]^{-1} - [R(\lambda_1)]^{-1}) u =$$

$$= R(\lambda_1) u - R'(\lambda) u = (\lambda_1 - \lambda) R'(\lambda) R(\lambda_1) u,$$

d'où il s'ensuit que

$$([R'(\lambda)]^{-1} - [R(\lambda_1)]^{-1}) u = (\lambda - \lambda_1) u$$

ou

$$[R'(\lambda)]^{-1} u = (\lambda - A) u, \quad u \in D, \quad \lambda \in S(\lambda_1).$$

De la dernière égalité, on déduit que l'opérateur A possède un prolongement fermé $\lambda - [R(\lambda)]^{-1}$ défini sur D' et comme l'opérateur $\overline{A}$ est lui aussi défini sur D', il s'ensuit que $\lambda - [R(\lambda)]^{-1} = \overline{A}$, donc que $R'(\lambda) = (\lambda - \overline{A})^{-1}$ pour $\lambda \in S(\lambda_1)$. Par conséquent, la suite $\{(\lambda - A_n)^{-1}\}$ converge simplement vers $(\lambda - \overline{A})^{-1}$ pour $\lambda \in S(\lambda_1)$.

On peut maintenant reproduire la démonstration précédente en remplaçant le point λ_1 par un point quelconque μ du disque $S(\lambda_1)$. En effet, le domaine des valeurs de l'opérateur $\mu - A$ est l'espace B tout entier, donc celui de l'opérateur $\mu - A$ sera dense dans B.

De là on déduit la proposition générale suivante: *les résolvantes* $(\lambda - A_n)^{-1}$ *convergent simplement vers* $(\lambda - \overline{A})^{-1}$ *dans B pour tous les* λ *tels que* $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$.

En effet, supposons que $\operatorname{Im} \lambda$ et $\operatorname{Im} \lambda_1$ sont de même signe. Alors les points λ et λ_1 peuvent être reliés par une suite de disques $S(\mu_1)$, $S(\mu_2)$, ..., $S(\mu_m)$ centrés en $\lambda = \mu_1, \ldots, \mu_m$ tels que $S(\mu_i) \cap S(\mu_{i+1}) \neq \varnothing$. En passant de $S(\mu_1)$ à $S(\mu_2)$, de $S(\mu_2)$ à $S(\mu_3)$ et ainsi de suite, on trouve que $(\mu - A_n)^{-1} \to (\mu - A)^{-1}$ simplement dans B pour $\mu \in S(\mu_m)$. Ceci est en particulier vrai pour le point λ.

Donc la proposition 1) du lemme se généralise au demi-plan tout entier contenant le point λ_1. Mais, par hypothèse, il existe encore un point λ_2

situé dans l'autre demi-plan et pour lequel cette démonstration passe entièrement. La proposition 2) résulte de 1) et du lemme 6.4. C.Q.F.D.

Il s'avère que les opérateurs e^{-iA_nt} convergent simplement vers e^{-iAt} lorsque $n\to\infty$.

Lemme 6.7. *Supposons que* $\|e^{-iA_nt}\|\leqslant c(1+|t|)^l$ *et que les générateurs* A_n *convergent simplement vers un générateur* A *dans* B *sur un ensemble* D *partout dense invariant par* A. *Alors lorsque* $n\to\infty$ *les opérateurs* e^{-iA_nt} *convergent simplement vers* e^{-iAt} *sur* B *uniformément en* t *pris dans un ensemble compact.*

En particulier, $\|e^{-iAt}\|\leqslant c(1+|t|)^l$.

Démonstration. Posons $I_{n\varepsilon}=(1+i\varepsilon A_n)^{-1}$, $I_\varepsilon=(1+i\varepsilon A)^{-1}$. Choisissons arbitrairement un $\delta>0$. Le lemme 6.3 nous dit que pour tous $u\in B$ et $t_0>0$, on peut exhiber un $\varkappa_1=\varkappa_1(\delta, u, t_0)>0$ tel que pour $|\varepsilon|\leqslant\varkappa_1$, $\varepsilon t\geqslant 0$, $|t|\leqslant t_0$, l'on ait

$$\|e^{-iI_\varepsilon At}u-e^{-iAt}u\|<\delta/3. \tag{6.17}$$

Par analogie à (6.4), on obtient la formule

$$e^{-iI_{n\varepsilon}A_nt}-e^{-iI_\varepsilon At}=-i\int_0^t e^{-iI_{n\varepsilon}A_n\tau}(I_{n\varepsilon}A_n-I_\varepsilon A)\,e^{-iI_\varepsilon A(t-\tau)}\,d\tau.$$

A noter que

$$I_{n\varepsilon}A_n-I_\varepsilon A=\frac{1}{i\varepsilon}(I_\varepsilon-I_{n\varepsilon}).$$

Grâce à cette relation et à la minoration $\varepsilon t\geqslant 0$, on trouve

$$\|(e^{-iI_{n\varepsilon}A_nt}-e^{-iI_\varepsilon At})u\|\leqslant\frac{c_1}{|\varepsilon|}\left|\int_0^t(1+R_l(\varepsilon)|\tau|)^l\|(I_\varepsilon-I_{n\varepsilon})\,e^{-iI_\varepsilon A(t-\tau)}u\|\,d\tau\right|.$$

L'intégrant converge vers 0 à τ fixe d'après le lemme 6.6. Par ailleurs, cette expression est majorée par

$$\|(I_\varepsilon-I_{n\varepsilon})\,e^{-iI_\varepsilon A(t-\tau)}u\|\leqslant c_2(1+|t-\tau|)^l\|u\|$$

(cf. (6.1) et (6.3)).

En passant à la limite (ce qui est licite), on constate que l'intégrale considérée converge vers 0 lorsque $n\to\infty$. Cela signifie que pour tous $\delta>0$, $u\in B$, $t_0>0$, $\varepsilon\in\mathbf{R}$, il existe un $N_1=N_1(\delta, u, t_0, \varepsilon)$ tel que pour $n\geqslant N_1$, $t\leqslant t_0$, $\varepsilon t>0$, l'on a

$$\|e^{-iI_{n\varepsilon}A_nt}u-e^{-iI_\varepsilon At}u\|<\delta/3. \tag{6.18}$$

D'autre part, comme dans le lemme 6.3, on obtient

$$\|e^{-iI_{n\varepsilon}A_nt}u-e^{-iA_nt}u\|\leqslant c_3\left|\int_0^t(1+|t-\tau|)^l(1+|\tau|)^l\,d\tau\right|\|(I_{n\varepsilon}-1)\,A_nu\|, \tag{6.19}$$

où $u\in D$ et $\varepsilon t\geqslant 0$.

Pour $u \in D'$, on a l'identité

$$(I_{n\varepsilon} - 1) A_n u = (I_{n\varepsilon} - 1)(A_n - A) u - i\varepsilon I_{n\varepsilon} A^2 - i\varepsilon I_{n\varepsilon} (A_n - A) Au.$$

De là on déduit grâce à la majoration $\|I_{n\varepsilon}\| \leqslant c_1$ et à (6.19) que pour tout $\delta > 0$ et tous $u \in D'$, $t_0 > 0$, il existe des nombres $\varkappa_2 = \varkappa_2(\delta, u, t_0) > 0$, $N_2 = N_2(\delta, u, t_0)$ tels que pour $|\varepsilon| < \varkappa_2$, $\varepsilon t \geqslant 0$, $n \geqslant N_2$, $|t| \leqslant t_0$, l'on a

$$\|e^{-iI_{n\varepsilon}A_n t} u - e^{-iA_n t} u\| < \delta/3. \tag{6.20}$$

Des majorations (6.17), (6.18) et (6.20) on tire sans peine le résultat annoncé. Posons $\varepsilon_0 \stackrel{\text{déf}}{=} \min\{\varkappa_1(\delta, u, t_0), \varkappa_2(\delta, u, t_0)\}$ et $N = N(\delta, u, t_0) \stackrel{\text{déf}}{=} \max\{N_1(\delta, u, t_0\varepsilon_0), N_2(\delta, u, t_0)\}$. Supposons que $\delta > 0$, $u \in D$, $t_0 > 0$, $|t| \leqslant t_0$, $n \geqslant N(\delta, u, t_0)$. Alors des inégalités (6.17), (6.18) et (6.20) on déduit aussitôt l'inégalité

$$\|e^{-iA_n t} u - e^{-iAt} u\| < \delta.$$

Soient maintenant u un vecteur arbitraire de B et v un vecteur de D tel que $\|u - v\| < \delta$. Alors pour $|t| \leqslant t_0$, $n \geqslant N(\delta, v, t_0)$ on a

$$\|e^{-iA_n t} u - e^{-iAt} u\| \leqslant$$
$$\leqslant \|e^{-iA_n t}(u - v)\| + \|e^{-iA_n t} v - e^{-iAt} v\| + \|e^{-iAt}(u - v)\| \leqslant c(1 + t_0)^l \delta + \delta.$$

Le dernier lemme nous permet d'établir la dépendance continue des fonctions de générateurs par rapport aux opérateurs $e^{-iA_n t}$.

Théorème 6.2. *Soient $A_n : D \to D$, $n = 1, 2, \ldots$, des générateurs dans un espace de Banach B, et en outre*

$$\|e^{-iA_n t}\| \leqslant c(1 + |t|)^s.$$

Supposons que la suite $\{A_n\}$ converge simplement sur D pour la norme de B vers un générateur $A : D \to D$. Alors la suite d'opérateurs $f(A_n)$, où f est un symbole de $\mathscr{B}_s(\mathbf{R})$, converge simplement vers $f(A)$ sur B lorsque $n \to \infty$.

Démonstration. Le lemme 6.7 nous dit que les opérateurs $e^{-iA_n t}$ convergent simplement vers e^{-iAt} sur B et uniformément en t pris dans un ensemble compact.

Supposons que le symbole f appartient à $\mathscr{B}_s^0(\mathbf{R})$, c'est-à-dire que

$$\{F^{-1} f\}(t) = \sum_{k=1}^{m} c_k \delta(t - \xi^{(k)}) + \varphi(t), \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}).$$

Alors, lorsque $n \to \infty$, pour tout $u \in B$, on a

$$f(A_n) u - f(A) u = \sum_{k=1}^{m} \frac{c}{\sqrt{2\pi}} \{e^{-iA_n \xi(k)} - e^{-iA\xi(k)}\} u +$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\operatorname{supp}\varphi} \varphi(t) [e^{-iA_n t} - e^{-iAt}] u \, dt \to 0.$$

D'autre part,

$$\|f(A_n)\| \leqslant \frac{c}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_{\mathscr{B}_s(\mathbf{R})}$$

pour tous les $f \in \mathscr{B}_s(\mathbf{R})$, $n=1, 2, \ldots$ L'opérateur $f(A)$ est justiciable de la même majoration. Soit $f_\varepsilon \in \mathscr{B}_s^0(\mathbf{R})$ et supposons que $f_\varepsilon \to f$ lorsque $\varepsilon \to 0$ dans $\mathscr{B}_s(\mathbf{R})$. Alors

$$\begin{aligned}\|f(A_n)u - f(A)u\| &\leqslant \|(f(A_n) - f_\varepsilon(A_n))u\| + \\ &+ \|(f_\varepsilon(A_n) - f_\varepsilon(A))u\| + \|(f_\varepsilon(A) - f(A))u\| \leqslant \\ &\leqslant \frac{2c}{\sqrt{2\pi}} \|u\| \, \|f - f_\varepsilon\|_{\mathscr{B}_s(\mathbf{R})} + \|f_\varepsilon(A_n)u - f_\varepsilon(A)u\|\end{aligned}$$

Soit donné $\delta > 0$. Choisissons ε de telle sorte que le premier terme de la dernière somme soit $< \delta/2$. Cherchons pour cette valeur fixe de ε un $N(\delta)$ tel que pour $n \geqslant N$ le second terme soit $< \delta/2$ (ceci est possible, puisque $f_\varepsilon \in \mathscr{B}_s^0(\mathbf{R})$. En définitive

$$\|f(A_n)u - f(A)u\| < \delta$$

pour $n \geqslant N(\delta)$. Ce qui prouve le théorème.

§ 7. Opérateurs hermitiens

Soit A un opérateur hermitien dans un espace hilbertien séparable H et soit une application $M : f \to f(A)$ définie sur les fonctions $f \in \mathscr{B}_0(\mathbf{R})$ par la formule

$$f(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int (F^{-1}f)(t) \, e^{-iAt} \, dt. \tag{7.1}$$

Théorème 7.1. *Pour tout symbole $f \in \mathscr{B}_0(\mathbf{R})$, on a la majoration*

$$\|f(A)\| \leqslant \|f\|_{C(\mathbf{R})}. \tag{7.2}$$

Démonstration. On peut admettre que H est réalisé sous forme de l'espace l^2 des suites $v = \{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ des nombres complexes de norme finie $\|v\|_{l^2}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |v_i|^2$.

Supposons tout d'abord que A est un opérateur borné. Soit $e^{(j)}$ un vecteur défini par la formule $e_i^{(j)} = \delta_{ij}$, où δ_{ij} est le symbole de Kronecker, et soit $Ae^{(j)} = \sum_{i=1}^{\infty} A_{ij} e^{(i)}$, où A_{ij} sont les éléments de la matrice de l'opérateur A.

Désignons par A_n l'opérateur défini par

$$\begin{aligned}(A_n v)_i &= \sum_{j=1}^{n} A_{ij} v_j, \qquad i = 1, \ldots, n, \\ (A_n v)_i &= 0, \qquad\qquad i > n.\end{aligned}$$

L'opérateur A_n peut être identifié à la matrice $(A_{ij})_{i,j=1}^n$. Soit $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ une base orthonormée dans un espace euclidien $\mathbf{C}^n$, où ψ_i sont les vecteurs propres de la matrice

$$A_n\psi_i=\lambda_i\psi_i, \qquad (\psi_i, \psi_j)=\delta_{ij}.$$

Identifions le vecteur ψ_i à l'élément correspondant de l^2 en ajoutant des zéros à ses coordonnées.

Soit

$$v=\sum_{i=1}^n a_i\psi_i+\sum_{i=n+1}^\infty b_ie^{(i)}.$$

Alors

$$f(A_n)v=\sum_{i=1}^n a_if(A_n)\psi_i+\sum_{i=n+1}^\infty b_if(A_n)e^{(i)}=\sum_{i=1}^n a_if(\lambda_i)\psi_i+f(0)\sum_{i=n+1}^\infty b_ie^{(i)},$$

puisque

$$e^{-iA_nt}\psi_j=e^{-i\lambda_nt}\psi_j;$$

$$e^{-iA_nt}e^{(j)}=e^{(j)} \text{ pour } j>n.$$

D'où

$$\|f(A_n)v\|^2=\sum_{j=1}^n |a_j|^2|f(\lambda_j)|^2+|f(0)|^2\sum_{i=n+1}^\infty |b_i|^2\leqslant$$

$$\leqslant(\sup_{x\in\mathbf{R}}|f(x)|^2)\left(\sum_{j=1}^n |a_j|^2+\sum_{i=n+1}^\infty |b_i|^2\right)=\|f\|^2_{C(\mathbf{R})}\|v\|^2,$$

de sorte que

$$\|f(A_n)\|\leqslant\|f\|_{C(\mathbf{R})}. \tag{7.3}$$

Par ailleurs,

$$\|(A-A_n)v\|^2=\sum_{i=1}^n\left|\sum_{j=n+1}^\infty A_{ij}v_j\right|^2+\sum_{i=n+1}^\infty\left|\sum_{j=1}^\infty A_{ij}v_j\right|^2\leqslant\|AP_nv\|^2+\|P_nAv\|^2,$$

où

$$(P_nv)_i=\begin{cases}0 & \text{pour } i\leqslant n,\\ v & \text{pour } i>n.\end{cases}$$

Il est évident que $P_n\to 0$ simplement lorsque $n\to\infty$. Donc $A-A_n\to 0$ simplement lorsque $n\to\infty$. Alors, d'après le théorème 6.2

$$\|[f(A)-f(A_n)]v\|\to 0$$

lorsque $n\to\infty$ pour tout $v\in H$ et tout symbole $f\in\mathscr{B}_0(\mathbf{R})$. Par ailleurs, de (7.3) on déduit la majoration

$$\|f(A)\|\leqslant\|f\|_{C(\mathbf{R})}. \tag{7.4}$$

Dédouanons-nous maintenant de l'hypothèse que l'opérateur A est borné. Soit A un opérateur hermitien dans H. Considérons la suite d'opérateurs hermitiens

$$A_n=A\left(1+\frac{1}{n}A^2\right)^{-1};$$

le fait qu'ils soient bornés résulte de la majoration

$$\|A_n\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \frac{x}{1+\frac{x^2}{n}} \right|_{\mathscr{B}_0(\mathbf{R})}$$

La suite $\{A_n\}$ converge simplement vers l'opérateur A sur l'ensemble D_A. En effet, soit $K_n \overset{\text{déf}}{=} \left(1+\frac{1}{n}A^2\right)^{-1}$. Alors

$$\left\|\left(1+\frac{1}{n}A^2\right)u\right\|^2 = \left(\left(1+\frac{A^2}{n}\right)u, \left(1+\frac{A^2}{n}\right)u\right) =$$

$$= \|u\|^2 + \frac{2}{n}\|Au\|^2 + \frac{1}{n^2}\|A^2u\| \geqslant \|u\|^2,$$

de sorte que $\|K_n\| \leqslant 1$ et $\frac{1}{n}K_nA^2u = (1-K_n)u$ pour $u \in D_{A^2}$. Donc $(1-K_n)u \to 0$ lorsque $n \to \infty$ sur l'ensemble partout dense D_{A^2}. Le théorème de Banach-Steinhaus nous dit que la suite $\{K_n\}$ converge simplement vers 1 partout et, par conséquent, $\{A_n\}$ converge simplement vers A sur D_A.

D'après le théorème 6.2, la suite $\{f(A_n)\}$ converge simplement vers $f(A)$ pour tout symbole $f \in \mathscr{B}_0(\mathbf{R})$. Or les opérateurs A_n sont justiciables de la majoration (7.4): $\|f(A_n)\| \leqslant \|f\|_{C(\mathbf{R})}$, donc $\|f(A)\| \leqslant \|f\|_{C(\mathbf{R})}$, ce qui prouve le théorème.

Remarque. La majoration (7.2) exprime que l'homomorphisme $M: f \to f(A)$ défini par la formule (7.1) se prolonge à l'adhérence de $\mathscr{B}_0(\mathbf{R})$ dans $C(\mathbf{R})$.

Corollaire. *Soit A un opérateur hermitien borné dans un espace hilbertien séparable H. Il existe alors un homomorphisme $\mathscr{M}_1: C(\sigma(A)) \to \mathrm{Hom}(H, H)$ tel que pour tout $f \in \mathscr{B}_0(\mathbf{R})$ l'on ait l'égalité*

$$f(A) = \mathscr{M}_1 f|_{\sigma(A)}.$$

Démonstration. L'ensemble $\sigma(A)$ est contenu dans l'intervalle fermé $[-\|A\|, \|A\|]$. En effet, si $\lambda > \|A\|$, alors $(\lambda - A)^{-1}$ est un homomorphisme

$$(\lambda - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \lambda^{-k-1}.$$

Donc $\sigma(A)$ est un ensemble compact.

Signalons maintenant que $g(A) = 0$ pour toute fonction $g \in \mathscr{B}_0(\rho(A))$. Soit $\{g\}$ la classe des fonctions de $\mathscr{B}_0(\mathbf{R})$ dont les supports sont contenus dans $\rho(A)$. Pour tout $g \in \{g\}$, on a

$$f(A) + g(A) = f(A).$$

Il est immédiat de voir que

$$\inf_{g\in\{g\}} \|f+g\|_{C(\mathbf{R})} = \sup_{x\in\sigma(A)} |f(x)|.$$

D'où l'on déduit

$$\|f(A)\| \leqslant \sup_{x\in\sigma(A)} |f(x)| = \|f|_{\sigma(A)}\|_{C(\sigma(A))}.$$

De là il résulte que l'opérateur $f(A)$ est défini de façon unique par la restriction $f|_{\sigma(A)}$ de la fonction f au spectre de l'opérateur A et que l'opérateur qui envoie $f|_{\sigma(A)}$ dans $f(A)$ est borné en tant qu'opérateur de $C(\sigma(A))$ dans $\mathrm{Hom}(H, H)$. Reste à remarquer que l'ensemble des fonctions de la forme $f|_{\sigma(A)}$, où $f\in\mathscr{B}_0(\mathbf{R})$, est dense dans $C(\sigma(A))$. En effet, soit g une fonction continue quelconque sur $\sigma(A)$. Prolongeons g en une fonction G continue sur $\mathbf{R}$ à support compact. Alors la suite $\{G_n\}$ de fonctions de $C_0^\infty(\mathbf{R})$ définie par

$$G_n(x) = c_n \int_{|x-\xi|<\frac{1}{n}} G(\xi) e^{-\frac{1}{1-n^2(x-\xi)^2}} d\xi,$$

$$C_n^{-1} = \int_{|x|<\frac{1}{n}} e^{-\frac{1}{1-n^2x^2}} dx,$$

converge uniformément vers G, si bien que $G_n|_{\sigma(A)} \to g$ dans $C(\sigma(A))$.

Corollaire. *Soit A opérateur hermitien dans un espace hilbertien séparable. Alors pour tout réel λ et tout $\Delta>0$, il existe un projecteur $E'_\lambda(\Delta)$ tel que les sous-espaces $E'_\lambda(\Delta)H$ et $(1-E'_\lambda(\Delta))H$ sont invariants par $f(A)$ pour tout $f\in\mathscr{B}_0(\mathbf{R})$ et orthogonaux, et en outre, pour toute fonction $f\in\mathscr{B}_0(\mathbf{R})$ de support dans $(\lambda, \lambda+\Delta)$, on a l'égalité $f(A)=f(A)\,E'_\lambda(\Delta)=E'_\lambda(\Delta)\,f(A)$ et pour toute fonction $f\in\mathscr{B}_0(\mathbf{R})$, on a la majoration*

$$\|f(A)\,E'_\lambda(\Delta)\| \leqslant \sup_{\lambda\leqslant x\leqslant\lambda+\Delta} |f(x)|.$$

Démonstration. Soit $\varphi(x)=\theta(x-\lambda)\,\theta(\lambda+\Delta-x)$. Posons $g(x)=(x-\lambda)(\lambda+\Delta-x)\varphi(x)$. Il existe alors une suite $\{g_n\}$ de fonctions de $\mathscr{B}_0(\mathbf{R})$ convergeant uniformément vers g telle que $g_n(x)=0$ dans des voisinages (dépendant de n) des points λ et $\lambda+\Delta$, et $|g_n(x)|<g(x)$ partout. Soit $h\in D_{A^2}$. On a

$$g_n(A)h = \varphi_n(A)\,(A-\lambda)\,(\lambda+\Delta-A)\,h,$$

où $\varphi_n(x)=\dfrac{g_n(x)}{(x-\lambda)(\lambda+\Delta-x)}$. Donc

$$\|g_n(A)h\| \leqslant \|\varphi_n\|_{C(\mathbf{R})}\|(A-\lambda)(\lambda+\Delta-A)\,h\|.$$

En faisant tendre n vers ∞ dans cette majoration et grâce à l'inégalité $|g_n(x)|<g(x)$, on obtient

$$\|g(A)h\| \leqslant \|(A-\lambda)(\lambda+\Delta-A)\,h\|$$

Soit $N=\{h_1\in N:((A-\lambda)(\lambda+\Delta-A)h_1=0)\}$. En tenant compte de la dernière relation, posons par définition

$$\varphi(A)h_1=0,\quad \varphi(A)(A-\lambda)(\lambda+\Delta-A)h=g(A)h,\quad h\in D_{A^2}.$$

Nous avons défini un opérateur $\varphi(A)$ sur le domaine des valeurs de l'opérateur $(A-\lambda)(\lambda+\Delta-A)$, et en outre $\|\varphi(A)\|\leqslant 1$ sur cet ensemble.

Assurons-nous que le domaine des valeurs de l'opérateur $(A-\lambda)(\lambda+\Delta-A)$ est dense dans H/N. A cet effet on remarquera tout d'abord que si $f\in\mathscr{B}_0(\mathbf{R})$ est une fonction réelle, alors l'opérateur est hermitien.

En effet, pour tous $h, q\in H$, on a

$$(f(A)h, q)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(F^{-1}f)(t)(e^{-iAt}h, q)\,dt=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(F^{-1}f)(t)(h, e^{iAt}q)\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{(F^{-1}f)(-t)}(h, e^{iAt}q)\,dt=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(F^{-1}f)(t)(h, e^{-iAt}q)\,dt=(h, f(A)q).$$

Posons $f(x)=\dfrac{(x-\lambda)(\lambda+\Delta-x)}{x^4+1}$. Le domaine des valeurs de l'opérateur $f(A)$ est alors dense dans H/N et est contenu dans celui de l'opérateur $(A-\lambda)(\lambda+\Delta-A)$.

Ainsi, l'opérateur $\varphi(A)$ est défini sur un ensemble partout dense et on peut donc le prolonger en un homomorphisme $E'_\lambda(\Delta):H\to H$ en posant $E'_\lambda(\Delta)h\stackrel{\text{déf}}{=}0$ pour $h\in N$.

Montrons que l'opérateur $E'_\lambda(\Delta)$ commute à $f(A)$ pour tout $f\in\mathscr{B}_0(\mathbf{R})$. En effet, soit $h=(A-\lambda)(\lambda+\Delta-A)q$.
Alors

$$f(A)E'_\lambda(\Delta)h=f(A)g(A)q,$$

$$E'_\lambda(\Delta)f(A)h=E'_\lambda(\Delta)f(A)(A-\lambda)(\lambda+\Delta-A)q=$$

$$=E'_\lambda(\Delta(A-\lambda)(\lambda+\Delta-A)f(A)q=g(A)f(A)q=f(A)g(A)q.$$

Supposons par ailleurs que h appartient au domaine des valeurs (qui est dense dans H/N) de l'opérateur $(A-\lambda)^2(\lambda+\Delta-A)^2$, c'est-à-dire que $h(A-\lambda)^2(\lambda+\Delta-A)^2q$. Alors

$$E'_\lambda(\Delta)h=g(A)(A-\lambda)(\lambda+\Delta-A)q,$$

$$[E'_\lambda(\Delta)]^2 h = g^2(A) q = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(A)\, g(A)(A-\lambda)(\lambda+\Delta-A) q =$$

$$= g(A)(A-\lambda)(\lambda+\Delta-A) q = E'_\lambda(\Delta) h,$$

puisque $\varphi_n g \to g$ dans $C(\mathbf{R})$.

Donc $E'_\lambda(\Delta)$ est un orthoprojecteur. D'où, de toute évidence, la proposition annoncée.

Le projecteur $E'_\lambda(\Delta)$ est associé au symbole $\varphi(x) = \theta(x-\lambda)\theta(\lambda+\Delta-x)$, symbole qui aux points de discontinuité est supposé être semi-continu inférieurement. Il est aisé d'obtenir un projecteur $E_\lambda(\Delta)$ doué de ces propriétés et associé au symbole $\varphi(x)$ prolongé par continuité à gauche. Plus exactement, soit $\Delta_1 > \Delta$; posons alors

$$E_\lambda(\Delta) \stackrel{\text{déf}}{=} E'_\lambda(\Delta_1) - E'_{\lambda+\Delta}(\Delta_1 - \Delta).$$

On a la formule

$$E_\lambda(\Delta) + E_{\lambda+\Delta}(\Delta_1) = E_\lambda(\Delta+\Delta_1).$$

Si l'on approche le symbole f uniformément et avec une précision de l'ordre de ε par une fonction constante par morceaux de la forme

$$f_\varepsilon(x) = \sum_k a_k \theta(x-\lambda_k)\theta(\lambda_k+\Delta_k-x), \qquad |f(x) - f_\varepsilon(x)| \leqslant \varepsilon,$$

où $\lambda_{k+1} = \lambda_k + \Delta_k$, on aura alors la majoration

$$\| f(A) - \sum_k a_k E_{\lambda_k}(\Delta_k) \| \leqslant \varepsilon.$$

Théorème 7.2. *Il existe un homomorphisme $\mathscr{M}_c : C(\mathbf{R}) \to \mathrm{Op}(H)$ confondu sur $\mathscr{B}_0(\mathbf{R})$ avec l'homomorphisme $\mathscr{M} : \mathscr{B}_0(\mathbf{R}) \to \mathrm{Op}(H)$ et vérifiant la majoration $\|\mathscr{M}_c\| \leqslant 1$.*

Démonstration. Désignons par $E_n(A)$ le projecteur $E'_{-n}(2n)$. Soit f une fonction arbitraire de $C(\mathbf{R})$. Posons par définition

$$f(A)\, E_n(A) = f_n(A)\, E_n(A),$$

où $f_n(x)$ est une fonction continue arbitraire à support compact, confondue avec $f(x)$ au voisinage de l'intervalle $[-n, n]$. Donc, l'opérateur $f(A)$ est défini sur l'ensemble

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n(A) H$$

partout dense dans H et l'on a les majorations

$$\| f_n(A) E_n(A) \| \leqslant \sup_{x\in[-n,n]} |f(x)| \leqslant \| f \|_{C(\mathbf{R})}.$$

L'opérateur $f(A)$ peut donc être prolongé en un homomorphisme $H \to H$ que l'on désignera encore par $f(A)$. L'homomorphisme $f(A)$ satisfait la majoration

$$\| f(A) \| \leqslant \| f \|_{C(\mathbf{R})}.$$

Si l'on pose

$$\mathscr{M}_c f \stackrel{\text{déf}}{=} f(A),$$

on obtient *ipso facto* la proposition du théorème.

Théorème 7.3. *L'opérateur $e^{if(A)}$, où f est une fonction réelle continue sur* **R**, *est unitaire.*

Démonstration. Soit $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ un système orthonormé complet dans H tel que $e_j \in D_A$, $j=1, 2, \ldots$ Posons

$$A_{ij} = (Ae_j, e_i).$$

Soit A_n un homomorphisme de H dans H défini par les formules

$$A_n e_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ji} e_j, \quad i=1, \ldots, n;$$

$$A_n e_i = 0, \quad i=n+1, n+2, \ldots$$

Soit H_n un sous-espace de H engendré par $e_1, \ldots, e_n$, et soit $\psi_1, \ldots, \psi_n$ une base orthonormée dans H_n composée des vecteurs propres de l'opérateur A_n:

$$A_n \psi_i = \lambda_i \psi_i, \quad i=1, \ldots, n.$$

Pour tout vecteur $h \in H$, on a

$$h = \sum_{j=1}^{n} a_j \psi_j + \sum_{j=n+1}^{\infty} b_j e_j,$$

$$e^{if(A_n)} h = \sum_{j=1}^{n} a_j e^{if(\lambda_j)} \psi_j + \sum_{j=n+1}^{\infty} b_j e^{if(0)} e_j,$$

d'où il s'ensuit que

$$\|e^{if(A_n)} h\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 + \sum_{j=n+1}^{\infty} |b_j|^2 = \|h\|^2.$$

D'autre part, pour tout vecteur $h = \sum_{j=1}^{m} b_j h_j$, il vient

$$\lim_{n\to\infty} A_n h = Ah.$$

Supposons tout d'abord que $f \in \mathscr{B}_0(\mathbf{R})$. Le théorème 6.1 nous donne alors

$$e^{if(A)} h = \lim_{n\to\infty} e^{if(A_n)} h,$$

d'où

$$\|e^{if(A)} h\| = \lim_{n\to\infty} \|e^{if(A_n)} h\| = \|h\|$$

pour tout h pris dans l'ensemble des combinaisons linéaires finies des vecteurs $e_1, e_2, \ldots$, ensemble qui est dense dans H. Donc, pour tout $h \in H$, l'opérateur $e^{if(A)}$ préserve la norme:

$$\|e^{if(A)} h\| = \|h\|.$$

Cette égalité se généralise facilement au cas où f est une fonction continue à support compact.

Supposons maintenant que f est une fonction réelle continue. Pour tout $h \in E_n(A) H$, on a alors (cf. démonstration du théorème 7.2)

$$e^{if(A)} h = e^{if_n(A)} h,$$

où f_n est une fonction continue à support compact. Donc on a de nouveau $\|e^{if(A)} h\| = \|h\|$ pour tout h pris dans un ensemble dense dans H, donc pour tout $h \in H$.

Reste à remarquer que l'opérateur $e^{if(A)}$ admet un réciproque $e^{-if(A)}$ partout défini sur H. Ce qui prouve le théorème.

§ 8. Opérateurs réguliers

On se propose de généraliser ici les résultats des paragraphes précédents au cas de groupes à n paramètres.

Soit E un espace vectoriel, et soit $\{U(t)\}$, $t \in \mathbf{R}^n$, un groupe à n paramètres d'homomorphismes de E dans E:

$$U(t+\tau) = U(t)\, U(\tau).$$

Supposons que E est muni de deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ telles que $\|\cdot\|_1 \geqslant c\|\cdot\|_2$, $c = \text{const}$, et que

$$\frac{\partial U(t) h}{\partial t_j} = -iA_j\, U(t) h,$$

où la dérivée est comprise au sens de la norme $\|\cdot\|_1$ et où $A_j : E \to E$ sont des opérateurs linéaires. Appelons $A = (A_1, \ldots, A_n)$ *ensemble générateur d'opérateurs* de degré $N = N_1, \ldots, N_n$ (relativement au groupe $\{U(t)\}$ et aux normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$) si

$$\|U(t) h\|_2 \leqslant c_1 \prod_i^n (1 + |t_i|)^{N_i} \|h\|_1.$$

Théorème 8.1. *Si A est un ensemble générateur de degré N par rapport au groupe $\{U(t)\}$ et aux normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, il existe alors dans E une norme $\|\cdot\|_{\text{int}}$ telle que A est un ensemble générateur de degré N par rapport au même groupe et aux normes $\|\cdot\|_{\text{int}}$, $\|\cdot\|_{\text{int}}$.*

Démonstration. Définissons $\|\cdot\|_{\text{int}}$ à l'aide de la formule

$$\|h\|_{\text{int}} = \sup_{t \in \mathbf{R}^n} \frac{\|U(t) h\|_2}{\prod_i (1 + |t_i|)^{N_i}}. \tag{8.1}$$

Il est évident que $\|\cdot\|_{\text{int}}$ satisfait les axiomes de la norme et de plus $\|h\|_{\text{int}} \geqslant \|h\|_2$. De (1.3) il résulte que

$$\|h\|_{\text{int}} \leqslant \sup_{t \in \mathbf{R}^n} \frac{c_1 (1+|t|)^N \|h\|_1}{(1+|t|)^N} = c_1 \|h\|_1$$

Donc la dérivée pour la norme $\|\cdot\|_1$ de toute fonction à valeurs dans E est en même temps dérivée pour la norme $\|\cdot\|_{\text{int}}$. D'autre part

$$\frac{\|U(t)h\|_{\text{int}}}{(1+|t|)^N} = \sup_{t \in \mathbf{R}^n} \frac{\|U(t+\tau)h\|_2}{(1+|\tau|)^N (1+|t|)^N} \leqslant \sup_{t,\tau \in \mathbf{R}^n} \left\{ \frac{\|U(t+\tau)h\|_2}{(1+|t+\tau|)^N} \cdot \frac{(1+|t+\tau|)^N}{(1+|t|)^N (1+|\tau|)^N} \right\}$$

Le dernier facteur étant $\leqslant 1$, il vient

$$\|U(t)h\|_{\text{int}} \leqslant (1+|t|)^N \|h\|_{\text{int}}.$$

C.Q.F.D.

Soit B_{int} le complété de l'espace E pour la norme $\|\cdot\|_{\text{int}}$. Désignons le prolongement de l'opérateur $U(t)$ en un homomorphisme de B_{int} dans lui-même par $e^{-i\overline{A}t}$, où $At = A_1 t_1 + \ldots + A_n t_n$, et par $\overline{A} = (\overline{A}_1, \ldots, \overline{A}_n)$ l'ensemble des fermetures des opérateurs A_i dans l'espace B_{int}. Signalons que les opérateurs $\overline{A}_i$ existent (cf. théorème 1.1).

Définition. Soit $\varphi \in \mathscr{B}_N(\mathbf{R}^n)$ et soit A un ensemble générateur de degré N. Définissons un homomorphisme $\varphi(\overline{A})$: $B_{\text{int}} \to B_{\text{int}}$ à l'aide de la formule

$$\varphi(\overline{A})h = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^n} \tilde{\varphi}(t)\, e^{-i\overline{A}t} h\, dt,$$

où $\tilde{\varphi} = F^{-1}\varphi$. La fonction φ sera appelée *symbole de l'opérateur* $\varphi(\overline{A})$.

De toute évidence

$$\|\varphi(\overline{A})\| \leqslant c \|\varphi\|_{\mathscr{B}_N(\mathbf{R}^n)}, \qquad c = \text{const},$$

où $\mathscr{B}_N(\mathbf{R}^n) = \mathscr{B}_{N_1, \ldots, N_n}(\mathbf{R}^n)$.

Donc, l'application $\mathscr{M}: \varphi \to \varphi(A)$ est un homomorphisme de l'espace de Banach $\mathscr{B}_N(\mathbf{R}^n)$ dans l'espace de Banach Op (B_{int}) des homomorphismes $B_{\text{int}} \to B_{\text{int}}$.

Théorème 8.2. *L'homomorphisme $\mathscr{M}$ est un homomorphisme d'algèbres.*

La démonstration est identique à celle du théorème 1.1. Le théorème suivant s'établit comme le théorème 7.1.

Théorème 8.3. *Soit (A_1, A_2) un ensemble générateur dans un espace hilbertien séparable H composé d'opérateurs hermitiens. Alors*

$$\|f(A_1, A_2)\| \leqslant \|f\|_{C(\mathbf{R}^2)}.$$

Définition. On appelle *résolvante* $\rho(A)$ d'un ensemble générateur A le plus petit ensemble ouvert de $\mathbf{R}^n$ possédant la propriété suivante:

$$(\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n) \text{ et } \operatorname{supp}\varphi \subset \rho(A)) \Rightarrow (\varphi(\overline{A}) = 0).$$

L'ensemble $\sigma(A)=\mathbf{R}^n\setminus\rho(A)$ sera dit *spectre de l'ensemble générateur.*

Définition. On appelle *opérateur régulier de degré N* un opérateur de la forme $T=A_1+iA_2$, où (A_1, A_2) est un ensemble générateur de degré $\vec{N}=\{N, 0\}$ et de plus

$$e^{-i(\overline{A}_1 t_1+\overline{A}_2 t_2)}=e^{-i\overline{A}_1 t_1}\, e^{-i\overline{A}_2 t_2}=e^{-i\overline{A}_2 t_2}\, e^{-i\overline{A}_1 t_1}.$$

Lemme 8.1. *Tout opérateur régulier T admet une fermeture $\overline{T}$ dans B_{int}.*

Démonstration. Soit $f(x)=\dfrac{1}{|x|^2+1}$, $x\in\mathbf{R}^2$, et soit $T=A_1+iA_2$, où $A=(A_1, A_2)$ est un ensemble générateur. L'opérateur $f(\overline{A})$ admet un réciproque. En effet, soit $\{\varphi_n\}$ une suite de fonctions de $C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} h^*(\varphi_n(\overline{A})h)=h^*(h)$$

pour tous $h\in B_{\text{int}}$, $h^*=B_{\text{int}}^*$. Si $f(\overline{A})h=0$, alors

$$\psi_n(\overline{A})f(\overline{A})h=0,$$

où

$$\psi_n(x)=\frac{\varphi_n(x)}{f(x)}=\varphi_n(x)(|x|^2+1).$$

Or $\psi_n(x)f(x)=\varphi_n(x)$, donc $\psi_n(\overline{A})f(\overline{A})=\varphi_n(\overline{A})$. Par conséquent, pour tout $h^*\in B_{\text{int}}^*$

$$h^*(\varphi_n(\overline{A})h)=0=h^*(h),$$

d'où il s'ensuit que $h=0$.

Considérons maintenant l'opérateur $f(\overline{A})T$. Cet opérateur admet un prolongement fermé $g(\overline{A})$, où $g(x)=\dfrac{x_1+ix_2}{|x|^2+1}$. Donc

$$(x_n\to 0 \text{ et } f(\overline{A})Tx_n\to z)\Rightarrow(z=0).$$

Supposons que $x_n\to 0$ et $Tx_n\to y$. Alors $f(\overline{A})Tx_n\to f(\overline{A})y=0$. L'opérateur $f(\overline{A})$ étant inversible, on en déduit que $y=0$, ce qui prouve le lemme.

Théorème 8.4. *Le spectre de la fermeture $\overline{T}$ d'un opérateur $T=A_1+iA_2$ régulier dans B_{int} est confondu avec celui d'un ensemble générateur.*

La démonstration est identique à celle des théorèmes 5.1 et 5.2.

Théorème 8.5. *Soit T un opérateur régulier et supposons que le spectre de sa fermeture $\overline{T}$ dans B_{int} est composé de points isolés. Alors le système des* p.a.*-éléments de l'opérateur T est complet dans B_{int}.*

La démonstration est identique à celle du théorème 5.4.

Lemme 8.2. *Soit T un opérateur dans un espace normé B et soit $\{B_\alpha\}$ une famille de sous-espaces vectoriels de l'espace B telle que*

a) $\dim B_\alpha \leqslant N+1$ *et de plus tout système* $\{g_\alpha\}$ *tel que* $g_\alpha \in B_\alpha$, $g_\alpha \neq 0$, *est linéairement indépendant,*

b) B_α *sont invariants par* T.

Alors la restriction T_0 *de l'opérateur* T *à* $E = \cup B_\alpha$ *est un opérateur régulier de degré* N (*relativement à un couple de normes*).

Démonstration. Soit T_α la restriction de l'opérateur T à B_α: $T_\alpha = TP_\alpha$, où $P_\alpha : E \to B_\alpha$ est un projecteur de E sur B_α. Sans nuire à la généralité on peut admettre que la forme normale de Jordan de la matrice associée à T_α est composée d'un seul bloc de Jordan (sinon B_α se représenterait par une somme directe de sous-espaces invariants par T_α). Supposons donc que T_α se ramène à la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_\alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_\alpha & 1 & 0 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda_\alpha \end{pmatrix}$$

Considérons les $(N+1)\times(N+1)$-matrices A'_α et A''_α qui se réduisent respectivement aux formes

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re}\lambda_\alpha & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & \operatorname{Re}\lambda_\alpha & 1 & & \\ \dots & \dots & \dots & & \\ 0 & & \operatorname{Re}\lambda_\alpha & & 1 \\ 0 & \dots & \dots & & \operatorname{Re}\lambda_\alpha \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Im}\lambda_\alpha & & & 0 \\ 0 & \operatorname{Im}\lambda_\alpha & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \\ 0 & \dots & \dots & \operatorname{Im}\lambda_\alpha \end{pmatrix}$$

Il est évident que A'_α est un générateur de degré N et A''_α un opérateur scalaire, de sorte que A''_α commute à A'_α et A''_α est un générateur de degré 0. L'ensemble générateur (A'_α, A''_α) engendre le groupe

$$e^{-iA_\alpha t} = e^{-iA'_\alpha t' - iA''_\alpha t''} = e^{-iA'_\alpha t' - iA''_\alpha t''}.$$

En effet, soient μ un nombre réel, A un bloc de Jordan de dimension $N+1$:

$$A = \begin{pmatrix} \mu & 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & \mu & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \mu & 1 \\ 0 & & & \dots & \dots & \mu \end{pmatrix}$$

Alors la fonction vectorielle $u(t)=e^{-iAt}h$, $h\in\mathbf{C}^{N+1}$, est solution du problème de Cauchy

$$\frac{du}{dt}=-iAu, \qquad u(0)=h,$$

ou, sous la forme développée,

$$\frac{du_1}{dt}=-i\mu u_1-iu_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{du_N}{dt}=-i\mu u_N-iu_{N+1},$$

$$\frac{du_{N+1}}{dt}=-i\mu u_{N+1},$$

$$u_j(0)=h_j, \qquad j=1,\ldots,N+1,$$

où u_j et h_j sont les composantes respectives des vecteurs u et h. La résolution successive des équations de ce système en commençant par le bas nous donne

$$u_j(t)=\sum_{k=0}^{N+1-j} e^{-i\mu t}P_{j,k}(t)\,h_{j+k},$$

où $P_{j,k}(t)$ sont des polynômes de degré k (dont le calcul exact n'est pas compliqué). On en déduit que

$$\|e^{-iA_\alpha t}h\|_B\leqslant c_\alpha(1+|t|)^N\|h\|_B,$$

où c_α est une constante dépendant de α. Par ailleurs, $T_\alpha=A'_\alpha+iA''_\alpha$. A ce développement correspond celui de l'opérateur T_0:

$$T_0=A'+iA'',$$

où $A'=\sum A'_\alpha P_\alpha$ $A''=\sum A''_\alpha P_\alpha$.

Le couple (A', A'') engendre le groupe

$$U(t', t'')h=\sum e^{-i(A'_\alpha t'+A''_\alpha t'')}P_\alpha h.$$

Munissons E de la norme $\|\cdot\|_1$:

$$\|h\|_1 \overset{\text{déf}}{=} \sum c_\alpha\|P_\alpha h\|_B.$$

Il est clair que $\|\cdot\|_1\geqslant\|\cdot\|_B$. On a la majoration

$$\|U(t', t'')h\|_B\leqslant(1+|t'|)^N\|h\|_1.$$

Donc (A', A'') est un ensemble générateur de degré $(N, 0)$ par rapport aux normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_B$, ce qui prouve le théorème.

La conséquence immédiate de ce théorème est le théorème suivant.

Théorème 8.6. *Soit T un opérateur fermé dans un espace de Banach B possédant un spectre discret et un système complet de* p.a.*-éléments, l'ordre des éléments associés étant $\leqslant N$. Alors, la restriction de l'opérateur T à une variété linéaire dense dans B est un opérateur régulier.*

§ 9. Distributions propres et associées

Commençons par un exemple emprunté à la physique. L'état d'un système de particules à n degrés de liberté est décrit en mécanique quantique par une fonction de l'espace $L_2(\mathbf{R}^n)$, tandis qu'aux grandeurs physiques sont associés des opérateurs dans $L_2(\mathbf{R}^n)$. Ceci étant, le schéma logique de la mécanique quantique suppose la possibilité de décomposer tout élément de $L_2(\mathbf{R}^n)$ suivant les « fonctions propres » de l'opérateur correspondant à toute grandeur physique. (Les guillemets ont été mis pour signaler que les fonctions qu'il est d'usage d'appeler propres en physique n'appartiennent pas obligatoirement à $L_2(\mathbf{R}^n)$.)

Supposons, par exemple, que $n=1$ et que A est un opérateur de multiplication par une variable indépendante dans $L_2(\mathbf{R})$. Cet opérateur est associé à une très importante grandeur physique: la coordonnée de la particule. Les équations

$$(A-\lambda)\psi=0$$

des fonctions propres de l'opérateur A ne possèdent pas de solutions ordinaires; cependant on admet en physique que δ_λ est une *fonction propre généralisée* (*distribution propre*) *de l'opérateur de multiplication* par la variable indépendante et on note

$$x\delta(x-\lambda)=\lambda\delta(x-\lambda). \tag{9.1}$$

L'égalité (9.1) admet l'interprétation suivante. Considérons la fermeture $\overline{A-\lambda}$ de l'opérateur $A-\lambda$ en tant qu'opérateur de $W_2^{-s}(\mathbf{R})$ dans $L_2(\mathbf{R})$, s étant assez grand. Alors

$$\overline{(A-\lambda)}\,\delta_\lambda=0.$$

Signalons que l'égalité $\overline{A}\delta_\lambda=\lambda\delta_\lambda$ n'a pas lieu, puisque $\delta_\lambda\in L_2(\mathbf{R})$. Que $\overline{A-\lambda}\neq\overline{A}-\lambda$ est dû au fait que l'opérateur de multiplication n'est pas borné en tant qu'opérateur de $W_2^{-s}(\mathbf{R})$ dans $L_2(\mathbf{R})$.

Ensuite (en physique) on écrit le développement

$$\psi(x)=\int\psi(\lambda)\,\delta(x-\lambda)\,d\lambda, \tag{9.2}$$

ou, sous une forme plus générale, le développement

$$\psi(x)=\int c(\lambda)\,\psi_\lambda(x)\,d\lambda, \tag{9.3}$$

où $\{\psi_\lambda(x)\}$ est la famille des distributions propres de l'opérateur associé à une grandeur physique. Vu que $\psi_\lambda(x)$ figure dans (9.3) comme une fonction du paramètre λ, il est naturel d'admettre que l'opérateur $\overline{(A-\lambda)}$ évolue dans l'espace des fonctions de λ, autrement dit de traiter λ comme un opérateur de multiplication par la variable indépendante.

Dans ce paragraphe, on adoptera ce point de vue pour généraliser la formule (9.2) au cas du développement d'un vecteur quelconque de B_{int} suivant les p.a.-distributions d'un opérateur régulier.

Passons aux définitions et aux notations.

Considérons l'espace Hom $(\mathscr{B}_N(\mathbf{R}^n), \mathbf{C})$. Par définition c'est l'espace des fonctionnelles bornées sur $\mathscr{B}_N(\mathbf{R}^n)$, c'est-à-dire l'espace $\mathscr{B}_N^*(\mathbf{R}^n)$ des éléments désignés par convention comme suit:

$$f[g] = \int f(\lambda)\, g(\lambda)\, d\lambda, \quad f \in \text{Hom}\,[\mathscr{B}_N(\mathbf{R}^n), \mathbf{C}],\ g \in \mathscr{B}_N. \qquad (*)$$

Comme déjà convenu, cette intégrale, qui n'a un sens que pour les fonctions $f(\lambda)$ continues, se note formellement pour toute fonctionnelle f, et $f(\lambda)$ s'appelle fonction généralisée (ou distribution).

Soit $G(\lambda)$ une fonction continue de λ à valeurs dans B. Alors l'intégrale

$$\int_{\mathbf{R}^n} G(\lambda) f(\lambda)\, d\lambda, \quad f(\lambda) \in \mathscr{B}_N(\mathbf{R}^n)$$

définit un élément de l'espace B, de sorte que l'opérateur G

$$Gf \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\mathbf{R}^n} G(\lambda) f(\lambda)\, d\lambda$$

est un élément de l'espace Hom $(\mathscr{B}_N(\mathbf{R}^n), B)$. Par analogie avec $(*)$ convenons d'écrire formellement pour tout $G \in \text{Hom}\,(\mathscr{B}_N(\mathbf{R}^n), B)$

$$Gf = \int G(\lambda) f(\lambda)\, d\lambda$$

et d'appeler $G(\lambda)$ *distribution de* λ *à valeurs dans* B. Les distributions ordinaires sont aux termes de cette définition des distributions à valeurs dans $\mathbf{C}$.

Soient T un opérateur régulier de degré N, B_{int} l'espace de Banach intermédiaire associé à T et $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \in \mathbf{C}$.

Considérons l'opérateur

$$T^{(k)} = (T - \lambda)^k$$

dans B_{int}. Nous le traiterons comme un opérateur de l'espace des distributions de λ à valeurs dans B_{int} dans l'espace des fonctions continues de λ à valeurs dans B_{int} (ceci afin que les valeurs de l'opérateur $(T-\lambda)^k$ appartiennent à B_{int} pour tout λ fixe).

Ainsi, nous traiterons $(T-\lambda)^k \stackrel{\text{déf}}{=} T^{(k)}$, où $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 = (\lambda_1, \lambda_2)$ comme un opérateur de Hom $(\mathscr{B}_N(\mathbf{R}^2), B_{\text{int}})$ dans $C(\mathbf{R}^2, B_{\text{int}})$. Précisons notre dessein. Désignons par

$$T_0^{(k)} : (\text{Hom}\,\mathscr{B}_N(\mathbf{R}^2), B_{\text{int}}) \to C(\mathbf{R}^2, B_{\text{int}})$$

un opérateur défini sur des fonctions continues à valeurs dans B_{int} telles que l'application

$$\lambda \to \overline{(T-\lambda)^k} f(\lambda)$$

soit une fonction continue dans $\mathbf{R}^2$ à valeurs dans B_{int}, et agissant d'après la formule

$$T_0^k f(\lambda) = \overline{(T-\lambda)}^k f(\lambda).$$

Prolongeons l'opérateur $T_0^{(k)}$ en un opérateur $T^{(k)}$ de la manière suivante. Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions de $D_{T_0^{(k)}}$ telles qu'il existe une distribution f à valeurs dans B_{int} telle que pour toute fonction $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}^n} f_n(\lambda)\,\psi(\lambda)\,d\lambda = \int_{\mathbf{R}^2} f(\lambda)\,\psi(\lambda)\,d\lambda.$$

Supposons en outre que $\lim_{n\to\infty} T_0^{(k)} f_n = g$. Posons alors $T^{(k)} f = g$.

Vérifions la validité de cette définition. Supposons que $f_n \in D_{T_0^{(k)}}$ et que pour tout $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}^2} f_n(\lambda)\,\psi(\lambda)\,d\lambda = 0.$$

Supposons par ailleurs qu'existe

$$\lim_{n\to\infty} T_0^{(k)} f_n = g.$$

Il faut prouver que $g = 0$. Pour tout $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}^2} \overline{(T-\lambda)}^k f_n(\lambda)\,\psi(\lambda)\,d\lambda = \int_{\mathbf{R}^2} g(\lambda)\,\psi(\lambda)\,d\lambda.$$

Soient P une fonction strictement positive dérivable à décroissance assez rapide, et $T = A_1 + iA_2$, où $(A_1, A_2) = A$ est un ensemble générateur déterminant l'opérateur régulier T. Posons

$$q(x) = P(x)(x_1 + ix_2 - \lambda)^k = \sum_{j=0}^{k} q_j(x)\,\lambda^k.$$

Alors l'opérateur $[P(A)]^{-1} q(A)$ est le prolongement fermé de l'opérateur $(T-\lambda)^k$, et de plus $[P(A)]^{-1}$ est fermé, car c'est le réciproque d'un homomorphisme. Donc

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}^2} \overline{(T-\lambda)}^k f_n(\lambda)\,\psi(\lambda)\,d\lambda = [P(A)]^{-1} \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{k} \int_{\mathbf{R}^2} q_j(A)\,\lambda^k f_n(\lambda)\,\psi(\lambda)\,d\lambda = 0$$

pour tout $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$. D'où $g = 0$.

Définition. Appelons le noyau de l'opérateur $T^{(k)}$ *système des* p.a.*-distributions d'ordre* $\leqslant k$ *de l'opérateur* T.

Définition. On dira que le système $\mathscr{E}$ des p.a.-distributions d'ordre $\leqslant k$ d'un opérateur T est *complet* si pour tout vecteur $h \in B_{\text{int}}$ on peut exhiber une distribution $G \in \mathscr{E}$ et une fonction $f \in \mathscr{B}_N(\mathbf{R}^2)$ telles que

$$h = \int_{\mathbf{R}^2} f(\lambda)\,G(\lambda)\,d\lambda.$$

Théorème 9.1. *Le système des* p.a.*-distributions d'ordre* $\leqslant N+2$ *d'un opérateur régulier de degré N est complet.*

Lemme. *Soit* $\varphi_n(x)$, $x \in \mathbf{R}^2$ *la* δ*-suite suivante*:

$$\varphi_n(x) = n^2 \varphi(nx), \qquad \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2), \qquad \int_{\mathbf{R}^2} \varphi(x)\,dx = 1.$$

Alors

$$\lim_{n\to\infty} \|(x_1 + Cix_2)^{N+2} \varphi_n(x)\|_{\mathscr{B}_{N,0}(\mathbf{R}^2)} = 0.$$

Démonstration. Posons $\psi_n(x) = (x_1 + Cix_2)^{N+2} \varphi_n(x)$. On a $\psi_n(x) = n^{-N} \psi_1(nx)$. Par suite, $\tilde{\psi}_n(p) = n^{-(N+2)} \tilde{\psi}_1\left(\frac{p}{n}\right)$, où $\tilde{\psi}_n = F^{-1}\psi_n$. Soit f une fonction continue arbitraire sur $\mathbf{R}^2$ vérifiant la condition $\sup_{p\in\mathbf{R}^2} \frac{|f(p)|}{(1+|p_1|)^N} \leqslant 1$. Alors

$$\left|\int_{\mathbf{R}^2} \tilde{\psi}_n(p) f(p)\,dp\right| =$$

$$= n^{-N-1} \left|\int_{\mathbf{R}^2} \tilde{\psi}_1(p) f(np)\,dp\right| \leqslant n^{-N-1} \|\psi_1\|_{\mathscr{B}_{N,0}(\mathbf{R}^2)} \sup_{p\in\mathbf{R}^2} \frac{|f(np)|}{(1+|p_1|)^N} \leqslant$$

$$\leqslant n^{-N-1} \|\psi_1\|_{\mathscr{B}_{N,0}(\mathbf{R}^2)} \sup_{t\in\mathbf{R}} \frac{(1+n|t|)^N}{(1+|t|)^N} = n^{-1} \|\psi_1\|_{\mathscr{B}_{N,0}(\mathbf{R}^2)}.$$

D'où

$$\|\psi_n\|_{\mathscr{B}_{N,0}(\mathbf{R}^2)} = n^{-1} \|\psi_1\|_{\mathscr{B}_{N,0}(\mathbf{R}^2)} \to 0$$

lorsque $n \to \infty$.

Ce qui prouve le lemme.

Démonstration du théorème. Considérons dans l'espace $\mathscr{B}_{N,0}(\mathbf{R}^2)$ un opérateur $\check{T}$ défini sur le domaine $D = C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ par la formule $\check{T}f(x) = (x_1 + ix_2) f(x)$.

Il est immédiat de voir que l'opérateur T est régulier et de plus l'espace B_{int} associé est confondu avec $\mathscr{B}_{N,0}(\mathbf{R}^2)$. Montrons maintenant que l'opérateur identique

$$I \in \mathrm{Op}(\mathscr{B}_{N,0}(\mathbf{R}^2)) = \mathrm{Hom}(\mathscr{B}_{N,0}(\mathbf{R}^2), \mathscr{B}_{N,0}(\mathbf{R}^2))$$

appartient au noyau de l'opérateur $\check{T}^{(N+1)}$. Soit φ une fonction indéfiniment dérivable strictement décroissante définie sur $[0, \infty[$ et nulle avec toutes ses dérivées sur $[1, \infty[$, et soit $\int_0^1 \xi\varphi(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2\pi}$. Posons

$$\varphi_n(x) = n^2 \varphi(n|x|).$$

Associons à tout $\lambda \in \mathbf{R}^2$ l'application

$$\Phi_n(\lambda) : x \to \varphi_n(x - \lambda).$$

Il est évident que Φ_n est une fonction continue à valeurs dans $\mathscr{B}_{N,0}(\mathbf{R}^2)$. Soit par ailleurs $\{e_n\}$ une suite de fonctions de $C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ telle que $e_n(x)=1$ pour $|x|<n$ et $0\leqslant e_n(x)\leqslant 1$. Posons

$$I_n(\lambda)=e_n(\lambda)\,\Phi_n(\lambda).$$

Soit ψ une fonction arbitraire de $C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$. Considérons la suite d'intégrales

$$\int_{\mathbf{R}^2} I_n(\lambda)\,\psi(\lambda)\,d\lambda=\int_{\mathbf{R}^2}\Phi_n(\lambda)\,e_n(\lambda)\,\psi(\lambda)\,d\lambda.$$

Pour n assez grand

$$\int_{\mathbf{R}^2}[I_n(\lambda)-I(\lambda)]\,\psi(\lambda)\,d\lambda=\int_{\mathbf{R}^2}\Phi_n(\lambda)\,\psi(\lambda)\,d\lambda-\psi\overset{\text{déf}}{=}\psi_n-\psi.$$

Montrons que $\|\psi_n-\psi\|_{W_2^{N+1}(\mathbf{R}^2)}\to 0$ lorsque $n\to\infty$; ce qui exprime, en particulier, que $\psi_n\to\psi$ dans $\mathscr{B}_{N,0}(\mathbf{R}^2)$. On a

$$\psi_n(x)=\int_{\mathbf{R}^2}\varphi_n(x-\lambda)\,\psi(\lambda)\,d\lambda=\int_{\mathbf{R}^2}\varphi_n(y)\,\psi(x-y)\,dy. \tag{9.5}$$

On voit sur (9.5) que $\psi_n(x)$ converge vers $\psi(x)$ uniformément avec toutes ses dérivées. Comme les supports des fonctions ψ_n sont contenus dans un ensemble compact ne dépendant pas de n, on en déduit que $\psi_n\to\psi$ dans tout espace de Sobolev.

Considérons maintenant la suite de distributions

$$G_n=\check{T}_0^{(N+2)}I_n;\qquad G_n(\lambda)=(\check{T}-\overline{\lambda})^{N+2}\,e_n(\lambda)\,\overline{\Phi_n(\lambda)},$$

ou, de façon plus détaillée,

$$G_n(\lambda)(x)=(x_1+ix_2-\lambda_1-i\lambda_2)^{N+2}\,e_n(\lambda)\,\varphi_n(x-\lambda).$$

Il est évident que

$$\|G_n(\lambda)\|_{\mathscr{B}_{N,0}(\mathbf{R}^2)}\leqslant\|G_n(0)\|_{\mathscr{B}_{N,0}(\mathbf{R}^2)}=\|h_n\|_{\mathscr{B}_{N,0}(\mathbf{R}^2)},$$

où $h_n(x)=(x_1+ix_2)^{N+2}\varphi_n(x)$. Il est immédiat de vérifier que $\|h_n\|\to 0$ lorsque $n\to\infty$. D'où l'on déduit que $\|G_n(\lambda)\|_{\mathscr{B}_{N,0}(\mathbf{R}^2)}\to 0$ uniformément en λ lorsque $n\to\infty$, de sorte que

$$\check{T}^{(N+2)}I=0.$$

Donc le système des p.a.-distributions d'ordre $\leqslant N+2$ de l'opérateur $\check{T}$ est complet; en effet, pour tout $f\in\mathscr{B}_{N,0}(\mathbf{R}^2)$,

$$f=\int_{\mathbf{R}^2}f(\lambda)\,I(\lambda)\,d\lambda.$$

Supposons maintenant que T est un opérateur régulier arbitraire, $T=A_1+iA_2$, où (A_1,A_2) est un ensemble générateur et soit h un vecteur de B_{int}. Considérons l'application

$$\Phi_n:\lambda\to\varphi_{n,\lambda}(\overline{A})h,\qquad\text{où}\qquad\varphi_{n,\lambda}(x)=\varphi_n(x-\lambda).$$

Il est évident que Φ_n est une fonction continue à valeurs dans B_{int}. Posons $K_n(\lambda)=e_n(\lambda)\,\Phi_n(\lambda)$. Supposons toujours que ψ est une fonction quelconque de $C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ et considérons la suite d'intégrales

$$\int_{\mathbf{R}^2} K_n(\lambda)\,\psi(\lambda)\,d\lambda=\int_{\mathbf{R}^2}\Phi_n(\lambda)\,e_n(\lambda)\,\psi(\lambda)\,d\lambda=g_n.$$

Soit K la distribution suivante à valeurs dans B_{int}:

$$\int_{\mathbf{R}^2} K(\lambda)\,f(\lambda)\,d\lambda=f(\overline{A})\,h. \tag{9.6}$$

Montrons que

$$\lim_{n\to\infty} g_n=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}^n}\Phi_n(\lambda)\,\psi(\lambda)\,d\lambda=\int_{\mathbf{R}^n}K(\lambda)\,\psi(\lambda)\,d\lambda=\psi(\overline{A})\,h.$$

On a

$$\int_{\mathbf{R}^2}\Phi_n(\lambda)\,\psi(\lambda)\,d\lambda=\left[\int_{\mathbf{R}^2}\varphi_{n,\lambda}(\overline{A})\,\psi(\lambda)\,d\lambda\right]h=\psi_n(\overline{A})\,h,$$

où $\psi_n(x)=\int_{\mathbf{R}^2}\varphi_n(x-\lambda)\,\psi(\lambda)\,d\lambda$, de sorte que

$$\psi_n\to\psi \text{ dans } \mathscr{B}_{N,0}(\mathbf{R}^2) \text{ et } \psi_n(\overline{A})\,h\to\psi(\overline{A})\,h$$

dans B_{int}.

Considérons maintenant la suite de distributions $g_n=T_0^{(N+2)}K_n$:

$$g_n(\lambda)=(T-\lambda)^{N+2}\,e_n(\lambda)\,\Phi_n(\lambda)=\overline{(T-\lambda)^{N+2}}\,e_n(\lambda)\,\varphi_{n,\lambda}(A)\,h.$$

Il est évident que

$$\|g_n(\lambda)\|_{B_{\text{int}}}\leqslant\|\overline{(T-\lambda)^{N+1}}\,\varphi_{n,\lambda}(\overline{A})\|=\|\psi_{n,\lambda}(\overline{A})\,h\|,$$

où $\psi_{n,\lambda}(x)=(x_1+ix_2-\lambda_1-i\lambda_2)^{N+2}\,\varphi_n(x-\lambda)$.

Donc

$$\|g_n(\lambda)\,B_{\text{int}}\leqslant\|\psi_{n,0}\|_{\mathscr{B}_{N,0}(\mathbf{R}^2)}\|h\|_{B_{\text{int}}}\to 0 \quad \text{lorsque } n\to\infty.$$

Par suite, $T^{(N+1)}K=0$ et K appartient à la famille des p.a.-distributions.

En vertu de (9.6) le vecteur h peut être mis sous la forme

$$h=\int_{\mathbf{R}^2}K(\lambda)\cdot 1\,d\lambda,$$

ce qui prouve le théorème.

§ 10. Opérateurs hermitiens comme transformateurs dans l'espace de Hilbert-Schmidt

Soient A et G des opérateurs hermitiens dans un espace hilbertien séparable H, et soit T un *opérateur de Schmidt*, c'est-à-dire que $T\in B_2(H)$, où $B_2(H)$ est l'ensemble des opérateurs dont la norme de Schmidt est bornée. On peut associer à A et G des opérateurs dans l'espace $B_2(H)$ (que nous désignerons par $\overrightarrow{A}$ et $\overleftarrow{G}$) définis comme suit:

$$\overrightarrow{A}T \overset{\text{déf}}{=} AT, \quad T\in D_{\overrightarrow{A}}=\{S\in B_2(H):\,AS\in B_2(H)\},$$
$$\overleftarrow{G}T \overset{\text{déf}}{=} TG, \quad T\in D_{\overleftarrow{G}}=\{S\in B_2(H):\,\overline{SG}\in B_2(H)\}.$$

Théorème 10.1. *Les opérateurs $\vec{A}$ et $\overleftarrow{G}$ sont hermitiens dans l'espace hilbertien $B_2(H)$ et commutent sur un ensemble dense.*

Démonstration. Montrons tout d'abord que $D_{\vec{A}} \cap D_{\overleftarrow{G}}$ est dense dans $B_2(H)$. Soit $E_n(A)$ l'opérateur de symbole $\theta(x+n)\,\theta(n-x)$ construit dans la démonstration du théorème 7.2 (resp. $E'_\lambda(\Delta)$ si $\lambda=-n$ et $\Delta=2n$) et soit $\{e_i^{(n)}\}$ un système orthonormé complet dans $E_n(A)\,H$, $\{e_i^{(n)}\}$ étant un sous-système de $\{e_i^{(n+1)}\}$. Supposons que $E_n(G)$ et $\{g_i^{(n)}\}$ sont aussi respectivement des projecteurs et des systèmes orthonormés pour l'opérateur G. Alors, l'ensemble $\{e_i\}$ des vecteurs $e_i^{(n)}$ forme un système orthonormé complet dans H, de même, d'ailleurs, que l'ensemble $g_i^{(n)}$. En effet, tout vecteur de H peut être approché en norme par une combinaison linéaire de vecteurs de la forme $\varphi(A)\,h$, où $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ et $\varphi(A)\,h \in E_n(A)\,H$ pour n assez grand.

Pour tout $T \in B_2(H)$, on a

$$\|TE_n(G)-T\|^2_{B_2(H)}=\|T\|^2_{B_2(H)}-\sum_i \|Tg_i^{(n)}\|^2 \to 0$$

lorsque $n\to\infty$. De façon analogue,

$$\|E_n(A)\,T-T\|^2_{B_2(H)}\to 0,$$

lorsque $n\to\infty$, car c'est une suite de restes de la série convergente $\sum_{i,j}|(Te_j, e_i)|^2$. Donc l'ensemble K des opérateurs de la forme $E_n(A)\,TE_m(G)$, $T\in B_2(H)$, est dense dans $B_2(H)$. Mais l'ensemble D est contenu dans $D_{\vec{A}} \cap D_{\overleftarrow{G}}$, puisque les opérateurs $AE_n(A)$ et $E_m(G)\,G$ sont bornés. Ce qui prouve que $D_{\vec{A}} \cap D_{\overleftarrow{G}}$ est dense dans $B_2(H)$.

Soit $\{T_j\}_{j=1}^\infty$ un système orthonormé complet dans $B_2(H)$ tel que $T_j \in D_{\vec{A}} \cap D_{\overleftarrow{G}}$, $j=1, 2, \ldots$ Il est évident que $\vec{A}\overleftarrow{G}T_j=\overleftarrow{G}\vec{A}T_j$, de sorte que $\vec{A}$ et $\overleftarrow{G}$ commutent sur l'ensemble des combinaisons linéaires $\sum_{j=1}^n a_jT_j$ qui est dense dans $B_2(H)$.

Montrons que $\vec{A}$ et $\overleftarrow{G}$ sont des opérateurs hermitiens. Soit $T \in D_{\vec{A}}$, c'est-à-dire que $AT \in B_2(H)$. Alors pour $S \in D_{\vec{A}}$, on a $(\vec{A}S, T)_2=(AS, T)_2=(S, AT)_2=(S, \vec{A}T)_2$, c'est-à-dire que $T \in D_{\vec{A}^*}$ et $\vec{A}^*T=\vec{A}T$. Prouvons l'inclusion inverse : $D_{\vec{A}^*} \subset D_{\vec{A}}$.

Supposons que $T \in D_{\vec{A}^*}$, c'est-à-dire qu'il existe un opérateur $W \in B_2(H)$ tel que $(AS, T)_2=(S, W)_2$ pour tout $S \in D_{\vec{A}}$. Choisissons dans H un système orthonormé complet $\{e_j\}$ tel que $e_j \in D_A$, $j=1, 2, \ldots$ Posons $T_{ij}u=(u, e_i)\,e_j$. Alors $T_{ij}e_k=\delta_{ik}e_j$, de sorte que

$$\|T_{ij}\|_2^2=\sum_{k=1}^\infty \|\delta_{ik}e_j\|^2=1.$$

Il est aisé de voir que les opérateurs T_{ij}, T_{kl}, $(i,j)\neq(k,l)$, sont orthogonaux dans $B_2(H)$. Ainsi $\{T_{ij}\}$ est un système orthonormé dans $B_2(H)$. Il est

immédiat de vérifier que ce système est complet dans $B_2(H)$. On a $\|AT_{ij}\|_2 = \|Ae_j\| < \infty$, de sorte que $T_{ij} \in D_{\vec{A}}$. D'autre part, on a les relations

$$(AT_{ij}, T)_2 = (T_{ij}, W)_2, \quad i, j = 1, 2, \ldots$$

Par définition du produit scalaire dans $B_2(H)$, les dernières égalités peuvent être mises sous la forme

$$(Ae_j, Te_i) = (e_j, We_i);$$

de là il s'ensuit que

$$ATe_i = We_i, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

c'est-à-dire que $AT = W \in B_2(H)$. Ceci prouve l'hermiticité de l'opérateur $\vec{A}$.

Pour prouver l'hermiticité de l'opérateur $\overleftarrow{G}$, considérons un système orthonormé complet $\{e'_j\}$ dans H composé de vecteurs appartenant à $D_{\overleftarrow{G}}$ et supposons que

$$T'_{ij}u = (u, e'_i)\, e_j, \quad \forall u \in H.$$

Trouvons l'adjoint $(T'_{ij}G)^*$ du produit $T'_{ij}G$. Le domaine des valeurs de l'opérateur T'_{ij}, étant contenu dans D_G, il vient

$$(T'_{ij}G)^* = GT'^*_{ij} = GT'_{ji}.$$

Donc, si $T \in D_{G^*}$, il existe un opérateur $W \in B_2(H)$ tel que

$$(T'_{ij}G, T)_2 = (T^*, (T'_{ij}G)^*)_2 = (T^*, GT'_{ij})_2 = (T'_{ij}, W)_2.$$

D'où

$$(e'_j, TGe'_i) = (e'_j, We'_i), \quad i, j = 1, 2, \ldots,$$

c'est-à-dire que l'opérateur TG possède une fermeture égale à $W \in B_2(H)$. Ce qui exprime que $T \in D_{\overleftarrow{G}}$. Prouvons l'inclusion inverse $D_{\overleftarrow{G}} \subset D_{\overleftarrow{G}^*}$ et l'égalité $\overleftarrow{G}^* S = \overleftarrow{G} S$ pour $S \in D_{\overleftarrow{G}}$. Ce qui signifiera que $\overleftarrow{G}$ est hermitien.

Soit $T \in D_{\overleftarrow{G}}$, c'est-à-dire que $\overline{TG} \in B_2(H)$; ceci étant, $(TG)^* \in B_2(H)$. Déterminons l'action du vecteur $(TG)^*$ sur le vecteur e'_i. Pour tout $u \in H$, on a

$$(\overline{TG}u, e'_i) = (u, (TG)^* e'_i).$$

Donc, pour $u \in D_G$, on obtient $(Gu, T^* e'_i) = (u, (TG)^* e'_i)$. D'où $T^* e'_i \in D_G$ et $(TG)^* e'_i = GT^* e'_i$. En appliquant ces considérations à tout $S \in D_{\overleftarrow{G}}$, on trouve que

$$(S, \overleftarrow{G}T)_2 = (S, \overline{TG})_2 = ((TG)^*, S^*)_2 = \sum_k ((TG)^* e'_k, S^* e'_k) = \sum_k (\overleftarrow{G}T^* e_k, S^* e_k);$$

$$(\overleftarrow{G}S, T)_2 = (\overline{SG}, T)_2 = (T^*, (SG)^*)_2 =$$

$$= \sum_k (T^* e'_k, (SG)^* e'_k) = \sum_k (T^* e'_k, (\overleftarrow{G}S^*) e'_k).$$

D'où il vient que $T \in D_{\overleftarrow{G}^*}$ et $\overleftarrow{G}^* T = \overleftarrow{G}T$. Ce qui prouve la proposition annoncée.

Les opérateurs $\vec{A}$ et $\vec{G}$ engendrent les groupes $\{e^{-i\vec{A}t}\}$ et $\{e^{-i\vec{G}t}\}$ dont l'action est définie par les formules

$$e^{-i\vec{A}t}T=e^{-iAt}T, \quad e^{-i\vec{G}t}T=Te^{-iGt}. \tag{10.1}$$

Prouvons la deuxième égalité. Considérons les deux fonctions

$$u_1(t)=[e^{-i\vec{G}t}T]^*h,$$
$$u_2(t)=(Te^{-iGt})^*h, \quad T^*h\in D_G.$$

On a $u_1(0)=u_2(0)=T^*h$. Par ailleurs

$$\frac{du_1}{dt}=(-i\vec{G}e^{-i\vec{G}t}T)^*h=i[(e^{-i\vec{G}t}T)G]^*h=iG(e^{-i\vec{G}t}T)^*h=iGu_1(t);$$
$$\frac{du_2}{dt}=\frac{d}{dt}e^{iGt}T^*h=iGe^{iGt}T^*h=iGu_2(t),$$

de sorte que les fonctions u_1 et u_2 sont confondues, car solutions d'une même équation $\frac{du}{dt}=iGu$ vérifiant la même condition initiale. Comme l'ensemble des opérateurs T satisfaisant la condition $T^*h\in D_G$, où h est un vecteur d'un ensemble dense dans H, est dense dans $B_2(H)$, il vient que la formule

$$e^{-i\vec{G}t}T=Te^{-iGt}$$

est valable pour tout $T\in B_2(H)$.

Des formules (10.1) il s'ensuit que l'ensemble K, dense dans $B_2(H)$, des opérateurs $E_n(A)\,TE_m(G)$, où $E_n(A)$ et $E_m(G)$ sont les projecteurs envisagés ci-dessus, est invariant par les groupes $\{e^{-i\vec{A}t}\}$ et $\{e^{-i\vec{G}t}\}$ et en outre

$$e^{-i\vec{A}t}e^{-i\vec{G}\tau}=e^{-i\vec{G}\tau}e^{-i\vec{A}t}.$$

Considérons le *groupe à deux paramètres* $\{e^{-i\vec{A}t-i\vec{G}\tau}\}$:

$$e^{-i\vec{A}t-i\vec{G}\tau}\overset{\text{déf}}{=}e^{-i\vec{A}t}e^{-i\vec{G}\tau}.$$

Pour tout $T\in K$, on a

$$\frac{\partial}{\partial t}e^{-i\vec{A}t-i\vec{G}\tau}T=-i\vec{A}e^{-i\vec{A}t-i\vec{G}\tau}T,$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}e^{-i\vec{A}t-i\vec{G}\tau}T=-i\vec{G}e^{-i\vec{A}t-i\vec{G}\tau}T.$$

Donc $(\vec{A},\vec{G})$ est un ensemble générateur d'opérateurs.

Théorème 10.2. *Si* $f\in\mathscr{B}_0(\mathbf{R}^2)$, $\tilde{f}=F^{-1}f$, *alors*

$$\left\|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}^2}\tilde{f}(t,\tau)\,e^{-iAt}Te^{-iG\tau}\,dt\,d\tau\right\|_2\leqslant\|f\|_{C(\mathbf{R}^2)}\|T\|_2.$$

La démonstration résulte de la formule

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}^2}\tilde{f}(t,\tau)\,e^{-iAt}Te^{-iG\tau}dt\,d\tau=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}^2}\tilde{f}(t,\tau)\,e^{-i\vec{A}t-i\vec{G}\tau}T\,dt\,d\tau=f(\vec{A},\vec{G})\,T$$

et du théoreme 7.2.

Exercice. Nous avons défini des fonctions d'opérateurs commutables, indéfiniment dérivables à croissance moins rapide que n'importe quelle puissance de l'argument. Montrer que ces fonctions forment une algèbre munie d'une μ-structure, où $\mathscr{A}$ est l'algèbre des opérateurs commutables non bornés et l'ensemble M est composé de générateurs et de fonctions réelles de générateurs.

CHAPITRE IV

CALCUL DES OPÉRATEURS NON COMMUTABLES

Dans ce chapitre, nous nous proposons de construire une μ-structure pour le cas où l'ensemble M est composé en tout de deux générateurs A_1 et A_2 *) non commutables. Cette construction est impossible à généraliser sans hypothèses supplémentaires au cas où M est composé d'un grand nombre de générateurs non bornés non commutables. C'est pourquoi il faut spécialement établir les formules de «travail» de la théorie des μ-structures (la formule de commutation et la K-formule) sous des hypothèses supplémentaires même dans le cas de deux opérateurs non commutables, puisque ces formules contiennent aussi leur commutateur.

Ces difficultés disparaissent de toute évidence quand on envisage des opérateurs bornés. Dans ce cas les constructions de fonctions d'opérateurs ordonnés exhibées ici sont des μ-structures.

Pour les mêmes considérations qu'au chapitre III, nous développons une construction indépendante des fonctions d'opérateurs ordonnés et au § 10 seulement nous construirons des symboles croissants ce qui nous conduira à des μ-structures.

§ 1. Définitions préliminaires

Soit $\{B_\tau\}$ (τ parcourt l'ensemble des entiers) une famille d'espaces de Banach satisfaisant les conditions suivantes:

a) il existe une variété linéaire D dense dans B_τ pour tout τ;

b) $(\tau<\tau')\Rightarrow B_\tau \supset B_{\tau'}$, c'est-à-dire que $\|\cdot\|_{B_\tau} \geqslant \|\cdot\|_{B_{\tau'}}$.

La famille $\{B_\tau\}$ sera appelée *échelle de Banach*; la norme sur B_τ sera désignée par $\|\cdot\|_\tau$.

On dira qu'une application linéaire $A: D \to D$ est un *générateur de degré s de pas k* dans l'échelle de Banach B_τ si pour tout τ l'opérateur A est un générateur de degré s de couple déterminant d'espaces $(B_\tau, B_{\tau+k})$; désignons par $\{U_A(t)\}$ le groupe d'homomorphismes engendré par A, et par $U_{A,\tau}(t)$ la fermeture de l'opérateur $U_A(t): B_\tau \to B_{\tau+k}$.

*) Plus, il est question en fait d'une légère généralisation de la μ-structure, puisque ne seront définies que les opérations $\mu: \left(x_1 \to \overset{1}{A}_1, x_2 \to \overset{2}{A}_2\right)$ et $\mu: \left(x_1 \to \overset{1}{A}_2, x_2 \to \overset{2}{A}_1\right)$

Soit $\{T_\tau\}$ une famille d'homomorphismes $B_\tau \to B_{\tau+l}$ telle que $T_\tau D \subset D$ et $T_\tau h = T_{\tau'} h$ pour $h \in D$ quels que soient τ et τ'. Appelons la famille $T = \{T_\tau\}$ *opérateur transporteur* de pas l dans l'échelle $\{B_\tau\}$. Dans les situations où aucune confusion ne serait à craindre, on écrira Th au lieu de $T_\tau h$.

Soient $A_1, \ldots, A_N$ des générateurs dans l'échelle $\{B_\tau\}$ de pas respectifs $k_1, \ldots, k_N$ et de degrés $s_1, \ldots, s_N$, et soient $T^{(1)}, \ldots, T^{(N-1)}$ des transporteurs de pas respectifs $l_1, \ldots, l_{N-1}$. Affectons aux opérateurs $A_1, \ldots, A_N$, $T^{(1)}, \ldots, T^{(N-1)}$ des indices (qui surmonteront les symboles de ces opérateurs) comme suit :

$$\overset{1}{A_1}, \overset{2}{T^{(1)}}, \overset{3}{A_2}, \ldots, \overset{2N-2}{T^{(N-1)}}, \overset{2N-1}{A_N}; \tag{1.1}$$

ceci étant, on dira que l'opérateur A_1 agit le premier, l'opérateur $T^{(1)}$, le second, l'opérateur A_N, le $(2N-1)$-unième. L'ensemble (1.1) sera appelé *opérateur vectoriel*. A noter que certaines composantes de l'opérateur vectoriel peuvent commuter ou même être égales.

Associons à l'opérateur vectoriel (1.1) l'homomorphisme $U_\tau(t)$ suivant qui dépend d'un paramètre $t \in \mathbf{R}^N$:

$$U(t_1, t_2, \ldots, t_N) = \\ = U_{A_N}(t_N)\, T^{(N-1)}\, U_{A_{N-1}}(t_{N-1}) \ldots U_{A_2}(t_2)\, T^{(1)}\, U_{A_1}(t_1) \tag{1.2}$$

(ici et dans la suite, on omettra l'indice τ dans $U_\tau(t)$ chaque fois que cela sera possible).

Théorème 1.1. *Pour tout $h \in B_\tau$, la fonction*

$$t \to U(t)h, \qquad t \in \mathbf{R}^N, \qquad U(t)h \in \beta_{\tau + k_1 + \ldots + k_N + l_1 + \ldots + l_{N-1}}$$

est continue.

Démonstration. C'est évident pour $N=1$. La démonstration se fait par récurrence, mais pour éviter des calculs fastidieux nous produirons uniquement le passage de $N=1$ à $N=2$, le passage de N à $N+1$ n'en différant pas par son principe.

Soit donc $N=2$; désignons $T^{(1)}$ par T. On a

$$U(t_1+\delta_1, t_2+\delta_2)h - U(t_1, t_2)h = \\ = U_{A_2}(t_2+\delta_2)\, T U_{A_1}(t_1+\delta_1)h - U_{A_2}(t_2)\, T U_{A_1}(t_1)h = \\ = U_{A_2}(t_2+\delta_2)\, T\,[U_{A_1}(t_1+\delta_1) - U_{A_1}(t_1)]h + \\ + [U_{A_2}(t_2+\delta_2) - U_{A_2}(t_2)]\, T U_{A_1}(t_1)h.$$

Il est évident que les deux derniers termes tendent chacun vers 0 pour la norme de l'espace $B_{\tau + k_1 + \ldots + l_{N-1}}$ lorsque $\delta_1, \delta_2 \to 0$.

Désignons par $C_{s_1, \ldots, s_N}(\mathbf{R}^N)$ l'espace de Banach des fonctions continues sur $\mathbf{R}^N$ de norme finie

$$\|g\|_{C_{s_1, \ldots, s_N}(\mathbf{R}^N)} = \sup_{x \in \mathbf{R}^N} \frac{|g(x)|}{(1+|x_1|)^{s_1} \ldots (1+|x_N|)^{s_N}}.$$

Il est évident que la fonction de Dirac δ_ξ et les fonctions de $C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ peuvent être traitées comme éléments de l'espace dual $C^*_{s_1,\dots,s_N}(\mathbf{R}^N)$. Pour désigner les valeurs des fonctionnelles de $C^*_{s_1,\dots,s_N}$ nous nous servirons des notations intégrales

$$\int_{\mathbf{R}^N} f(x)\varphi(x)\,dx, \qquad f\in C^*_{s_1,\dots,s_N}(\mathbf{R}^N), \qquad \varphi\in C_{s_1,\dots,s_N}(\mathbf{R}^N).$$

Exercice. Montrer que pour $\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$, $\overline{\varphi}=\varphi$

$$\|\varphi\|_{C^*_{s_1,\dots,s_N}(\mathbf{R}^N)}=\int_{\mathbf{R}^N}|\varphi(x)|(1+|x_1|)^{s_1}\dots(1+|x_N|)^{s_N}\,dx.$$

Solution. Posons $I=\int_{\mathbf{R}^N}|\varphi(x)|\prod_{i=1}^N(1+|x_i|)^{s_i}dx$. Il est évident que $\|\varphi\|_{C_s^*(\mathbf{R}^N)}\leqslant I$. Prouvons l'inégalité inverse. Soient $\varepsilon>0$, $F=\max_x|\varphi(x)|$, $c=\max\{|x|:x\in\operatorname{supp}\varphi\}$. Il existe un ensemble ouvert $U_\varepsilon^x\subset\operatorname{supp}\varphi$ tel que $\overline{U}_\varepsilon\subset\operatorname{supp}\varphi$ et

$$\operatorname{mes}[\operatorname{supp}\varphi-U_\varepsilon]<\frac{\varepsilon}{(1+c)^{|s|}\cdot F},\quad \text{où } |s|=s_1+\dots+s_N.$$

Construisons maintenant une fonction $\varphi_\varepsilon(x)$ continue à support borné telle que $\varphi_\varepsilon(x)=\operatorname{sign}\varphi(x)$ pour $x\in U_\varepsilon$ et $\varphi_\varepsilon(x)=0$ pour $x\notin\operatorname{supp}\varphi$, $|\varphi_\varepsilon(x)|\leqslant 1$, $\varphi_\varepsilon(x)\cdot\varphi(x)\geqslant 0$. Soit $\psi_\varepsilon(x)=\varphi_\varepsilon(x)\prod_{i=1}^N(1+|x_i|)^{s_i}$. Alors $\psi_\varepsilon\in C_s(\mathbf{R}^N)$ et $\|\psi_\varepsilon\|_{C_s}=1$. Par ailleurs

$$\left|\int_{\mathbf{R}^N}\varphi(x)\cdot\psi_\varepsilon(x)dx\right|\geqslant\int_{U_\varepsilon}|\varphi|(x)\prod_{i=1}^N(1+|x_i|)^{s_i}dx\geqslant I-\int_{\operatorname{supp}\varphi-U_\varepsilon}|\varphi(x)|\prod_{i=1}^N(1+|x_i|)^{s_i}dx>I-\varepsilon;$$

donc

$$\|\varphi\|_{C_s^*}=\sup_{\|\psi\|_{C_s}\leqslant 1}\left|\int\varphi(x)\psi(x)dx\right|\geqslant\left|\int\varphi(x)\cdot\psi_\varepsilon(x)dx\right|>I-\varepsilon$$

pour tout $\varepsilon>0$. Par conséquent, $\|\varphi\|_{C_s^*(\mathbf{R}^N)}\geqslant I$.

Pour le calcul des fonctions de $N\geqslant 2$ opérateurs non commutables, nous aurons besoin d'élargir la classe de symboles $\mathscr{B}_N(\mathbf{R}^n)$ introduite dans le chapitre précédent.

Soit $C_N(\mathbf{R}^n)$ un espace de Banach de fonctions continues, de norme bornée

$$\|f\|_{C_N(\mathbf{R}^n)}=\sup\frac{|f(x)|}{(1+|x|)^N},$$

et soit $C_N^*(\mathbf{R}^n)$ l'espace dual de $C_N(\mathbf{R}^n)$.

Définition. On dira qu'une fonctionnelle $L\in C_N^*(\mathbf{R}^n)$ est *nulle* sur un ouvert $U\subset\mathbf{R}^n$ si $L(f)=0$ pour toute fonction $f\in C_N(\mathbf{R}^n)$ telle que $\operatorname{supp} f\subset U$.

On appellera *support* de la fonctionnelle L et on notera $\operatorname{supp} L$ le plus petit sous-ensemble fermé $F\subset\mathbf{R}^n$ sur le complémentaire $\mathbf{R}^n\setminus F$ duquel la fonctionnelle $L=0$.

Désignons par $\mathscr{L}_N$ l'ensemble de toutes les fonctionnelles linéaires continues à support compact. Il est évident que $\mathscr{L}_N\subset C_N^*$.

Soit ψ_n une fonction de $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $n \geqslant 1$, satisfaisant les conditions suivantes :

$$0 \leqslant \psi_n(x) \leqslant 1 \quad \text{pour} \quad \text{tout } x \in \mathbf{R}^n,$$

$$\psi(x) = 1 \quad \text{pour} \quad x \in \{x : |x| \leqslant n\}.$$

Il est immédiat de remarquer que pout tout $L \in \mathscr{L}_N$ il existe un $n_0 > 0$ tel que pour toute fonction $f \in C_N(\mathbf{R}^n)$, l'on a

$$L((1-\psi_n) f) = 0 \text{ pour } n \geqslant n_0.$$

Donc

$$L(f) = L(\psi_{n_0} f) + L(1-\psi_{n_0}) f = L(\psi_{n_0} f)$$

et

$$\|\psi_{n_0} f\|_{C_n(\mathbf{R}^n)} \leqslant \|f\|_{C_N(\mathbf{R}^n)}.$$

Cette propriété des fonctionnelles à support compact est très importante et sera souvent sollicitée dans la suite. Signalons que la fonction δ et les fonctions de $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ appartiennent à $\mathscr{L}_N$. Dans le chapitre précédent nous nous sommes servis que de telles fonctionnelles à support compact pour construire l'espace $\mathscr{B}_N(\mathbf{R}^n)$.

Soit $C_N^+(\mathbf{R}^n)$ la fermeture de $\mathscr{L}_N$ pour la norme de l'espace $C_N^*(\mathbf{R}^n)$. Le lemme suivant exprime une importante propriété des fonctionnelles de l'espace $C_N^+(\mathbf{R}^n)$.

Lemme 1.1. *Si $T \in C_N^+(\mathbf{R}^n)$, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut exhiber un entier $A > 0$ tel que pour tous les $n > A$ et $f \in C_N(\mathbf{R}^n)$ l'on ait*

$$|T((1-\psi_n) f| < \varepsilon \|f\|_{C_N(\mathbf{R}^n)}. \tag{1.3}$$

Démonstration. Ceci est évident si $T \in \mathscr{L}_N$. Soit T une fonctionnelle de $C_N^+(\mathbf{R}^n)$ à support non compact. Il existe alors une suite $\{T_m\}_{m \geqslant 0} \subset \mathscr{L}_N$ convergeant vers T pour la norme de $C_N^*(\mathbf{R}^n)$, autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $M > 0$ tel que pour tous les $m > M$ l'on a l'inégalité

$$\|T - T_m\|_{C_N^*(\mathbf{R}^n)} < \varepsilon.$$

Si $m_0 > M$, alors

$$|T((1-\psi_n) f) - T_{m_0}((1-\psi_n) f| < \varepsilon \|f\|_{C_N(\mathbf{R}^n)}.$$

Il existe un entier $A > 0$ tel que $\operatorname{supp} T_{m_0} \cap \operatorname{supp}(1-\psi_n) f = \varnothing$ pour $n > A$. Donc

$$|T((1-\psi_n) f)| \leqslant \varepsilon \|f\|_{C_N(\mathbf{R}^n)}$$

pour tous les $n > A$. Ce qui prouve le lemme.

Corollaire. *Pour toute fonction $f \in C_N(\mathbf{R}^n)$, il existe une suite $\{\varphi_n\}_{n \geqslant 0} \subset C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ telle que*

$$\lim_{n \to \infty} L(\varphi_n) L(f) \tag{1.4}$$

pour tout $L \in C_N^+(\mathbf{R}^n)$. Si $f \neq 0$, il existe une $T_f \in C_N^+(\mathbf{R}^n)$ telle que $T_f(f) \neq 0$.

Démonstration. Soit $L \in C_N^+(\mathbf{R}^n)$. Pour tout $f \in C_N(\mathbf{R}^n)$, on a

$$L(f) = L(\psi_n f) + L((1-\psi_n) f). \tag{1.5}$$

On remarquera que les fonctions $\psi_n f$ sont à support compact et continues pour tout $n>0$. Donc, pour tout n, il existe une fonction $\varphi_n \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ telle que

$$\|\psi_n f - \varphi_n\|_{C_N(\mathbf{R}^n)} \leqslant 1/n.$$

Le lemme 1.1 nous dit que pour tout $\varepsilon>0$, il existe un $M>0$ tel que $|L((1-\psi_n)f)|<\varepsilon\|f\|_{C_N(\mathbf{R}^n)}$ pour $n>M$. Donc, en tenant compte de (1.5), on obtient

$$|L(f)-L(\varphi_n)| \leqslant \frac{1}{n}\|L\|_{C_N^*(\mathbf{R}^n)}+\varepsilon\|f\|_{C_N(\mathbf{R}^n)}. \tag{1.6}$$

Cette relation entraîne (1.4), puisque ε est arbitraire.

Si $\bar{f}\neq 0$, il existe un $x_0\in\mathbf{R}^n$ tel que $\bar{f}(x_0)\neq 0$. La fonctionnelle δ_{x_0} définie par la formule

$$\delta_{x_0}(f)=f(x_0)$$

appartient à $\mathscr{L}_N$ et $\delta_{x_0}(\bar{f})\sim\bar{f}(x_0)\neq 0$. Ce que nous voulions.

Introduisons le produit de convolution des fonctionnelles de $C_N^+(\mathbf{R}^n)$ et des fonctions de $C_N(\mathbf{R}^n)$. Mais auparavant définissons les applications linéaires continues τ_h et « $\check{}$ » de l'espace $C_N(\mathbf{R}^n)$ dans lui-même :

$$\tau_h f(x) \stackrel{\text{déf}}{=} f(x-h), \qquad f\in C_N(\mathbf{R}^n),$$

$$\check{f}(x) \stackrel{\text{déf}}{=} f(-x).$$

Définition. On appellera *produit de convolution d'une fonctionnelle* $T\in C_N^+(\mathbf{R}^n)$ *et d'une fonction* $f\in C_N(\mathbf{R}^n)$ la fonction F définie par la formule

$$F(h)=T((\tau_h f)^{\check{}})$$

et l'on notera

$$T*f(h) \stackrel{\text{déf}}{=} T((\tau_h f)^{\check{}}). \tag{1.7}$$

Le produit de convolution est défini sur l'espace $\mathbf{R}^n$ tout entier, puisque $(\tau_h f)^{\check{}}\in C_N(\mathbf{R}^n)$ pour tout $h\in\mathbf{R}^n$.

De (1.7) on déduit la majoration

$$|T*f(h)| \leqslant \|T\|_{C_N^*}\|f\|_{C_N}(1+|h|)^N \tag{1.8}$$

Bien plus, $T*f\in C_N(\mathbf{R}^n)$. En effet, soient $T\in C_N^+$, $f\in C_N(\mathbf{R}^n)$ et $h_0\in\mathbf{R}^n$. Alors, pour tout h tel que $|h-h_0|<\delta$, on a

$$\|\tau_h f\|_{C_N(\mathbf{R}^n)} \leqslant \|f\|_{C_N(\mathbf{R}^n)}(1+|h_0|+\delta)^N.$$

Donc la famille de fonctions $\{\tau_h f\}_{|h-h_0|<\delta}$ est uniformément bornée dans $C_N(\mathbf{R}^n)$. Du lemme 1.1 il s'ensuit que pour tout $\varepsilon>0$, il existe un $M>0$ tel que pour tous les $n>M$, l'on a l'inégalité

$$|T((1-\psi_n)(\tau_h f))^{\check{}}|<\varepsilon/2. \tag{1.9}$$

La fonction $h \to \psi_n (\tau_h f)^\vee$, traitée comme une fonction à valeurs dans $C_N(\mathbf{R}^n)$, est continue, puisque $\psi_n \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. Donc, pour tout $\frac{\varepsilon}{2\|T\|_{C_N^*(\mathbf{R}^n)}} > 0$, on peut exhiber un $\delta > 0$ tel que

$$\|\psi_n((\tau_h - \tau_{h_0}) f)^\vee\|_{C_N(\mathbf{R}^n)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2\|T\|_{C_N^*(\mathbf{R}^n)}}. \tag{1.10}$$

De (1.5), (1.9) et (1.10) il résulte que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que

$$|T*f(h) - T*f(h_0)| \leqslant \varepsilon$$

dès que $|h - h_0| = \delta$.

Réciproque. *Pour toute fonctionnelle linéaire continue* $A : C_N(\mathbf{R}^n) \to C_N(\mathbf{R}^n)$ *commutant avec l'opérateur de translation* τ_h, *autrement dit pour tout* $h \in \mathbf{R}^n$ *et tout* $f \in C_N(\mathbf{R}^n)$ *tel que*

$$A\tau_h f = \tau_h A f, \tag{1.11}$$

il existe une fonctionnelle $T \in C_N^*(\mathbf{R}^n)$ *telle que*

$$Af = T*f.$$

Démonstration. Remarquons que

$$T(\check{f}) = T*f(0). \tag{1.12}$$

La fonctionnelle A étant continue, l'application $\check{f} \to Af(0)$ définit une fonctionnelle linéaire de $C_N^*(\mathbf{R}^n)$ que l'on désignera par T:

$$T(\check{f}) = Af(0).$$

En remplaçant f par $\tau_h f$ et en tenant compte de (1.11), on trouve que

$$T((\tau_h f)^\vee) = Af(h), \qquad \forall h \in \mathbf{R}^n.$$

Ce que nous voulions.

Signalons que T est susceptible de ne pas appartenir à $C_N^+(\mathbf{R}^n)$. Mais cette assertion permet de définir la convolution de fonctionnelles de $C_N^+(\mathbf{R}^n)$.

Soient $T_1, T_2 \in C_N^+(\mathbf{R}^n)$. Alors l'application

$$Af = T_1*(T_2*f)$$

est continue et commute avec les translations.

Il existe donc une fonctionnelle $T \in C_N^*(\mathbf{R}^n)$ telle que

$$T*f = T_1*(T_2*f). \tag{1.13}$$

Définition. Appelons la fonctionnelle T définie par la formule (1.13) *produit de convolution des fonctionnelles* T_1 *et* T_2:

$$T \stackrel{\text{déf}}{=} T_1*T_2.$$

Les relations (1.12) et (1.13) entraînent

$$T*f(0)=T(\check{f})=T_1((T_2*f)^{\vee}). \tag{1.14}$$

On voit que $T\in C_N^+(\mathbf{R}^n)$, puisque l'application $f\to(T_2*f)^{\vee}$ est continue et linéaire dans $C_N(\mathbf{R}^n)$ et $T_1\in C_N^+(\mathbf{R}^n)$. D'où le

Théorème. *L'espace $C_N^+(\mathbf{R}^n)$ est invariant par la convolution.*

Le théorème suivant exprime une importante propriété de la convolution.

Théorème 1.2. *La convolution des fonctionnelles de l'espace $C_N^+(\mathbf{R}^n)$ est commutative et continue.*

Démonstration. La continuité de la convolution résulte immédiatement de (1.14). En effet,

$$|T(\check{f})|\leqslant\|T_1\|_{C_N^*(\mathbf{R}^n)}\|T_2*f\|_{C_N(\mathbf{R}^n)}\leqslant\|T_1\|_{C_N^*(\mathbf{R}^n)}\|T_2\|_{C_N^*(\mathbf{R}^n)}\|f\|_{C_N(\mathbf{R}^n)}.$$

Donc

$$\|T_1*T_2\|_{C_N^*(\mathbf{R}^n)}\leqslant\|T_1\|_{C_N^*(\mathbf{R}^n)}\|T_2\|_{C_N^*(\mathbf{R}^n)}. \tag{1.15}$$

Pour prouver la commutativité, il faut montrer que pour toute fonctionnelle $f\in C_N(\mathbf{R}^n)$, on a l'inégalité

$$T_1*T_2(f)=T_2*T_1(f). \tag{1.16}$$

Si l'on démontre que (1.16) est valable pour toute fonctionnelle $f\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, il s'ensuivra du lemme 1.1 qu'elle le sera pour toute fonctionnelle $f\in C_N(\mathbf{R}^n)$. A cet effet, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 1.2. *Supposons que $\varphi_\varepsilon\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ et que $\varphi_\varepsilon(x)\geqslant 0$ pour $x\in\mathbf{R}^n$, $\int\varphi_\varepsilon(x)dx=1$, $\varphi_\varepsilon(x)=0$ pour tous les $|x|\geqslant\varepsilon>0$. Alors*

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}T*(\varphi_\varepsilon*\varphi)=T*\varphi,$$

pour tout $\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Démonstration. De la relation évidente

$$T*\varphi_\varepsilon*\varphi-T*\varphi=T*(\varphi_\varepsilon*\varphi-\varphi)$$

et de (1.15), on déduit que

$$\|T*(\varphi_\varepsilon*\varphi-\varphi)\|_{C_N(\mathbf{R}^n)}\leqslant\|T\|_{C_N^*(\mathbf{R}^n)}\|\varphi_\varepsilon*\varphi-\varphi\|_{C_N(\mathbf{R}^n)}. \tag{1.17}$$

Mais $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\|\varphi_\varepsilon*\varphi-\varphi\|_{C_N(\mathbf{R}^n)}=0$. Ce qui prouve le lemme.

Revenons à la démonstration du théorème.

Soient $\{T_1^n\}_{n>0}$ et $\{T_2^m\}_{m>0}$ des suites de fonctionnelles à support compact convergeant respectivement vers T_1 et T_2. Du lemme 1.2 et de (1.17) il vient alors

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(T_1^n*\varphi_\varepsilon)*(T_2^m*\varphi_\varepsilon)(f)=T_1*T_2(f).$$

Or $T_1^n * \varphi_\varepsilon$ et $T_2^m * \varphi_\varepsilon$ sont des fonctions continues à support compact, donc

$$(T_1^n * \varphi_\varepsilon) * (T_2^m * \varphi_\varepsilon)(f) = (T_2^m * \varphi_\varepsilon)(T_1^n * \varphi_\varepsilon)(f).$$

Ce que nous voulions.

Considérons encore une importante propriété des fonctionnelles de $C_N^+(\mathbf{R}^n)$. Soit $f \in C_N(\mathbf{R}^n)$. Sans nuire à la généralité on peut poser $n=2$. Définissons $F(x_1, x_2)$ par la formule suivante:

$$F(x_1, x_2) = \int_0^{x_2} f(x_1, \xi)\, d\xi. \tag{1.18}$$

Montrons que l'application $I_1 : f(x_1, x_2) \to F(x_1, x_2)$ définie par la formule (1.18) est une application linéaire continue de $C_N(\mathbf{R}^n)$ dans $C_{N+1}(\mathbf{R}^n)$. En effet,

$$\left| \int_0^{x_2} f(x_1, \xi) d\xi \right| \leqslant \|f\|_{C_N(\mathbf{R}^2)} |x_2| (1 + |x|)^N.$$

Donc

$$\|F(x_1, x_2)\|_{C_{N+1}(\mathbf{R}^2)} \leqslant \|f\|_{C_N(\mathbf{R}^2)}. \tag{1.19}$$

La linéarité de I_2 est évidente. Ce que nous voulions.

Pour toute fonctionnelle $T \in C_{N+1}^+(\mathbf{R}^2)$, définissons la fonctionnelle T^0 par la formule

$$T^0(f) = T(I_2(f)), \quad \forall f \in C_N(\mathbf{R}^2). \tag{1.20}$$

L'application I_2 et la fonctionnelle T étant continues, il vient que $T^0 \in C_N^*(\mathbf{R}^n)$. Or, $T \in C_{N+1}^+(\mathbf{R}^n)$, donc $T^0 \in C_N^+(\mathbf{R}^n)$. Par ailleurs, on voit sur (1.19) que

$$\|T^0\|_{C_N^*(\mathbf{R}^n)} \leqslant \|T\|_{C_{N+1}^*(\mathbf{R}^n)}.$$

La relation (1.20) définit donc une application linéaire continue $\hat{I}_2 : C_{N+1}^+ \to C_N^+$ jouissant de la propriété suivante: pour toute fonction $f \in C_N(\mathbf{R}^2)$ telle que $f'_{x_2} \in C_N(\mathbf{R}^2)$ et toute fonctionnelle $T \in C_{N+1}^+(\mathbf{R}^2)$

$$\hat{I}_2(T)(f'_{x_2}(x_1, x_2)) = T(f(x_1, x_2) - f(x_1, 0)).$$

Enonçons le resultat établi sous la forme générale suivante.

Théorème 1.3. *Il existe des applications linéaires continues* $\hat{I}_i : C_{N+1}^+(\mathbf{R}^n) \to C_N^+(\mathbf{R}^n)$ *possédant la propriété suivante : pour tout* $f \in C_N(\mathbf{R}^n)$ *tel que* $f'_{x_i} \in C_N(\mathbf{R}^n)$ *et tout* $T \in C_{N+1}^+(\mathbf{R}^n)$ *on a*

$$\hat{I}_i(T)(f'_{x_i}) = T(f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, 0, \ldots, x_n)),$$

où $\hat{I}_i$ est définie par une formule analogue à (1.20).

Passons à la construction de l'espace $\mathscr{B}_N(\mathbf{R}^n)$ après avoir défini préalablement la transformation de Fourier des fonctionnelles de l'espace $C_N^+(\mathbf{R}^n)$.

Définition. On appellera *transformée de Fourier d'une fonctionnelle* $L \in C_N^*(\mathbf{R}^n)$ la fonction

$$\hat{L}(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} L(e^{-ixt}), \tag{1.21}$$

image de L par la transformation de Fourier $\mathscr{F}$.

Etudions les propriétés de la transformation $\mathscr{F}$. Il est évident que $\mathscr{F}$ est linéaire. Soit $C^+ \stackrel{\text{déf}}{=} C_N^+$ pour $N=0$.

Lemme 1.3. *La transformation de Fourier applique monomorphement* $C^+(\mathbf{R}^n)$ *dans* $C(\mathbf{R}^n)$.

Démonstration. Soit $T \in C^+(\mathbf{R}^n)$, $T \neq 0$, et supposons que $T(e^{-itx})=0$ pour tout $t \in \mathbf{R}^n$. Il existe alors une fonctionnelle $f \in C(\mathbf{R}^n)$ telle que $T(f) \neq 0$. D'autre part, le lemme 1.1 affirme l'existence d'une suite $\{\varphi_n\}_{n>0} \subset C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} T(\varphi_n) = T(f)$. Chaque fonction φ_n peut être représentée sous la forme $\varphi_n(x) = \int e^{-itx} \tilde{\varphi}_n(t)\,dt$, dont l'intégrant est absolument intégrable. Mais alors

$$T(\varphi_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int T(e^{-itx})\, \tilde{\varphi}_n(t)\,dt = 0,$$

donc $\lim\limits_{n\to\infty} T(\varphi_n) = 0$. Ce qui prouve que l'application de Fourier admet un noyau trivial.

Prouvons la continuité de la fonction $\hat{T} = \mathscr{F}T$. Pour tout $n>0$, l'application $t \to \psi_n e^{-itx}$ est continue en tant qu'application de $\mathbf{R}^n$ dans $C(\mathbf{R}^n)$, donc

$$T(e^{-itx}) = T(\psi_n e^{-itx}) + T((1-\psi_n)\, e^{-itx}).$$

Pour tout $\varepsilon>0$, il existe: *primo*, un $A>0$ tel que $|T((1-\psi_n)\, e^{-itx})| < \varepsilon/2$, $\forall t \in \mathbf{R}^n$, dès que $n>A$; *secundo*, un $\delta>0$ tel que $|T(\psi_n(e^{-itx} - e^{-it_0x}))| < \varepsilon/2$ pour tous les $|t-t_0|<\delta$ et $n>A$. Donc $|T(e^{-itx} - e^{-it_0x}| < \varepsilon$ dès que $|t-t_0|<\delta$. Ce qui prouve le lemme.

Supposons maintenant que $N>0$. Alors, l'application $t \to pe^{-itx}$, où $p = p(x_1, \ldots, x_n)$ est un polynôme de degré $\leqslant N-1$, est continue en tant qu'application de $\mathbf{R}^n$ dans $C_N(\mathbf{R}^n)$. Alors, la fonction

$$F_p(t) = T(e^{-itx}\, p(x))$$

est une fonction continue pour tout $T \in C_N^*(\mathbf{R}^n)$. Remarquons que si le degré du polynôme p est égal à N, la fonction $F_p(t)$ peut en général ne pas être continue.

Soit $\mathscr{D}_t^\alpha$ un opérateur différentiel de degré $\leqslant N-1$. L'application $t \to \mathscr{D}_t^\alpha e^{-itx}$ est alors continue en tant qu'application de $\mathbf{R}^n$ dans $C_N(\mathbf{R}^n)$ et, par suite, l'on a l'égalité

$$T(\mathscr{D}_t^\alpha e^{-itx} = \mathscr{D}_t^\alpha T(e^{-itx}) = T((-ix)^\alpha e^{-itx})$$

pour tout $T \in C_N^*(\mathbf{R}^n)$. La dernière égalité exprime que la transformée de Fourier d'une fonction de $C_N^*(\mathbf{R}^n)$ est une fonction $N-1$ fois continûment différentiable, c'est-à-dire que

$$\mathscr{F}(C_N^*) \subset C^{(N-1)}.$$

Les fonctionnelles de $C_N^*(\mathbf{R}^n)$ sont justiciables de la proposition suivante.

Lemme 1.3*. *La transformation de Fourier applique monomorphement* $C_N^+(\mathbf{R}^n)$ *dans* $C^{(N)}(\mathbf{R}^n)$.

Démonstration. La trivialité du noyau se prouve comme dans le lemme 1.3.

Nous avons déjà établi que $\mathscr{F}(C_N^+(\mathbf{R}^n) \subset C^{(N-1)}(\mathbf{R}^n)$. Il nous suffit donc de prouver que pour tout polynôme de degré N, la fonction $F_p(t)$ est continue quel que soit $T \in C_N^+(\mathbf{R}^n)$.

L'application $f \to \dfrac{f}{(1+|x|)^N}$ applique continûment $C_N(\mathbf{R}^n)$ dans $C(\mathbf{R}^n)$. Donc la formule

$$L(pe^{ixt}) = L(1+|x|)^N \frac{pe^{-ixt}}{(1+|x|)^N} = (L \circ 1 + |x|)^N \left(\frac{pe^{-ixt}}{1+|x|^N}\right) = \hat{L}\left(\frac{pe^{-ixt}}{(1+|x|)^N}\right)$$

entraîne que $\hat{L} \in C^+(\mathbf{R}^n)$. Comme dans le lemme 1.3, on peut montrer maintenant que la fonction $\hat{L}\left(\dfrac{p(x)\,e^{-itx}}{(1+|x|)^N}\right)$ est continue. C.Q.F.D.

Appelons $\mathscr{B}_N(\mathbf{R}^n)$ l'image de l'espace $C_N^+(\mathbf{R}^n)$ par la transformation de Fourier. Du lemme 1.3* il s'ensuit que la transformation de Fourier $\mathscr{F}$ met $C_N^+(\mathbf{R}^n)$ et $\mathscr{B}_N(\mathbf{R}^n)$ en correspondance biunivoque, ce qui nous permet de munir $\mathscr{B}_N^*(\mathbf{R}^n)$ de la norme

$$\|\varphi\|_{\mathscr{B}_N(\mathbf{R}^n)} \overset{\text{déf}}{=} \|\mathscr{F}^{-1}\varphi\|_{C_N^*(\mathbf{R}^n)}. \tag{1.22}$$

L'espace $C_N^+(\mathbf{R}^n)$ étant fermé dans $C_N^*(\mathbf{R}^n)$, il s'ensuit que $\mathscr{B}_N(\mathbf{R}^n)$ est un espace de Banach pour la norme (1.22).

Si $\mathscr{D}_t^\alpha$ est un opérateur différentiel de degré $\leqslant N$, alors pour tout $\varphi \in \mathscr{D}_N(\mathbf{R}^n)$, on a

$$\mathscr{D}_t^\alpha = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \|\mathscr{F}^{-1}(\varphi)\|((-ix)^\alpha e^{-itx}).$$

Donc

$$|\mathscr{D}_t^\alpha \varphi(t)| \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \|\mathscr{F}^{-1}(\varphi)\|_{C_N^*(\mathbf{R}^n)}.$$

Cette inégalité exprime que pour tout $\varphi \in \mathscr{B}_N(\mathbf{R}^n)$

$$\|\varphi\|_{C^{(N)}(\mathbf{R}^n)} \leqslant \|\varphi\|_{\mathscr{B}_N(\mathbf{R}^n)}$$

c'est-à-dire que $\mathscr{B}_N(\mathbf{R}^n)$ est continûment plongé dans $C^{(N)}(\mathbf{R}^n)$.

Soient T_1, $T_2 \in C_N^+(\mathbf{R}^n)$. De la définition de la convolution de fonctionnelles et du théorème 1.2, il résulte que

$$(T_2 * T_1) = (T_1 * T_2) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} T_1 (T_2 (e^{-i(x+y)t})) = (2\pi)^{n/2} T_1 T_2 .$$

De (1.15) il vient

$$\| T_1 \cdot T_2 \|_{\mathscr{B}_N(\mathbf{R}^n)} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \| T_2 * T_1 \|_{C_N^*(\mathbf{R}^n)} \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \| T_2 \|_{C_N^*(\mathbf{R}^n)} \cdot \| T_1 \|_{C_N^*(\mathbf{R}^n)} .$$

Nous avons ainsi prouvé le

Théorème 1.4. *L'espace $\mathscr{B}_N(\mathbf{R}^n)$ est une algèbre de Banach pour la multiplication ordinaire de fonctions, continûment plongée dans l'algèbre de Banach $C^{(N)}(\mathbf{R}^n)$.*

En complète analogie avec le théorème 1.3, on peut obtenir la proposition suivante : *si $f \in C_N(\mathbf{R}^2)$, l'application $I : f \to \int_0^x f(\xi, x-\xi)\, d\xi$ est continue et envoie linéairement $C_N(\mathbf{R}^2)$ dans $C_{N+1}(\mathbf{R})$ et pour tout $T \in C_{N+1}^+(\mathbf{R})$, la fonctionnelle L définie par la formule*

$$L(f) = T(I(f)) \tag{1.23}$$

appartient à $C_N^+(\mathbf{R}^2)$.

La formule (1.23) définit donc une application linéaire continue de $C_{N+1}^+(\mathbf{R})$ dans $C_N^+(\mathbf{R}^2)$.

Dans (1.23) substituons la fonction $e^{-it_1x_1 - it_2x_2}$ à f. Alors la fonction

$$\tilde{L}(t_1, t_2) = T(I(e^{-it_1x_1 - it_2x_2}) \tag{1.24}$$

appartient à $\mathscr{B}_N(\mathbf{R}^2)$. Mais

$$I(e^{-it_1x_1} - e^{it_2x_2}) = \frac{e^{it_1x} - e^{it_2x}}{i(t_1 - t_2)}$$

Par suite

$$T(I(e^{-it_1x_1 - it_2x_2}) = -i \frac{T(t_1) - T(t_2)}{t_1 - t_2} .$$

Donc la fonction $\dfrac{\hat{T}(t_1) - \hat{T}(t_2)}{t_1 - t_2} \in \mathscr{B}(\mathbf{R}^2)$ et $\varphi \to \dfrac{\delta\varphi}{dx}(x; x')$ est une application linéaire continue de $\mathscr{B}_{N+1}(\mathbf{R})$ dans $\mathscr{B}_N(\mathbf{R}^2)$. Nous avons ainsi prouvé le

Théorème 1.5. *La dérivation aux différences est une application linéaire continue de $\mathscr{B}_{N+1}(\mathbf{R}^n)$ dans $\mathscr{B}_N(\mathbf{R}^{n+1})$.*

L'appartenance d'une fonction à l'espace $\mathscr{B}_N(\mathbf{R}^n)$ est souvent difficile à établir. On sait bien que l'espace $W_2^k(\mathbf{R}^n)$ est continûment plongé dans $\mathscr{B}_N(\mathbf{R}^2)$ pour $k > \dfrac{n}{2} + N$. Le lemme suivant établit un lien entre les espaces $W_2^k(\mathbf{R}^n)$ et $\mathscr{B}_N(\mathbf{R}^n)$.

Lemme 1.4. *L'espace* $W_2^k(\mathbf{R}^n)$ *est continûment plongé dans* $\mathscr{B}_N(\mathbf{R}^n)$ *pour* $k > n/2 + N$.

Démonstration. Soient $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ et $f \in C_N(\mathbf{R}^n)$. On a alors l'inégalité

$$\int \tilde{\varphi}(x) f(x)\,dx = \int \tilde{\varphi}(x)(1+|x|)^{N+n/2+\varepsilon} \frac{f(x)}{(1+|x|)^{N+n/2+\varepsilon}}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|_{C_N(\mathbf{R}^n)} \|\tilde{\varphi}\|_{\tilde{W}_2^{N+n/2+\varepsilon}(\mathbf{R}^n)} \sqrt{\int \frac{dx}{(1+|x|)^{n+\varepsilon}}} \leqslant C \|f\|_{C_N(\mathbf{R}^n)} \|\varphi\|_{W_2^{N+n/2+\varepsilon}(\mathbf{R}^n)},$$

ou $\tilde{\varphi}$ est la transformée de Fourier de φ. L'espace C_0^∞ est dense dans $W_2^k(\mathbf{R}^n)$, donc cette inégalité est valable pour toute $\varphi \in W_2^k$ et toute fonction φ définit une fonctionnelle linéaire continue de $C_N^+(\mathbf{R}^n)$ par la formule

$$T_\varphi(f) \stackrel{\text{déf}}{=} \int \tilde{\varphi}(x) f(x)\,dx, \quad \forall f \in C_N(\mathbf{R}^n).$$

Montrons maintenant que si $\varphi \in W_2^k$ et $\varphi \neq 0$, il existe une fonction $f \in C_N(\mathbf{R}^n)$ telle que $\int \tilde{\varphi} f\,dx \neq 0$. Supposons par absurde que $\int \tilde{\varphi} f\,dx = 0$. Alors pour toute fonction $\psi \in C_0^\infty$, on a $\int \tilde{\varphi}\psi\,dx = 0$. L'espace $W_2^k(\mathbf{R}^n)$ étant continûment plongé dans $L_2(\mathbf{R}^n)$ et l'espace $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ dense dans $L_2(\mathbf{R}^n)$, il vient que $\varphi = 0$. L'inégalité ci-dessus nous dit que $W_2^k(\mathbf{R}^n)$ est continûment plongé dans $C_N^+(\mathbf{R}^n)$, donc $W_2^k(\mathbf{R}^n)$ l'est continûment dans $\mathscr{B}_N(\mathbf{R}^n)$. Ce que nous voulions.

Appelons $C_N[\mathbf{R}^n, B]$ l'ensemble de toutes les fonctions continues sur $\mathbf{R}^n$, à valeurs dans un espace de Banach B et de norme finie

$$\|f\|_{C_N[\mathbf{R}^n, B]} \stackrel{\text{déf}}{=} \sup \frac{\|f(x)\|_B}{(1+|x|)^N}.$$

Définissons l'opération d'accouplement des espaces $C_N^+(\mathbf{R}^n)$ et $C_N[\mathbf{R}^n, B]$. Soient $L \in C_N^+$ et $f \in C_N[\mathbf{R}^n, B]$. Définissons sur B^* la fonctionnelle linéaire $\langle L, f\rangle$ par la formule

$$\langle L, f\rangle(h^*) = L(h^* f). \tag{1.25}$$

Alors

$$|\langle L, f\rangle(h^*)| \leqslant \|L\|_{C_N^*(\mathbf{R}^n)} \cdot \|h^*\|_{B^*} \cdot \|f\|_{C_N[\mathbf{R}^n, B]},$$

donc $\langle L, f\rangle \in B^{**}$. L'application $I : C_N^+(\mathbf{R}^n)\, C_N[\mathbf{R}^n, B] \to B^{**}$ définie par la formule (1.25) s'appelle un *accouplement* des espaces $C_N^+(\mathbf{R}^n)$ et $C_N[\mathbf{R}^n, B]$.

Lemme 1.5. *La fonctionnelle* $\langle L, f\rangle$ *définie par la formule* (1.25) *pour tous* $f \in C_N[\mathbf{R}^n, B]$ *et* $L \in C_N^+(\mathbf{R}^n)$ *appartient à* B (*traité comme un sous-espace de* B^{**}).

Démonstration. On sait qu'une fonctionnelle $g \in B^{**}$ est élément de B si et seulement si elle est continue pour la topologie faible de l'espace B^*.

Soit $\{h_m^*\}_{m>0} \subset B^*$ une suite convergeant faiblement vers 0. Montrons que $\langle L, f\rangle(h_m^*)$ converge faiblement aussi vers 0, ce qui achèvera la

démonstration du lemme. Le lemme 1.1 nous dit que pour tout $\varepsilon>0$, il existe un $M>0$ tel que pour tous les $n>M$

$$|L(h^*(1-\psi_n)f)|+\varepsilon\,||h^*f||\leqslant\varepsilon\,||h^*||_{B^*}||f||_{C_N[\mathbf{R}^n,\,B]}.$$

Toute suite faiblement convergente est bornée. Il existe donc un $\overline{M}(\varepsilon)>0$ tel que pour tous les $n>\overline{M}(\varepsilon)$ l'on a

$$|\langle L,\,f\rangle(h_m^*)-\langle L,\,\psi_n f\rangle(h_m^*)|<\varepsilon. \tag{1.26}$$

La fonction $\psi_n f$ est continue et à support compact. Il existe donc une suite de fonctions f_n prenant un nombre fini de valeurs non nulles, telle que $||f_n-f||_{C_N[\mathbf{R}^n,\,B]}<\varepsilon$. Mais alors $\langle L,\,f_n\rangle(h_m^*)\to 0$ pour $m\to\infty$. En définitive, pour tout $\varepsilon>0$, il existe un $M'>0$ tel que

$$|\langle L,\,f\rangle(h_m^*)|<3\varepsilon$$

quel que soit $m>M'$. Ce que nous voulions.

Donc l'accouplement est une application bilinéaire continue de $C_N^+(\mathbf{R}^n)\times C_N[\mathbf{R}^n,B]$ dans B.

De même que dans le chapitre précedent, on peut construire une algèbre $\mathscr{B}_{s_1,\ldots,s_N}(\mathbf{R}^N)$, où $s_1,\ldots,s_N$ sont des entiers. A cet effet, appelons $C^+_{s_1,\ldots,s_N}(\mathbf{R}^N)$ l'espace de Banach des fonctions continues sur $\mathbf{R}^n$, de norme finie

$$||g||_{C_{s_1,\ldots,s_N}(\mathbf{R}^n)}\overset{\text{déf}}{=}\sup_{x\in\mathbf{R}^n}\frac{|g(x)|}{(1+|x_1|)^{s_1}\ldots(1+|x_N|)^{s_N}}.$$

Appelons $C^+_{s_1,\ldots,s_N}(\mathbf{R}^N)$ l'adhérence de l'espace des fonctionnelles continues à support compact dans $C_{s_1,\ldots,s_N}(\mathbf{R}^N)$. Alors, comme plus haut, l'espace $\mathscr{B}_{s_1,\ldots,s_N}(\mathbf{R}^N)$ se construit comme l'image de $C^+_{s_1,\ldots,s_N}(\mathbf{R}^N)$ par la transformation de Fourier $\mathscr{F}$. Cette transformation établit un isomorphisme isométrique entre $\mathscr{B}_{s_1,\ldots,s_N}(\mathbf{R}^N)$ et $C^+_{s_1,\ldots,s_N}(\mathbf{R}^N)$.

Désignons par $\mathscr{L}$ l'enveloppe linéaire de l'ensemble

$$C_0^\infty(\mathbf{R}^N)\cup\{\delta_\xi\}_{\xi\in\mathbf{R}^N},\qquad \delta_\xi\in\mathbf{C}^*_{s_1,\ldots,s_N}(\mathbf{R}^N),$$

par $C^+_{s_1,\ldots,s_N}(\mathbf{R}^N)$, l'adhérence de $\mathscr{L}$ dans $C^*_{s_1,\ldots,s_N}(\mathbf{R}^N)$.

Construisons un espace de Banach $\mathscr{B}_{s_1,\ldots,s_N}(\mathbf{R}^N)$, isométrique à l'espace $C^+_{s_1,\ldots,s_N}$ de même qu'au chapitre II nous avons construit $\mathscr{B}_s(\mathbf{R}^N)$ pour $C_s^+(\mathbf{R}^N)$. L'isomorphisme isométrique utilisé sera appelé *transformation de Fourier* et désigné par la lettre F

Définissons l'espace $W_2^{s_1,\ldots,s_N}(\mathbf{R}^N)$ comme le complété de l'espace $C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ pour la norme

$$||\varphi||^2_{W_2^{s_1,\ldots,s_N}(\mathbf{R}^N)}=\int_{\mathbf{R}^N}(1+p_1^2)^{s_1}\ldots(1+p_N^2)^{s_N}\,|\tilde{\varphi}(p)|^2\,dp,$$

où $\tilde{\varphi}=F\varphi$. Supposons maintenant que $C^{s_1,\ldots,s_N}(\mathbf{R}^N)$ est l'espace des fonctions $f:\mathbf{R}^N\to C$ dont, pour $0\leqslant k_i\leqslant s_i$, sont continues les dérivées $\dfrac{\partial^{k_1+\ldots+k_N}f(x)}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_N^{k_N}}$ et finie la norme

$$\|f\|_{C^{s_1,\ldots,s_N}(\mathbf{R}^N)}=\max_{0\leqslant k_i\leqslant s_i}\sup_{x\in\mathbf{R}^N}|D^kf(x)|,\qquad k=(k_1,\ldots,k_N).$$

Théorème 1.2*. *Si $k_i>s_i+1/2$, on a les inclusions*

$$W_2^{k_1,\ldots,k_N}(\mathbf{R}^N)\subset\mathscr{B}_{s_1,\ldots,s_N}(\mathbf{R}^N)\subset C^{s_1,\ldots,s_N}(\mathbf{R}^N).$$

La démonstration est identique à celle des théorèmes 4.4 et 4.5 du chapitre II.

§ 2. Fonctions de deux opérateurs hermitiens non commutables

Soient A et B des opérateurs hermitiens dans un espace hilbertien séparable H, T un opérateur de la classe de Hilbert-Schmidt $B_2(H)$.

Au § 10 du chapitre III, au couple d'opérateurs (A, B) on a associé un couple $(\vec{A}, \overleftarrow{B})$ d'opérateurs commutables sur un ensemble partout dense et agissant dans l'espace hilbertien $B_2(H)$. On a l'homomorphisme

$$\mathscr{M}^{\rightarrow\ \leftarrow}_{A,B}:C(\mathbf{R}^2)\to\mathrm{Op}(B_2(H)),$$

qui à toute fonction $f\in C(\mathbf{R}^2)$ associe l'opérateur $f(\vec{A}, \overleftarrow{B})$, $\|f(\vec{A}, \overleftarrow{B})\|_{B_2(H)}\leqslant\|f\|_{C(\mathbf{R}^2)}$. Pour T fixe, l'homomorphisme $\mathscr{M}^{\rightarrow\ \leftarrow}_{A,B}$ induit l'application

$$\mathscr{M}^{3\ 2\ 1}_{A,T,B}:C(\mathbf{R}^2)\to B_2(H)$$

à l'aide de la formule

$$\mathscr{M}^{3\ 2\ 1}_{A,T,B}f\overset{\text{déf}}{=}f(\vec{A}, \overleftarrow{B})\,T.$$

Nous écrirons simplement $\mathscr{M}$ au lieu de $\mathscr{M}^{3\ 2\ 1}_{A,T,B}$ et poserons

$$\mathscr{M}f=\overset{2}{T}f\binom{3\ \ 1}{A,\ B}.$$

On a la majoration évidente

$$\left\|\overset{2}{T}f\binom{3\ \ 1}{A,\ B}\right\|\leqslant\|f\|_{C(\mathbf{R}^2)}\|T\|_2.$$

où $\|\cdot\|$ est la norme d'un opérateur dans H. Donc, $\mathscr{M}$ est un homomorphisme d'espaces normés. On remarquera que la définition de l'opérateur $\overset{2}{T}f\binom{3\ \ 1}{A,\ B}$ est compatible avec celle du paragraphe précédent: si $f\in\mathscr{B}_0(\mathbf{R}^2)$, alors

$$\overset{2}{T}f\binom{3\ \ 1}{A,\ B}h=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}^2}(F^{-1}f)(t_2)\,e^{-iAt_1}Te^{-iBt_2}h\,dt_1\,dt_2$$

pour tout $h \in H$. Par ailleurs,

$$\overset{2}{T} f_1\left(\overset{3}{A}\right) f_2\left(\overset{1}{A}\right) = f_1(A)\, \overset{2}{T} f_2(B).$$

Lemme 2.1. *On a la majoration*

$$\left\| \overset{2}{T}\varphi\left(\overset{3}{A}, \overset{1}{B}\right)\psi\left(\overset{3}{A}, \overset{1}{B}\right)\right\|_2 \leqslant \|\varphi\|_{C(\mathbf{R}^2)} \left\| \overset{2}{T}\psi\left(\overset{3}{A}, \overset{1}{B}\right)\right\|_2.$$

Démonstration. On a

$$\left\| \overset{2}{T}\varphi\left(\overset{3}{A}, \overset{1}{B}\right)\psi\left(\overset{3}{A}, \overset{1}{B}\right)\right\|_2 = \left\| \varphi(\vec{A}, \vec{B})\psi(\vec{A}, \vec{B})\, T\right\|_2 \leqslant$$

$$\leqslant \|\varphi\|_{C(\mathbf{R}^2)} \|\psi(\vec{A}, \vec{B})\, T\|_2 = \|\varphi\|_{C(\mathbf{R}^2)} \left\| \overset{2}{T}\psi\left(\overset{3}{A}, \overset{1}{B}\right)\right\|_2.$$

Le lemme 2.1 entraîne que le noyau de l'homomorphisme $\mathcal{M}$ est un idéal dans $C(\mathbf{R}^2)$.

Définition. On dira qu'un point $\lambda \in \mathbf{R}^2$ est un *point de la résolvante* $\rho\left(\overset{3}{A}, \overset{2}{T}, \overset{1}{B}\right)$ d'un couple d'opérateurs $\left(\overset{3}{A}, \overset{1}{A}\right)$ par rapport à un opérateur $\overset{2}{T}$ s'il existe un voisinage U de ce point tel que toute fonction $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ de support contenu dans U appartient au noyau d'un homomorphisme $\mathcal{M}$.

Le complémentaire de l'ensemble $\rho\left(\overset{3}{A}, \overset{2}{T}, \overset{1}{B}\right)$ dans $\mathbf{R}^2$ sera appelé *spectre* $\sigma\left(\overset{3}{A}, \overset{2}{T}, \overset{1}{B}\right)$ du couple d'opérateurs $\left(\overset{3}{A}, \overset{1}{B}\right)$ par rapport à $\overset{2}{T}$.

Théorème 2.1. 1) *Toute fonction de* $C(\mathbf{R}^2)$ *de support dans* $\rho\left(\overset{3}{A}, \overset{2}{T}, \overset{1}{B}\right)$ *appartient au noyau de l'homomorphisme* $\mathcal{M}$.

2) *Si* φ *appartient au noyau de l'homomorphisme* $\mathcal{M}$, *alors tout point* $\lambda \in \mathbf{R}^2$ *tel que* $\varphi(\lambda) \neq 0$ *appartient à* $\rho\left(\overset{3}{A}, \overset{2}{T}, \overset{1}{B}\right)$.

Démonstration. Soient $f \in C(\mathbf{R}^2)$, supp $f \subset \rho\left(\overset{3}{A}, \overset{2}{T}, \overset{1}{B}\right)$. Remarquons que $\rho\left(\overset{3}{A}, \overset{2}{T}, \overset{1}{B}\right)$ est le plus grand ensemble ouvert de $\mathbf{R}^2$ vérifiant la condition

$$\left[\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2) \text{ et supp } \varphi \subset \rho\left(\overset{3}{A}, \overset{2}{T}, \overset{1}{B}\right)\right] \Rightarrow \left[\overset{2}{T}\varphi\left(\overset{3}{A}, \overset{1}{B}\right) = 0\right].$$

Supposons que le support f est compact. Il existe alors une suite $\{f_n\}$ de fonctions de C_0^∞ telle que supp $f_n \subset \rho\left(\overset{3}{A}, \overset{2}{T}, \overset{1}{B}\right)$ et $\lim_{n\to\infty} \|f_n(x) - f(x)\|_{C(\mathbf{R}^2)} = 0$. Donc

$$\overset{2}{T} f\left(\overset{3}{A}, \overset{1}{B}\right) = \lim_{n\to\infty} \overset{2}{T} f_n\left(\overset{3}{A}, \overset{1}{B}\right) = 0.$$

Renonçons à la compacité du support de f. Considérons l'enveloppe linéaire dense dans H des vecteurs de la forme

$$q = \psi(B)\, h, \quad \psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}).$$

Il est évident qu'il suffit de prouver que la restriction de l'opérateur $\overset{2}{T}f\left(\begin{smallmatrix}3 & 1\\ A, & B\end{smallmatrix}\right)$ à L est nulle. Soit $q=\psi(B)h$, $\psi\in C_0^\infty(\mathbf{R})$ et soit $\{\varphi_n\}$ une suite de fonctions de $C_0^\infty(\mathbf{R})$ telle que $\varphi_n(A)$ converge simplement vers l'opérateur identique. On a

$$\overset{2}{T}f\left(\begin{smallmatrix}3 & 1\\ A, & B\end{smallmatrix}\right)q=\overset{2}{T}f\left(\begin{smallmatrix}3 & 1\\ A, & B\end{smallmatrix}\right)\psi\left(\begin{smallmatrix}1\\ B\end{smallmatrix}\right)h=\lim_{n\to\infty}\overset{2}{T}\varphi_n\left(\begin{smallmatrix}3\\ A\end{smallmatrix}\right)f\left(\begin{smallmatrix}3 & 1\\ A, & B\end{smallmatrix}\right)\psi\left(\begin{smallmatrix}1\\ B\end{smallmatrix}\right)h=0,$$

puisque le support de la fonction $\varphi_n(x_1)f(x_1, x_2)\psi(x_2)$ est compact et est contenu dans $\rho\left(\begin{smallmatrix}3 & 2 & 1\\ A, & T, & B\end{smallmatrix}\right)$. Ce qui prouve 1).

Supposons maintenant que $\overset{2}{T}\varphi\left(\begin{smallmatrix}3 & 1\\ A, & B\end{smallmatrix}\right)=0$ et que $\varphi(\lambda)\neq 0$, où λ est un point de $\mathbf{R}^2$. Considérons une fonction $e_\lambda\in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ nulle à l'extérieur d'un ε-voisinage de λ. Pour $\varepsilon>0$ assez petit, la fonction $F=e_\lambda/\varphi$ appartient à $C(\mathbf{R}^2)$. Mais $e_\lambda=\varphi F$ et la fonction φ appartient au noyau de l'homomorphisme $\mathscr{M}$. Ce noyau étant un idéal dans $C(\mathbf{R}^2)$, il s'ensuit que $\overset{2}{T}e_\lambda\left(\begin{smallmatrix}3 & 1\\ A, & B\end{smallmatrix}\right)=0$. C.Q.F.D.

Théorème 2.2. 1) *Pour qu'un point* $\lambda=(\lambda_1, \lambda_2)$ *appartienne à* $\rho\left(\begin{smallmatrix}3 & 2 & 1\\ A, & T, & B\end{smallmatrix}\right)$, *il est nécessaire et suffisant qu'existent des fonctions* φ_1, $\varphi_2\in C_0^\infty(\mathbf{R})$ *telles que* $\varphi_1(\lambda_1)\neq 0$, $\varphi_2(\lambda_2)\neq 0$ *et* $\varphi_1(A)T\varphi_2(B)=0$.

Démonstration. Soit $\lambda=(\lambda_1, \lambda_2)\in\mathbf{R}^2$ et supposons qu'existent des fonctions φ_1, $\varphi_2\in C_0^\infty(\mathbf{R})$ telles que $\varphi_1(\lambda_1)\neq 0$, $\varphi_2(\lambda_2)\neq 0$ et $\varphi_1(A)T\varphi_2(B)=0$. Montrons que $\lambda\in\rho\left(\begin{smallmatrix}3 & 2 & 1\\ A, & T, & B\end{smallmatrix}\right)$; la condition suffisante résulte directement de la définition. Il est évident qu'il existe un voisinage U de λ dans lequel la fonction $\varphi_1(\lambda_1)\varphi_2(\lambda_2)$ ne s'annule pas. Soit ψ une fonction arbitraire de $C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ à support contenu dans U. Posons $\chi(x)=\dfrac{\psi(x)}{\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)}$. Alors $\chi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ et $\psi(x)=\chi(x)\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)$. Le noyau de l'homomorphisme $\mathscr{M}$ étant un idéal dans $C(\mathbf{R}^2)$, il vient que $\overset{2}{T}\psi\left(\begin{smallmatrix}3 & 1\\ A, & B\end{smallmatrix}\right)=0$. C.Q.F.D.

Corollaire. 1) $\sigma\left(\begin{smallmatrix}3 & 2 & 1\\ A, & T, & B\end{smallmatrix}\right)\subset\sigma(A)\times\sigma(B)$;

2) *un point* (λ_1, λ_2) *appartient à* $\sigma\left(\begin{smallmatrix}3 & 2 & 1\\ A, & T, & B\end{smallmatrix}\right)$ *si et seulement si le point* (λ_2, λ_1) *appartient à* $\sigma\left(\begin{smallmatrix}3 & 2^* & 1\\ B, & T, & A\end{smallmatrix}\right)$.

Soit $C(\rho)$ l'ensemble de toutes les fonctions complexes continues sur $\mathbf{R}^2$ à support dans un ouvert ρ de $\mathbf{R}^2$. L'ensemble $C(\rho)$ est un idéal dans $C(\mathbf{R}^2)$. Considérons l'algèbre quotient de Banach $C(\mathbf{R}^2)/\overline{C(\rho)}$. Soit σ le complémentaire de ρ dans $\mathbf{R}^2$. Soit $C(\sigma)$ l'algèbre des fonctions complexes continues sur σ, munie de la norme usuelle

$$\|f\|_{C(\sigma)}=\sup_{x\in\sigma}|f(x)|.$$

Si f_1 et f_2 sont deux fonctions de $C(\mathbf{R}^2)$ auxquelles est associé un même élément de $C(\mathbf{R}^2)/\overline{C(\rho)}$, leurs restrictions à σ sont confondues. Donc la restriction

$$f \mapsto f|_\sigma$$

induit une application $\pi_0 : C(\mathbf{R}^2)/\overline{C(\rho)} \to C(\sigma)$ qui est une application sur $C(\sigma)$ tout entier, puisque toute fonction continue sur σ est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbf{R}^2$.

Lemme 2.2. *L'application π_0 préserve la norme.*
La démonstration est laissée au soin du lecteur.

Du lemme 2.2 il résulte que π_0 est un isomorphisme. Identifions les algèbres $C(\mathbf{R}^2)/\overline{C(\rho)}$ et $C(\sigma)$ au moyen de cet isomorphisme.

Théorème 2.3. *Soit $\pi : f \mapsto f|_{\sigma\binom{3\ 2\ 1}{A,\ T,\ B}}$ une application projective de $C(\mathbf{R}^2)$ sur $C\left(\sigma\binom{3\ 2\ 1}{A,\ T,\ B}\right)$. On a alors la décomposition*

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_\sigma \pi, \tag{2.1}$$

$\mathcal{M}_\sigma : C\left(\sigma\binom{3\ 2\ 1}{A,\ T,\ B}\right) \to B_2(H)$ est ici un homomorphisme d'espaces de Banach défini de façon unique par la formule (2.1).

On a les majorations :

$$\|\mathcal{M}_\sigma\| \leqslant \|T\|_2, \qquad \|\mathcal{M}_\sigma \varphi\psi\|_2 \leqslant \|\varphi\|_{C\left(\sigma\binom{3\ 2\ 1}{A,\ T,\ B}\right)} \|\mathcal{M}_\sigma \psi\|_2.$$

Nous laissons la démonstration au lecteur.

Formulons enfin un théorème important pour certaines applications.

Théorème 2.4. *Soit φ une fonction réelle continue sur $\sigma\binom{3\ 2\ 1}{A,\ T,\ B}$. Alors*

$$\left\| {}^{2}Te^{i\varphi\binom{3\ 1}{A,\ B}} \right\|_2 = \|T\|_2.$$

Ce théorème résulte immédiatement de l'unitarité de l'opérateur $e^{i\varphi(\vec{A}, \vec{B})}$ (cf. chapitre précédent et théorème 2.3).

§ 3. Fonctions d'opérateurs non commutables

Définissons l'espace $C_{s_1,\ldots,s_N}(\mathbf{R}^N, B)$ comme nous avons défini l'espace $C_s(\mathbf{R}, B)$ au chapitre III. Si $f \in C^+_{s_1,\ldots,s_N}(\mathbf{R}^N)$ et $G \in C_{s_1,\ldots,s_N}(\mathbf{R}^N, B)$, alors l'intégrale

$$\int_{\mathbf{R}^N} f(x) G(x)\, dx$$

sera comprise au même sens que pour $N = 1$.

Soit l'opérateur vectoriel (1.1). Pour tout $\varphi \in \mathscr{B}_{s_1,\dots,s_N}(\mathbf{R}^N)$ posons

$$T^{(1)}\,{}^{2}\,T^{(2)}\,{}^{4}\dots\,T^{(N-1)}\,{}^{2N-2}\,\varphi\left(A_1^{1}, A_2^{3}, \dots, A_N^{2N-1}\right) h \stackrel{\text{déf}}{=}$$

$$\stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbf{R}^N} \tilde{\varphi}(t)\, U(t)\, h\, dt, \qquad (3.1)$$

où $\tilde{\varphi} = F^{-1}\varphi$ et $U(t)$ est la fonction opératorielle (1.2).

Lemme 3.1. *On a la majoration*

$$\left\| T^{(1)}\,{}^{2}\dots\,T^{(N-1)}\,{}^{2N-2}\,\varphi\left(A_1^{1}, \dots, A_N^{2N-1}\right)\right\|_{B_\tau \to B_{\tau+k_1+\dots+k_N+l_1+\dots+l_{N-1}}} \leqslant$$

$$\leqslant C \left\|T^{(1)}\right\|_{B_{\tau+k_1} \to B_{\tau+k_1+l_1}} \times \dots$$

$$\times \left\| T^{2N-2} \right\|_{B_{\tau+k_1+\dots+k_{N-1}+l_1+\dots+l_{N-2}} \to B_{\tau+k_1+\dots+k_{N-1}+l_1+\dots+l_{N-1}}} \|\varphi\|_{B_{s_1,\dots,s_N}}$$

où c dépend seulement de τ et des opérateurs $A_1, \dots, A_N$.

La démonstration résulte immédiatement de l'inégalité

$$\left\| \int_{\mathbf{R}^N} f(x)\, G(x)\, dx \right\|_B \leqslant \|f\|_{c_{s_1,\dots,s_N}(\mathbf{R}^N)} \|G\|_{c_{s_1,\dots,s_N}(\mathbf{R}^N, B)}.$$

Remarque. Il est évident que dans les constructions développées ci-dessus, on peut admettre que les degrés s_i des générateurs $A_i : B_\tau \to B_{\tau+ki}$ sont fonctions de τ. Nous ne l'avons pas fait pour ne pas alourdir l'écriture. Dans chaque formule concrète, il est clair en quel point τ il faut prendre s_i. Une autre approche consiste à considérer des échelles de Banach $\{B_\tau\}$, où τ ne parcourt qu'un ensemble fini de valeurs. On peut alors choisir les degrés s_i indépendants de τ, mais l'opérateur

$$T^{(1)}\,{}^{2}\dots\,T^{(N-1)}\,{}^{2N-2}\,\varphi\left(A_1^{1}, \dots, A_n^{2N-1}\right) : B_\tau \to B_{\tau+k_1+\dots+k_N+l_1+\dots+l_{N-1}}$$

ne sera plus défini que pour certains τ.

Exemple. Soit

$$B_\tau = W_2^{-\tau}(\mathbf{R}), \qquad D = C_0^\infty(\mathbf{R}),$$

$$A_2\varphi(x) = x\varphi(x), \qquad A_1\varphi(x) = -i\varphi'(x),$$

$$T\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} \sqrt{1+p^{2m}}\, \tilde{\varphi}(p)\, dp, \qquad \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}).$$

Alors

$$k_1 = k_2 = 0, \qquad l = m, \qquad s_1 = 0,$$

$$s_2(\tau) = \begin{cases} -\tau & \textit{pour } \tau < 0, \\ 0 & \textit{pour } \tau \geqslant 0. \end{cases}$$

Il est immédiat de s'assurer que

$$T\varphi\left(\begin{matrix}3 & 1\\ A_2, & A_1\end{matrix}\right)\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ip\cdot x}\,\varphi(x,p)\sqrt{1+p^{2m}}\,\tilde{\psi}(p)\,dp,$$

où $\tilde{\psi}=F\psi$. Désignons

$$T\varphi\left(\begin{matrix}3 & 1\\ A_2, & A_1\end{matrix}\right)\psi(x)=L\left(\begin{matrix}2 & 1\\ x, & -i\partial/\partial x\end{matrix}\right)\psi(x),$$

où $L(p, x)=\varphi(p, x)\sqrt{1+p^{2m}}$. Le lemme 3.1 nous donne

$$\left\|L\left(\begin{matrix}2 & 1\\ x, & -i\partial/\partial x\end{matrix}\right)\right\|_{W_2^s(\mathbf{R})\to W_2^{s-m}(\mathbf{R})}\leqslant c\|\varphi\|_{\mathscr{B}_{s-m,0}(\mathbf{R}^2)},$$

où

$$\varphi(x_1, x_2)=\frac{L(x_1, x_2)}{\sqrt{1+x_2^{2m}}},\qquad c=\text{const}.$$

Exercice. Soit $\varphi\in\mathscr{B}_{1,0}(\mathbf{R}^2)$,

$$L(x, p)=\varphi(x, p)\sqrt{1+p^{2m}}.$$

Posons

$$L\left(\begin{matrix}2 & 1\\ x, & p\end{matrix}\right)U(x)\stackrel{\text{déf}}{=}\frac{1}{2\pi h}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{i}{h}p\cdot x}L(x, p)\,dp\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{i}{h}p\cdot\xi}U(\xi)\,d\xi,\qquad U\in C_0^\infty(\mathbf{R}).$$

Soit S une fonction réelle indéfiniment dérivable de support borné. Définissons l'opérateur: $T\stackrel{\text{déf}}{=}\sqrt{1+(p+S')^{2m}}$. Considérons le générateur $A\stackrel{\text{déf}}{=}p+S'$:

$$AU(x)=-ihU'(x)+S'(x)\,U(x).$$

Posons $T_n(\xi)=\varphi_n(\xi)\sqrt{1+\xi^{2m}}$, où $\{\varphi_n\}$ est la suite de fonctions de $C_0^\infty(\mathbf{R})$ définie dans le lemme 1.13 du chapitre III. Soit $TU=\lim_{n\to\infty}T_n(A)U$.

1) Démontrer que T est un transporteur de pas m dans $\{W_2^{-1}(\mathbf{R})\}$.
2) Prouver l'égalité

$$e^{-\frac{i}{h}S(x)}L\left(\begin{matrix}2 & 1\\ x, & p\end{matrix}\right)e^{\frac{i}{h}S(x)}U(x)=L\left(\begin{matrix}2 & 1\\ x, & p+S'\end{matrix}\right)U(x),$$

où

$$L\left(\begin{matrix}2 & 1\\ x, & p+S'\end{matrix}\right)\stackrel{\text{déf}}{=}\sqrt{1+(p+S')^m}\,\varphi\left(\begin{matrix}3 & 1\\ x, & p+S'\end{matrix}\right),\qquad U\in W_2^{-1}(\mathbf{R}).$$

3) Montrer que, considérée sur des fonctions U à support borné, cette égalité reste valable pour une fonction arbitraire $S\in C^\infty$

Notation. Si $\chi = \varphi\psi$, on écrira

$$T^{(1)} \overset{2}{\ldots} T^{(N-1)} \overset{2N-2}{} \chi\binom{1}{A_1, \ldots,} \overset{2N-1}{A_N} =$$

$$= T^{(1)} \overset{2}{\ldots} T^{(N-1)} \overset{2N-2}{} \varphi\binom{1}{A_1, \ldots,} \overset{2N-1}{A_N} \psi\binom{1}{A_1, \ldots,} \overset{2N-1}{A_N}.$$

Lemme 3.2. *Si* $\varphi(x) = \varphi_1(x_1)\,\varphi_2(x_2) \ldots \varphi_N(x_N)$, *où* $\varphi_i \in \mathscr{B}_{s_i}(\mathbf{R})$, *alors*

$$T^{(1)} \overset{2}{\ldots} T^{(N-1)} \overset{2N-2}{} \varphi\binom{1}{A_1, \ldots,} \overset{2N-1}{A_N} -$$

$$= \varphi_N(A_N)\, T^{(N-1)}\, \varphi_{N-1}(A_{N-1}) \ldots T^{(1)} \varphi_1(A_1).$$

La démonstration se déduit sans peine de (3.1).

Lemme 3.3. *L'enveloppe linéaire de l'ensemble des fonctions* ψ *de la forme*

$$\psi(x) = \psi_1(x_1) \ldots \psi_N(x_N), \qquad \psi_i \in \mathscr{B}_{s_i}(\mathbf{R}), \tag{3.2}$$

est dense dans $\mathscr{B}_{s_1, \ldots, s_N}(\mathbf{R}^N)$.

Démonstration. Il suffit de montrer que les combinaisons linéaires des fonctions de la forme (3.2) peuvent approcher dans l'espace $\mathscr{B}_{s_1, \ldots, s_N}(\mathbf{R}^N)$ les transformées de Fourier des fonctions de $C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ ainsi que les exponentielles

$$x \to e^{-ia_1x_1 - \ldots - ia_Nx_N}.$$

Ceci est évident pour les exponentielles, puisque

$$e^{-ia_1x_1 - \ldots - ia_Nx_N} = e^{-ia_1x_1} \ldots e^{-ia_Nx_N}.$$

Soit maintenant φ la transformée de Fourier d'une fonction de $C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$. Alors $\varphi \in W_2^l(\mathbf{R}^N)$ pour tout l. Toute fonction d'un espace de Sobolev peut être approchée d'aussi près que l'on veut pour la norme de cet espace par des combinaisons linéaires de produits de la forme (3.2), où tous les ψ_i appartiennent à $C_0^\infty(\mathbf{R})$ (montrer ceci). Pour achever la démonstration il reste à appliquer le théorème d'immersion 4.4 du chapitre II et le théorème 1.2.

Les lemmes 3.1 et 3.2 expriment qu'il existe un homomorphisme d'espaces de Banach :

$$\mathscr{M} : \mathscr{B}_{s_1, \ldots, s_N}(\mathbf{R}^N) \to \mathrm{Hom}\,(B_\tau, B_{\tau + k_1 + \ldots + k_N + l_1 + \ldots + l_{N-1}}),$$

défini par la formule (3.1), envoyant φ dans l'opérateur

$$T^{(1)} \overset{2}{\ldots} T^{(N-1)} \overset{2N-2}{} \varphi\binom{1}{A_1, \ldots,} \overset{2N-1}{A_N}$$

et tel que

$$T^{(1)} \overset{2}{\ldots} T^{(N-1)} \overset{2N-2}{} \varphi_1\binom{1}{A_1} \quad \varphi_2\binom{3}{A_2} \varphi_N\binom{2N-1}{A_N} =$$

$$= \varphi_N(A_N)\, T^{(N-1)}\, \varphi_{N-1}(A_{N-1})\, T^{(1)} \varphi_1(A). \tag{3.3}$$

Il résulte du lemme 3.3 que cet homomorphisme est défini de façon unique par la propriété 3.3.

Ainsi, on a le théorème suivant.

Théorème 3.1. *Il existe un homomorphisme*

$$\mathcal{M}:\varphi\to \overset{2}{T^{(1)}}\dots\overset{2N-1}{T^{(N-1)}}\varphi\begin{pmatrix}1 & & 2N-1\\ A_1,\dots, & & A_N\end{pmatrix}$$

et un seul de l'espace de Banach $\mathscr{B}_{s_1,\dots,s_N}(\mathbf{R}^N)$ *dans l'espace de Banach des opérateurs linéaires bornés partout définis agissant de* B_τ *dans* $B_{\tau+k_1+\dots+k_N+l_1+\dots+l_{N-1}}$, *doué de la propriété* (3.3).

§ 4. Spectre d'un opérateur vectoriel

Adoptons les conventions suivantes quant aux notations. Si un transporteur T est identique, on omettra de l'écrire dans les fonctions d'un opérateur vectoriel et on numérotera dans l'ordre les autres opérateurs. Exemple : au lieu de $\overset{2}{1}\varphi\begin{pmatrix}1 & 3\\ A, & A'\end{pmatrix}$ on écrira $\varphi\begin{pmatrix}1 & 2\\ A, & A'\end{pmatrix}$.

Soit $O:D_O\to B_\tau$, $D_O\supset D$. La restriction $O|_D$ traitée comme un opérateur de $B_{\tau'}$ dans $B_{\tau''}$ sera alors désignée par $\|O\|_{\tau'\to\tau''}$.

Le lemme suivant résulte immédiatement des définitions.

Lemme 4.1. *Soient* A_i, $i=1,\dots,N$, *des générateurs de degré* s_i *de pas* k_i *dans l'échelle* $\{B_\tau\}$, *et* $T^{(i)}$, $i=1,\dots,N-1$, *des transporteurs. Appelons* A_i' *l'opérateur* A_i *traité comme un générateur de pas* $k_i+\mu_i$. *Alors pour tous* $\psi\in\mathscr{B}_{s_1,\dots,s_N}(\mathbf{R}^N)$ *et* $h\in D$, *on a l'égalité*

$$\overset{2}{T^{(1)}}\dots\overset{2N-2}{T^{(N-1)}}\varphi\begin{pmatrix}1 & & 2N-1\\ A_1,\dots, & & A_N\end{pmatrix}h=\overset{2}{T^{(1)}}\dots\overset{2N-2}{T^{(N-1)}}\psi\begin{pmatrix}1 & & 2N-1\\ A_1',\dots, & & A_N'\end{pmatrix}h.$$

Lemme 4.2. *Soit*

$$\left\|\overset{2}{T^{(m)}}\varphi\begin{pmatrix}1 & 3\\ A_m, & A_{m+1}\end{pmatrix}\right\|_{\tau+k_1+\dots+k_m+l_1+\dots+l_{m-1}\to\tau+k_1+\dots+k_m+l_1+\dots+l_m}=M<\infty.$$

Alors

$$\left\|\overset{2}{T^{(1)}}\dots\overset{2N-2}{T^{(N-1)}}\varphi\begin{pmatrix}2m-1 & 2m+1\\ A_m, & A_{m+1}\end{pmatrix}\psi\begin{pmatrix}1 & & 2N-1\\ A_1,\dots, & & A_N\end{pmatrix}\right\|\leqslant$$

$$\leqslant cM\|\psi\|_{\mathscr{B}_{s_1,\dots,s_N}(\mathbf{R}^N)}\prod_{\substack{\alpha=1\\ \alpha\neq m}}^{N-1}\|T^{(\alpha)}_{\tau+k_1+\dots+k_\alpha+l_1+\dots+l_{\alpha-1}}\|.$$

Démonstration. Nous prouverons ce lemme pour $N=2$. Plus exactement, nous allons établir la majoration suivante :

$$\left\|\overset{2}{T}(\varphi\psi)\begin{pmatrix}1 & 3\\ A_1, & A_2\end{pmatrix}\right\|_{\tau\to\tau+k_1+k_2+l}\leqslant c\left\|\overset{2}{T}\varphi\begin{pmatrix}1 & 3\\ A_1, & A_2\end{pmatrix}\right\|_{\tau+k_1\to\tau+k_1+l}\|\psi\|_{\mathscr{B}_{s_1,\dots}(\mathbf{R}^2)}.$$

Soit $T' : B_{\tau+k_1} \to B_{\tau+k_1+l_1}$ la fermeture de la restriction de l'opérateur $\overset{2}{T}\varphi\left(\overset{1}{A_1}, \overset{3}{A_2}\right)$ à D. Alors

$$\overset{2}{T}(\varphi\psi)\left(\overset{1}{A_1}, \overset{3}{A_2}\right) = \overset{2}{T'}\psi\left(\overset{1}{A_1}, \overset{3}{A_2}\right).$$

En effet, si $h \in D$, alors

$$\overset{2}{T'}\psi\left(\overset{1}{A_1}, \overset{2}{A_2}\right) h = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}^2} \tilde{\psi}(t_1, t_2)\, U_{A_2}(t_2)\, T' U_{A_1}(t_1)\, h\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}^2} \tilde{\psi}(t_1, t_2)\, U_{A_2}(t_2) \left[\overset{2}{T}\varphi\left(\overset{1}{A_1}, \overset{3}{A_2}\right)\right] U_{A_1}(t_1)\, h\, dt =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbf{R}^2} \tilde{\psi}(t_1, t_2)\, dt \int_{\mathbf{R}^2} \tilde{\varphi}(\tau_1, \tau_2)\, U_{A_2}(\tau_2 + t_2)\, T U_{A_1}(\tau_1 + t_1)\, h\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}^2} (\varphi * \psi)(t_1, t_2)\, U_{A_2}(t_2)\, T U_{A_1}(t_1)\, h\, dt = \overset{2}{T}(\varphi\psi)\left(\overset{1}{A_1}, \overset{3}{A_2}\right) h.$$

Reste à appliquer le lemme 3.1 pour achever la démonstration.
Le théorème suivant se prouve exactement comme le lemme 4.2.

Théorème 4.1. *Pour tout entier l', on a la majoration*

$$\left\| \overset{2}{T}(\varphi\psi)\left(\overset{1}{A_1}, \overset{3}{A_2}\right) \right\|_{\tau \to \tau + k_1 + k_2 + l'} \leqslant c \left\| \overset{2}{T}\varphi\left(\overset{1}{A_1}, \overset{3}{A_2}\right) \right\|_{\tau + k_1 \to \tau + k_1 + l'} \|\psi\|_{\mathscr{B}_{s_1, s_2}(\mathbf{R}^2)}.$$

Lemme 4.3. *L'ensemble des fonctions $\varphi \in \mathscr{B}_{s,\, s'}(\mathbf{R}^2)$ telles que $\overset{2}{T}\psi\left(\overset{1}{A},\ \overset{3}{A'}\right) = 0$ est un idéal dans l'algèbre $\mathscr{B}_{s,\, s'}(\mathbf{R}^2)$.*

Démonstration. Soit $h \in B_\tau$. Alors, pour tout $\varphi \in \mathscr{B}_{s,\, s'}(\mathbf{R}^2)$

$$\left\| \overset{2}{T}\psi\left(\overset{1}{A},\ \overset{3}{A'}\right) \varphi\left(\overset{1}{A},\ \overset{3}{A'}\right) h \right\|_{\tau + k + l + k'} \leqslant$$

$$\leqslant c \|\varphi\|_{\mathscr{B}_{s_1, s_2}(\mathbf{R}^2)} \cdot \left\| \overset{2}{T}\psi\left(\overset{1}{A},\ \overset{3}{A'}\right) \right\|_{\tau + k \to \tau + k + l} \|h\|_\tau = 0.$$

Donc

$$\overset{2}{T}\psi\left(\overset{1}{A},\ \overset{3}{A'}\right) \varphi\left(\overset{1}{A},\ \overset{3}{A'}\right) = 0$$

pour tout $\varphi \in \mathscr{B}_{s,\, s'}(\mathbf{R}^2)$.

Soit $\mathscr{X}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & & 2N-2 & 2N-1\\ A_1, & T^{(1)}, & A_2, \ldots, & & T^{(N-1)}, & A_N\end{pmatrix}$ un opérateur vectoriel. Dans ce cas désignons par X l'idéal de l'algèbre $\mathscr{B}_{s_1,\ldots,s_N}(\mathbf{R}^N)$ constitué des fonctions φ telles que

$$\overset{2}{T}{}^{(1)}\ldots\overset{2N-2}{T}{}^{(N-1)}(\psi\varphi)\begin{pmatrix}1 & & 2N-1\\ A_1, \ldots, & & A_N\end{pmatrix}=0, \quad \forall\psi\in\mathscr{B}_{s_1,\ldots,s_N}(\mathbf{R}^N).$$

Le lemme 4.3 exprime que pour $N=2$ l'idéal X est confondu avec le noyau de l'homomorphisme

$$\mathscr{M}:\varphi\to\overset{2}{T}\varphi\begin{pmatrix}1 & 3\\ A_1, & A_2\end{pmatrix}.$$

Définition. On dira qu'un point $\lambda\in\mathbf{R}^N$ est un *point de la résolvante* de l'opérateur vectoriel

$$\mathscr{X}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & & 2N-3 & 2N-2 & 2N-1\\ A_1, & T^{(1)}, & A_2, \ldots, & & A_{N-1}, & T^{(N-1)}, & A_N\end{pmatrix},$$

s'il existe un voisinage U de ce point tel que toute fonction $\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ à support dans U est contenue dans l'idéal X construit à l'aide de l'homomorphisme

$$\mathscr{M}:\psi\to\overset{2}{T}{}^{(1)}\ldots\overset{2N-2}{T}{}^{(N-1)}\psi\begin{pmatrix}1 & & 2N-1\\ A_1, \ldots, & & A_N\end{pmatrix}.$$

Le complémentaire de la résolvante s'appelle *spectre* σ *de l'opérateur vectoriel* $\mathscr{X}$.

Lemme 4.4. *Soit* $\varphi\in C^\infty(\mathbf{R}^N)$ *une fonction appartenant à l'idéal* X *construit à l'aide de l'homomorphisme*

$$\psi\to\overset{2}{T}{}^{(1)}\ldots\overset{2N-2}{T}{}^{(N-1)}\psi\begin{pmatrix}1 & & 2N-1\\ A_1, \ldots, & & A_N\end{pmatrix}.$$

Alors tout point λ *tel que* $\varphi(\lambda)\neq 0$ *appartient à la résolvante de l'opérateur vectoriel*

$$\mathscr{X}=\begin{pmatrix}1 & 2 & & 2N-1\\ A_1, & T^{(1)}, \ldots, & & A_N\end{pmatrix}.$$

Démonstration. Supposons que $\varphi(\lambda)\neq 0$ et soit e_λ une fonction de $C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ égale à 1 dans un δ_1-voisinage de λ et nulle à l'extérieur d'un δ_2-voisinage de λ. Pour δ_2 assez petit, la fonction $\mathscr{F}=e_\lambda/\varphi$ appartient à $C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$. Mais $e_\lambda=\varphi\cdot\mathscr{F}$, et la fonction φ appartient à l'idéal X; donc $e_\lambda\in X$. Soit $\chi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ et supposons que le support de χ est contenu dans le δ_1-voisinage de λ. Alors $\chi(x)=\chi(x)\,e_\lambda(x)$, c'est-à-dire que $\chi\in X$. C.Q.F.D.

Pour $N=2$, les lemmes 4.3 et 4.4 entraînent le critère suivant.

Théorème 4.1. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point* $\lambda\in\mathbf{R}^2$ *appartienne à la résolvante de l'opérateur vectoriel* $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ A, & T, & A'\end{pmatrix}$ *est qu'il existe des fonctions* φ_1 *et* φ_2 *de* $C_0^\infty(\mathbf{R})$ *telles que* $\varphi_1(\lambda_1)\neq 0$, $\varphi_2(\lambda_2)\neq 0$ *et de plus* $\varphi_2(A')\,T\varphi_1(A)=0$.

§ 5. Fonctions de deux ensembles générateurs

Soient $A=(A_1,\dots,A_k)$ un ensemble générateur de degré s de couple déterminant d'espaces (B_1, B_2), T un homomorphisme de B_2 dans B_3 et $A'=(A'_1,\dots,A'_k)$, un ensemble générateur de degré s' de couple déterminant (B_3, B_4). Nous admettrons que $B_1 \subset B_2$ et $B_3 \subset B_4$.

Soient $\{U(t)\}$ un groupe à k paramètres engendré par A, $\{V(t')\}$ un groupe à k' paramètres engendré par l'ensemble générateur A'.

Comme plus haut, définissons l'algèbre de Banach $\mathscr{B}_{s,s'}(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k'})$ à l'aide de l'espace $C_{s,s'}(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k'})$ des fonctions continues sur $\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k'}$ de norme finie

$$\|f\|_{C_{s,s'}(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k'})} = \sup_{\substack{x \in \mathbf{R}^k \\ y \in \mathbf{R}^{k'}}} \frac{|f(x, y)|}{(1+|x|)^s (1+|y|)^{s'}}.$$

Si $\varphi \in \mathscr{B}_{s,s'}(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k'})$ et $h \in B_1$, on posera par définition

$$\overset{2}{T}\varphi\left(\begin{matrix}1 & 3\\ A, & A'\end{matrix}\right)h = (2\pi)^{-\frac{k+k'}{2}} \int_{\mathbf{R}^{k+k'}} \tilde{\varphi}(t,\tau)\, e^{-iA'\tau} T e^{-iAt}\, h\, dt\, d\tau,$$

où $e^{-iAt}: B_1 \to B_2$ est la fermeture de l'opérateur $U(t)$; $e^{-iA'(t)}: B_3 \to B_4$ est la fermeture de l'opérateur $V(t)$.

Définition. On dira que $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k'}$ est un *point de la résolvante* du couple d'ensembles générateurs $\left(\begin{matrix}1 & 3\\ A, & A'\end{matrix}\right)$ par rapport au transporteur $\overset{2}{T}$ s'il existe un voisinage U de ce point tel que toute fonction $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k'})$ à support dans U appartient à l'idéal X de l'algèbre $\mathscr{B}_{s,s'}(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k'})$ construit à l'aide de l'homomorphisme

$$\mathscr{M}: \psi \to \overset{2}{T}\psi\left(\begin{matrix}1 & 3\\ A, & A'\end{matrix}\right)$$

de l'algèbre de Banach $\mathscr{B}_{s,s'}(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k'})$ dans l'espace de Banach $\mathrm{Hom}(B_1, B_4)$:

$$X = \{\varphi \,|\, \mathscr{M}\varphi\psi = 0, \quad \forall \psi \in \mathscr{B}_{s,s'}(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k'})\}.$$

Le complémentaire de la résolvante s'appelle *spectre* σ *du couple* $\left(\begin{matrix}1 & 3\\ A, & A\end{matrix}\right)$ *par rapport à l'opérateur* $\overset{2}{T}$.

Soient (λ, μ) un point de la résolvante du couple $\left(\begin{matrix}1 & 3\\ A, & A'\end{matrix}\right)$ par rapport à $\overset{2}{T}$, φ une fonction indéfiniment dérivable partout sauf en (λ, μ). Supposons par ailleurs que U est le voisinage du point (λ, μ) de la définition et que $\overline{\varphi}$ et $\overline{\overline{\varphi}}$ sont des fonctions de $\mathscr{B}_{s,s'}(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k'})$ indéfiniment dérivables dans U qui sont confondues avec la fonction φ à l'extérieur d'un ensemble fermé contenu dans U. Sous ces conditions, $\overline{\varphi} - \overline{\overline{\varphi}} \in C_0^\infty(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k'})$ et $\mathrm{supp}\,(\overline{\varphi} - \overline{\overline{\varphi}}) \subset U$, de sorte que la fonction $\overline{\varphi} - \overline{\overline{\varphi}}$ appartient à l'idéal X.

Pour la concision nous désignerons l'élément $\{\overline{\varphi}\}=\{\overline{\overline{\varphi}}\}$ de l'algèbre quotient $\mathscr{B}_{s,s'}(\mathbf{R}^k\times\mathbf{R}^{k'})/X$ par $\{\varphi\}$ (et parfois même par φ) bien que φ soit susceptible de ne pas appartenir à $\mathscr{B}_{s,s'}(\mathbf{R}^k\times\mathbf{R}^{k'})$. L'homomorphisme $\mathscr{M}$ est justiciable du développement suivant: $\mathscr{M}=\pi\mathscr{M}_\sigma$, où

$$\mathscr{B}_{s,s'}(\mathbf{R}^k\times\mathbf{R}^{k'})\xrightarrow{\pi}\mathscr{B}_{s,s'}(\mathbf{R}^k\times\mathbf{R}^{k'})/X\xrightarrow{\mathscr{M}_\sigma}\operatorname{Hom}(B_1, B_4).$$

Donc

$$\overset{2}{T}{}^{-}_{\varphi}\begin{pmatrix}1 & 3\\ A, & A'\end{pmatrix}=\overset{2}{T}{}^{\overline{\overline{\varphi}}}\begin{pmatrix}1 & 3\\ A, & A'\end{pmatrix}.$$

Nous désignerons cet opérateur par $\overset{2}{T}\varphi\begin{pmatrix}1 & 3\\ A, & A'\end{pmatrix}$ aussi et appellerons la fonction φ son *symbole*.

Lemme 5.1. *Supposons que le support d'une fonction* $\psi\in\mathscr{B}_{s,s'}(\mathbf{R}^k\times\mathbf{R}^{k'})$ *est contenu dans la résolvante du couple* $\begin{pmatrix}1 & 3\\ A, & A'\end{pmatrix}$ *par rapport à* $\overset{2}{T}$. *Alors* ψ *appartient à l'idéal* X *construit à l'aide de l'homomorphisme* $\mathscr{M}$.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que si le point (λ, μ) appartient à la résolvante du couple $\begin{pmatrix}1 & 3\\ A, & A'\end{pmatrix}$ par rapport à $\overset{2}{T}$, alors toute fonction de $\mathscr{B}_{s,s'}(\mathbf{R}^k\times\mathbf{R}^{k'})$ à support compris dans un voisinage assez petit du point (λ, μ) appartient à X. Ceci résulte du fait qu'une telle fonction peut être approchée pour la norme de $\mathscr{B}_{s,s'}(\mathbf{R}^k\times\mathbf{R}^{k'})$ d'aussi près que l'on veut par une fonction de $C_0^\infty(\mathbf{R}^k\times\mathbf{R}^{k'})$ à support contenu dans un petit voisinage du point (λ, μ).

Supposons tout d'abord que la fonction ψ est à support compact. Elle peut alors être représentée par une somme d'un nombre fini de fonctions de X et par suite appartient elle-même à X.

Supposons maintenant que ψ est une fonction quelconque remplissant les conditions du lemme. Il existe une suite $\{l_n\}\subset C_0^\infty(\mathbf{R}^k\times\mathbf{R}^{k'})$ telle que

$$\lim_{n\to\infty}(2\pi)^{-\frac{k+k'}{2}}\int_{\mathbf{R}^k\times\mathbf{R}^{k'}}(F^{-1}l_n)(t)\,g(t)\,dt=g(0)$$

pour tout $g\in C_{s,s'}(\mathbf{R}^k\times\mathbf{R}^{k'})$. Posons $\psi_n=\psi l_n$. On a $\operatorname{supp}\psi_n\subset\operatorname{supp}\psi$; donc $\overset{2}{T}\psi_n\begin{pmatrix}1 & 3\\ A, & A'\end{pmatrix}=0$. Par ailleurs,

$$\lim_{n\to\infty}(2\pi)^{-\frac{k+k'}{2}}\int_{\mathbf{R}^k\times\mathbf{R}^{k'}}(F^{-1}\psi_n)(t)\,g(t)\,dt=$$

$$=\lim_{n\to\infty}(2\pi)^{-\frac{k+k'}{2}}\int_{\mathbf{R}^k\times\mathbf{R}^{k'}}[(F^{-1}\psi)*(F^{-1}l_n)](t)\,g(t)\,dt=$$

$$=\int_{\mathbf{R}^k\times\mathbf{R}^{k'}}(F^{-1}\psi)(t)\,g(t)\,dt$$

On en déduit que pour tous $h\in B_1$, $h^*\in B_4^*$

$$0=\lim_{n\to\infty} h^*\left[\overset{2}{T}\psi_n\left(\overset{1}{A},\overset{3}{A'}\right)h\right]=h^*\left[\overset{2}{T}\psi\left(\overset{1}{A},\overset{3}{A'}\right)\right]$$

Donc $\overset{2}{T}\psi\left(\overset{1}{A},\overset{3}{A'}\right)=0$.

En remplaçant ψ par ψf dans ce raisonnement, on trouve que

$$\overset{2}{T}\psi\left(\overset{1}{A},\overset{3}{A'}\right)\times f\left(\overset{1}{A},\overset{3}{A'}\right)=0$$

pour tout $f\in\mathscr{B}_{s,s'}(\mathbf{R}^k\times\mathbf{R}^{k'})$, ce qui exprime que $\psi\in X$ et le lemme est prouvé.

Théorème 5.1. *Soient $A=(A_1,\dots,A_k)$ un ensemble générateur de degré s de couple déterminant (B_1, B_2), $A'=(A'_1,\dots,A'_l)$ un ensemble générateur de degré s' de couple déterminant (B_3, B_4), $T:B_2\to B_3$ un homomorphisme, $\lambda_0\in\mathbf{R}^k$, $\mu_0\in\mathbf{R}^l$. Supposons qu'il existe un voisinage U du point (λ_0, μ_0) dans $\mathbf{R}^k\times\mathbf{R}^l$ tel que pour un $\delta>0$, $(\lambda,\mu)\in U$ et $\varepsilon<\varepsilon_0$, l'on ait la majoration*

$$\left\|\overset{2}{T}\left[\left(\overset{1}{A}-\lambda\right)^2+\left(\overset{3}{A'}-\mu\right)^2+\varepsilon^2\right]^{-\frac{1}{2}(k+l+s+s'+\delta)}\right\|_{B_2\to B_3}<c.$$

Alors le point (λ_0, μ_0) appartient à la résolvante de l'opérateur vectoriel $\mathscr{X}=\left(\overset{1}{A},\overset{2}{T},\overset{3}{A'}\right)$ (c ne dépend pas de ε).

Démonstration. Soient $\psi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^k\times\mathbf{R}^l)$ et $\operatorname{supp}\psi\subset U$. Il nous faut prouver que $\psi(\mathscr{X})=0$. Sans nuire à la généralité posons $\mu_0=0$, $\lambda_0=0$.

Soit $\varphi(x, y)$, $x\in\mathbf{R}^k$, $y\in\mathbf{R}^l$, une fonction de $C_0^\infty(\mathbf{R}^k\times\mathbf{R}^l)$ telle que

$$\sum_{i_1=-\infty}^{\infty}\dots\sum_{i_k=-\infty}^{\infty}\sum_{j_1=-\infty}^{\infty}\dots\sum_{j_l=-\infty}^{\infty}\varphi(x-i, y-j)=1,$$

$$i=(i_1,\dots,i_k),\quad j=(j_1,\dots,j_l).$$

Il existe alors une constante c_1 telle que pour les n assez grands

$$\psi(x, y)=\sum_{(i,j)\in M_n}\psi(x, y)\,\varphi(nx-i, ny-j)\overset{\text{déf}}{=}\sum_{(i,j)\in M_n}\psi_{ij}^{(n)}(x,y),$$

où le nombre des éléments de l'ensemble M_n est $\leqslant c_1 n^{k+l}$ et $\left(\frac{i}{n},\frac{j}{n}\right)\in U$ pour $(i,j)\in M_n$.

Posons

$$R_\varepsilon(x, y)=(\sqrt{x^2+y^2+\varepsilon^2})^{k+l+s+s'+\delta}.$$

On a

$$\varphi(nx-i,\ ny-j)\,R_{1/n}\left(x-\frac{i}{n},\ y-\frac{j}{n}\right)=$$

$$=\varphi(nx-i,\ ny-j)\,R_1(nx-i,\ ny-j)\cdot n^{-k-l-s-s'-\delta}$$

D'où la majoration

$$\left\|\psi(nx-i,\ ny-j)\,R_{1/n}\left(x-\frac{i}{n},\ y-\frac{j}{n}\right)\right\|_{\mathfrak{B}_{s,s'}(\mathbf{R}^r\times\mathbf{R}^{r'})}\leqslant\|\psi R_1\|_{\mathfrak{B}_{s,s'}(\mathbf{R}^r\times\mathbf{R}^{r'})}\cdot n^{-k-l-\delta}.$$

L'identité

$$\psi_{ij}^{(n)}(x,\ y)=\left[\psi_{ij}^{(n)}(x,\ y)\,R_{1/n}\left(x-\frac{i}{n},\ y-\frac{j}{n}\right)\right]\times$$

$$\times\left[\left(x-\frac{i}{n}\right)^2+\left(y-\frac{j}{n}\right)^2+\frac{1}{n^2}\right]^{\frac{1}{2}(-k-l-s-s'-\delta)}$$

et la majoration de l'opérateur

$$\overset{2}{T}\left[\left(\overset{1}{A}-\frac{i}{n}\right)^2+\left(\overset{2}{A'}-\frac{j}{n}\right)^2+\frac{1}{n^2}\right]^{-\frac{1}{2}(k+l+s+s'+\delta)}$$

entraînent

$$\|\psi_{ij}^{(n)}(\mathscr{X})\|\leqslant c_2\cdot n^{-k-l-\delta},$$

où c_2 est une constante. Donc,

$$\|\psi(\mathscr{X})\|\leqslant c_2\cdot n^{-k-l-\delta}\cdot c_1 n^{k+l}=c_1c_2n^{-\delta}\to 0$$

lorsque $n\to\infty$. C.Q.F.D.

Théorème 5.2. *Soient $A=(A_1,\ldots,A_k)$ un ensemble générateur de degré s de couple déterminant (B_1, B_2), $A'=(A'_1,\ldots,A'_l)$ un ensemble générateur de degré s' de couple déterminant (B_3, B_4), $T:B_2\to B_3$ un homomorphisme. Supposons que pour tout $\varepsilon>0$ réel assez petit, on a la majoration*

$$\left\|\overset{2}{T}\left[\left(\overset{1}{A}-\lambda\right)^2+\left(\overset{3}{A'}-\mu\right)^2+\varepsilon^2\right]^{-N/2}\right\|_{B_2\to B_3}\leqslant c^N,$$

où c est une constante, N un nombre naturel arbitraire. Alors le point (λ, μ) appartient à la résolvante de l'opérateur vectoriel $\mathscr{X}=\left(\overset{1}{A},\ \overset{2}{T},\ \overset{3}{A'}\right)$ (c ne dépend pas de ε).

Démonstration. Supposons (sans nuire à la généralité) que $\lambda=0$, $\mu=0$. Désignons $\tau_\varepsilon(x, y)=\sqrt{x^2+y^2+\varepsilon^2}$.

Soit $\chi(x, y) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^l)$ une fonction quelconque dont le support est contenu dans un δ-voisinage de 0. Alors

$$\|\chi(x, y)[\tau_{ii}(x, y)]^N\|_{\mathscr{B}_{s,s'}(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^l)} = O(\delta^N).$$

Choisissons $\delta < 1/c$. Alors

$$\|\chi(\mathscr{X})\|_{B_1 \to B_4} =$$

$$= \left\| \left[\!\!\left[\overset{2}{T} \left[\tau_\delta \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ A, & A' \end{pmatrix} \right]^{-N} \right]\!\!\right] \chi \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ A, & A' \end{pmatrix} \left[\tau_\delta \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ A, & A' \end{pmatrix} \right]^N \right\|_{B_1 \to B_4} \leqslant$$

$$\leqslant C \cdot c^N \|\chi(x, y)[\tau_\delta(x, y)]^N\|_{B_{s,s'}(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^l) \to 0}, \qquad N \to \infty.$$

Le crochet $\overset{2}{[\![\ ]\!]}$ exprime ici que la numérotation des opérateurs intérieurs ne s'étend pas aux opérateurs extérieurs: l'expression intérieure est traitée comme un opérateur agissant en second (cf. Introduction). C.Q.F.D.

Théorème 5.3. *Soit l_σ une fonction de $\mathscr{B}_{s,s'}(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k'})$ égale à 1 sur le spectre σ du couple d'ensembles générateurs $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ A, & A' \end{pmatrix}$ par rapport au transporteur $\overset{2}{T}$.* Alors

$$\left\| \overset{2}{T}\varphi \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ A, & A' \end{pmatrix} \times \psi \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ A, & A' \end{pmatrix} \right\| \leqslant c \left\| \overset{2}{T}\varphi \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ A, & A' \end{pmatrix} \right\|_{B_2 \to B_3} \|\psi l_\sigma\|_{B_{s,s'}(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k'})}.$$

Démonstration. Soit $\mathscr{B}_{s,s'}((\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k'}) \setminus \sigma)$ la sous-algèbre de l'algèbre $\mathscr{B}_{s,s'}(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k'})$, fermeture de l'algèbre des fonctions de $\mathscr{B}_{s,s'}(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k'})$ à support contenu dans $(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k'}) \setminus \sigma$. Pour toute fonction $f \in \mathscr{B}_{s,s'}((\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k'}) \setminus \sigma)$

$$\overset{2}{T} f \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ A, & A' \end{pmatrix} = 0.$$

Vu que $\mathscr{B}_{s,s'}((\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k'}) \setminus \sigma)$ est un idéal dans $\mathscr{B}_{s,s'}(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k'})$, il vient

$$\overset{2}{T}(\psi \cdot \varphi) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ A, & A' \end{pmatrix} = \overset{2}{T}((\psi - f)\varphi) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ A, & A' \end{pmatrix}$$

pour $f \in \mathscr{B}_{s,s'}((\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k'}) \setminus \sigma)$. Donc

$$\left\| \overset{2}{T}(\varphi\psi) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ A, & A' \end{pmatrix} \right\| \leqslant c \left\| \overset{2}{T}\varphi \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ A, & A' \end{pmatrix} \right\|_{B_2 \to B_3} \|\psi - f\|_{B_{s,s'}(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k'})}.$$

Reste à remarquer que la fonction $l_\sigma - 1$ appartient à l'algèbre $\mathscr{B}_{s,s'}((\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k'}) \setminus \sigma)$

Corollaire. *Soit* σ *le spectre du couple* $\overset{1}{A}, \overset{3}{A'}$ *par rapport à* $\overset{2}{T}$. *On a l'inégalité*

$$\left\| \sum_{i=0}^{N} \varphi_i(A')\, T \psi_i(A) \right\|_{B_1 \to B_4} \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \sum_{i=0}^{\tau} f_i(A')\, T F_i(A) \right\|_{B_2 \to B_3} \left\| \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=0}^{N} \varphi_i(y)\, \psi_i(x) \\ \sum_{i=0}^{r} f_i(y)\, F_i(x) \end{array} \right\} \right\|_{\mathscr{B}_{s,s'}(\sigma)}$$

Définition. Supposons qu'une suite $\{\Phi_n\}$ converge dans $\mathscr{B}_{s,s'}(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k'})$ vers une fonction Φ, que les fonctions $\psi_n : x \to [\Phi_n(x)]^{-1}$ appartiennent aussi à $\mathscr{B}_{s,s'}(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k'})$ et que de plus

$$\left\| \overset{2}{T} \psi_n \left(\overset{1}{A}, \overset{3}{A'} \right) \right\|_{B_2 \to B_3} \leqslant \frac{1}{\sup_{\varphi} \dfrac{\left\| \overset{2}{T} \varphi \left(\overset{1}{A}, \overset{3}{A'} \right) \right\|}{\|T\| \cdot \|\varphi\|_{\mathscr{B}_{s,s'}(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k'})}}}.$$

Sous ces conditions la fonction Φ s'appelle *poids spectral.*

On dira qu'un poids spectral Φ est *subordonné* à un poids spectral $\mathscr{F}$ si la suite de normes

$$\left\| \frac{\mathscr{F}}{\Phi_n} \right\|_{\mathscr{B}_{s,s'}(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k'})}$$

est bornée.

Munissons $\mathscr{B}_{s,s'}(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k'})$ de la norme

$$\|\varphi\|_{\Phi} \overset{\text{déf}}{=} \|\varphi\Phi\|_{\mathscr{B}_{s,s'}(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k'})} \tag{5.1}$$

et du produit

$$\varphi_1 \times \varphi_2 \overset{\text{déf}}{=} \varphi_1 \varphi_2 \Phi; \tag{5.2}$$

on a

$$\|\varphi_1 \times \varphi_2\|_{\Phi} = \|\varphi_1 \varphi_2 \Phi^2\|_{\mathscr{B}_{s,s'}(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k'})} \leqslant$$

$$\leqslant \|\varphi_1 \Phi\|_{\mathscr{B}_{s,s'}(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k'})} \times \|\varphi_2 \Phi\|_{\mathscr{B}_{s,s'}(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k'})} = \|\varphi_1\|_{\Phi} \|\varphi_2\|_{\Phi}.$$

Donc la norme (5.1) et le produit (5.2) confèrent à $\mathscr{B}_{s,s'}(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k'})$ une structure d'algèbre normée.

Désignons par $\mathscr{B}_{s,s',\Phi}(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k'})$ l'algèbre de Banach obtenue par complétion de cette algèbre normée.

Soit $\mathscr{B}_{s,s'}((\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k'}) \setminus \sigma)$ l'adhérence dans $\mathscr{B}_{s,s',\Phi}(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k'})$ de la sous-algèbre des fonctions à support borné contenu dans $(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k'}) \setminus \sigma$. Appelons $\mathscr{B}_{s,s',\Phi}(\sigma)$ l'algèbre quotient $\mathscr{B}_{s,s',\Phi}(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k'})/\mathscr{B}_{s,s',\Phi}((\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k'}) \setminus \sigma)$.

Théorème 5.2. *On a l'inégalité*

$$\left\| \overset{2}{T}\psi\left(\overset{1}{A}, \overset{3}{A'}\right) \right\| \leqslant \|\{\psi\}\|_{\mathscr{B}_{s,s',\Phi}(\sigma)}.$$

Démonstration. On a

$$\left\| \overset{2}{T}\psi\left(\overset{1}{A}, \overset{3}{A'}\right) \right\| = \left\| \overset{2}{T}\psi\left(\overset{1}{A}, \overset{3}{A'}\right) \Phi_n^{-1}\left(\overset{1}{A}, \overset{3}{A'}\right) \Phi_n\left(\overset{1}{A}, \overset{3}{A'}\right) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \overset{2}{T}\Phi_n^{-1}\left(\overset{1}{A}, \overset{3}{A'}\right) \right\|_{B_2 \to B_3} \|\psi\Phi_n\|_{\mathscr{B}_{s,s'}(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k'})} \sup_{\varphi} \frac{\left\| f\varphi\left(\overset{1}{A}, \overset{3}{A'}\right) \right\|}{\|T\| \|\varphi\|_{\mathscr{B}_{s,s'}(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k'})}} \leqslant$$

$$\leqslant \|\psi\Phi\|_{\mathscr{B}_{s,s'}(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k'})} + \varepsilon_n,$$

où $\varepsilon_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Si le support de $\varphi \in \mathscr{B}_{s,s'}(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k'})$ est contenu dans $(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k'}) \setminus \sigma$, alors $\overset{2}{T}\psi\left(\overset{1}{A}, \overset{3}{A'}\right) = \overset{2}{T}\left[\psi\left(\overset{1}{A}, \overset{3}{A'}\right) - \varphi\left(\overset{1}{A}, \overset{3}{A'}\right)\right]$, de sorte que

$$\left\| \overset{2}{T}\psi\left(\overset{1}{A}, \overset{3}{A'}\right) \right\| \leqslant \|(\psi - \varphi)\Phi\|_{\mathscr{B}_{s,s'}(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k'})} = \|\psi - \varphi\|_{\mathscr{B}_{s,s'}(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k'})}.$$

En passant à la borne inférieure par rapport à φ dans la dernière inégalité, on obtient la proposition du théorème.

§ 6. Opérateurs pseudo-différentiels

Soit A_m, $m = 1, 2, \ldots, n$, un opérateur dans $W_2^k(\mathbf{R}^n)$ défini sur le domaine $D_{A_m} = S$ par la formule

$$A_m\varphi(x) = i\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_m}. \tag{6.1}$$

L'ensemble d'opérateurs $A = (A_1, \ldots, A_n)$ est un ensemble générateur de degré nul. En effet, soit h un élément arbitraire de S. Posons

$$[U(t)](x) = h(x_1 - t_1, \ldots, x_n - t_n), \qquad t \in \mathbf{R}^n \tag{6.2}$$

et admettons que la fonction U prend ses valeurs dans $W_2^k(\mathbf{R}^n)$. On a

$$\left\| \frac{U(t_1 + \delta, t_2, \ldots, t_n) - U(t)}{\delta} + iA_1U(t) \right\|_{W_2^k(\mathbf{R}^n)} =$$

$$= \left\| \frac{\tilde{U}(t_1 + \delta, t_2, \ldots, t_n) - U(t)}{\delta} + i\tilde{A}_1\tilde{U}(t) \right\|_{\mathfrak{W}_2^k(\mathbf{R}^n)},$$

où $\tilde{A}_1$ est un opérateur défini sur le domaine $D_{\tilde{A}_1} = S$ par la formule

$$\tilde{A}_1 \varphi(x) = x_1 \varphi(x), \tag{6.3}$$

et où $\tilde{U}(t) = FU(t)$. De (6.2) il s'ensuit que

$$[\tilde{U}(t)](x) = \tilde{h}(x) e^{-itx}. \tag{6.4}$$

Donc

$$\left\| \frac{U(t_1+\delta, t_2, \ldots, t_n)}{\delta} + iA_1 U(t) \right\|^2_{W_2^k(\mathbf{R}^n)} =$$

$$= \int_{\mathbf{R}^n} \left| \frac{\tilde{h}(x) e^{-i[x_1(t_1+\delta)+x_2 t_2+\ldots+x_n t_n]} - \tilde{h}(x) e^{-ixt}}{\delta} + \right.$$

$$\left. + ix_1 \tilde{h}(x) e^{-ixt} \right|^2 (1+x^2)^k \, dx =$$

$$= \int_{\mathbf{R}^n} \left| \frac{\tilde{h}(x) e^{-ix_1\delta} - \tilde{h}(x)}{\delta} + ix_1 \tilde{h}(x) \right|^2 (1+x^2)^k \, dx =$$

$$= \delta^2 \int_{\mathbf{R}^n} |\tilde{h}(x)|^2 (1+x^2)^k \frac{x_1^4}{4} \xi(x, \delta) \, dx,$$

où $|\xi(x, \delta)| \leqslant 1$. La fonction $\tilde{h}(x) \dfrac{x_1^2}{2}$ étant un élément de l'espace $\tilde{W}_2^k(\mathbf{R}^n)$, il vient

$$\lim_{\delta \to 0} \left\| \frac{U(t_1+\delta, t_2, \ldots, t_n) - U(t)}{\delta} + iA_1 U(t) \right\|_{W_2^k(\mathbf{R}^n)} = 0,$$

autrement dit, U est solution de l'équation

$$\frac{\partial U}{\partial t_1} - iA_1 U = 0.$$

On démontre de façon analogue que

$$\frac{\partial U}{\partial t_j} - iA_j U = 0 \tag{6.5}$$

pour tout $j = 1, 2, \ldots, n$. Par ailleurs, la fonction U satisfait la condition initiale

$$U(0) = h. \tag{6.6}$$

Montrons que le problème (6.5), (6.6) admet une seule solution. En reprenant le raisonnement du § 1, chapitre III, considérons la fonction

$$[v(\tau)](x) = \int_b^\tau h(x_1 + \tau - \xi, x_2, \ldots, x_n) \, d\xi,$$

où $\tau \in [a, b]$, $x \in \mathbf{R}^n$, $h \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, et montrons que

$$\frac{dv}{d\tau} + iA_1 v = h,$$

où $dv/d\tau$ est limite de la relation aux différences correspondante pour la norme de $L_2(\mathbf{R}^n)$. A cet effet, il suffit de s'assurer que

$$\left[\frac{dv(\tau)}{d\tau}\right](x) = \frac{\partial}{\partial\tau}\{[v(\tau)](x)\}.$$

On a

$$\left[\frac{v(\tau+\delta)-v(\tau)}{\delta}\right](x) - \frac{\partial}{\partial\tau}\{[v(\tau)](x)\} =$$

$$= \frac{1}{\delta}\left[\int_b^{\tau+\delta} h(x_1+\tau+\delta-\xi, x_2, \ldots, x_n)\,d\xi - \right.$$

$$\left. - \int_b^{\tau} h(x_1+\tau-\xi, x_2, \ldots, x_n)\,d\xi\right] -$$

$$h(x) \int_b^{\tau} D_1 h(x_1+\tau-\xi, x_2, \ldots, x_n)\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{\delta}\int_{\tau}^{\tau+\delta} [h(x_1+\tau+\delta-\xi, x_2, \ldots, x_n) - h(x)]\,d\xi +$$

$$+ \int_b^{\tau} \left\{\frac{h(x_1+\tau+\delta-\xi, x_2, \ldots, x_n) - h(x_1+\tau-\xi, x_2, \ldots, x_n)}{\delta} - \right.$$

$$\left. - D_1 h(x_1+\tau-\xi, x_2, \ldots, x_n)\right\} d\xi.$$

Par ailleurs,

$$\left|\int_{\tau}^{\tau+\delta} [h(x_1+\tau+\delta-\xi, x_2, \ldots, x_n) - h(x)]\,d\xi\right| \leqslant \delta^2 \max_{x\in\mathbf{R}^n} \left|\frac{\partial h}{\partial x_1}\right|,$$

$$\int_{\tau}^{\tau+\delta} [h(x_1+\tau+\delta-\xi, x_2, \ldots, x_n) - h(x)]\,d\xi = 0,$$

si x n'appartient pas à un δ-voisinage du support de la fonction h. On a la majoration suivante :

$$|f(x, \delta, \tau)| \overset{\text{déf}}{=} \left| \int_b^\tau \left\{ \frac{h(x_1+\tau+\delta+\xi, x_2, \ldots, x_n) - h(x_1+\tau-\xi, x_2, \ldots, x_n)}{\delta} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - D_1 h(x_1+\tau-\xi, x_2, \ldots, x_n) \right\} d\xi \right| \leqslant (b-a)\,\delta \max_{x \in \mathbf{R}^n} \left| \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} \right|,$$

et $f(x, \delta, \tau)=0$ si x n'appartient pas à un $(b-a+\delta)$-voisinage du support de la fonction h. Les majorations précédentes entraînent

$$\left[\frac{dv(\tau)}{d\tau}\right](x) = \frac{\partial}{\partial \tau}\{[v(\tau)](x)\}.$$

On a donc acquis l'unicité de la solution du problème

$$\frac{\partial u}{\partial t_1} + iA_1 u = 0, \qquad u(0, t_2, \ldots, t_n) = u_1(t_2, \ldots, t_n),$$

de sorte que

$$[u(t)](x) = [u_1(t_2, \ldots, t_n)](x_1 - t_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Si u est solution du problème (6.5), (6.6), alors la fonction

$$u_1(t_2, \ldots, t_n) = u(0, t_2, \ldots, t_n)$$

est solution du problème

$$\frac{\partial u_1}{\partial t_2} + iA_2 u_1 = 0, \qquad u_1(0, t_3, \ldots, t_n) = u_2(t_3, \ldots, t_n),$$

où $u_2(t_3, \ldots, t_n) = u(0, 0, t_3, \ldots, t_n)$. D'où

$$[u_1(t_2, \ldots, t_n)](x) = [u_2(t_3, \ldots, t_n)](x_1, x_2 - t_2, x_3, \ldots, x_n),$$

$$[u(t)](x) = [u_2(t_3, \ldots, t_n)](x_1 - t_1, x_2 - t_2, x_3, \ldots, x_n).$$

En reprenant ce raisonnement, on trouve que la solution du problème (6.5), (6.6) doit être de la forme (6.2).

Ainsi, l'ensemble d'opérateurs A engendre un groupe à n paramètres $\{U_A(t)\}$ défini par la formule

$$U_A(t)\,h(x) = h(x-t). \tag{6.7}$$

Il est évident que l'opérateur $U_A(t)$ est isométrique quel que soit t. On a ainsi prouvé que A est un ensemble générateur de degré nul.

Soit maintenant $k \leqslant 0$ entier. Considérons l'ensemble d'opérateurs $\tilde{A} = (\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_n)$ définis sur S par la formule

$$A_i \varphi(x) = x_i \varphi(x).$$

L'ensemble $\tilde{A}$ est générateur par rapport au couple déterminant $(W_2^k(\mathbf{R}^n), W_2^k(\mathbf{R}^n))$. En effet, pour $k=0$

$$\tilde{A}_i = FA_iF^{-1},$$

de sorte que pour tout $h \in S$, le problème de Cauchy $(j=1, \ldots, n)$

$$\lim_{\delta \to 0} \left\| \frac{u(t_1, \ldots, t_{j-1}, t_j+\delta, t_{j+1}, \ldots, t_n) - u(t)}{\delta} + iA_j u(t) \right\|_{L_2(\mathbf{R}^n)} = 0 \quad (6.8)$$
$$u(0) = h$$

admet une solution.

La fonction u qui est solution du problème (6.8) est *a fortiori* solution du problème $(j=1, \ldots, n)$

$$\lim_{\delta \to 0} \left\| \frac{u(t_1, \ldots, t_{j-1}, t_j+\delta, t_{j+1}, \ldots, t_n) - u(t)}{\delta} + i\tilde{A}_j u(t) \right\|_{W_2^k(\mathbf{R}^n)} = 0 \quad (6.9)$$
$$u(0) = h$$

pour tout $k<0$.

Montrons que le problème (6.9) admet une seule solution. Pour cela il suffit de prouver l'unicité de la solution du problème de Cauchy suivant:

$$\frac{du}{d\tau} + i\tilde{A}_1 u(\tau) = 0, \quad (6.10)$$
$$u(0) = h;$$

où u est une fonction à valeurs dans $W_2^k(\mathbf{R}^n)$. Utilisons le théorème 7.2 du chapitre I. L'ensemble M de ce théorème sera l'espace $\tilde{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. Pour fixer les idées, prouvons l'unicité de la solution du problème (6.10) pour $t>0$. Soit h un élément arbitraire de $\tilde{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ et supposons que a, b, T sont des nombres tels que $0 \leqslant a < b \leqslant T$. Il suffit de s'assurer qu'il existe une fonction v à valeurs dans $\tilde{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ continue sur $[0, T]$ pour la norme de $L_2(\mathbf{R}^n)$ et satisfaisant les conditions

$$\frac{dv}{d\tau} + i\tilde{A}_1^* v(\tau) = \begin{cases} h & \text{pour} \quad t \in]a, b[, \\ 0 & \text{pour} \quad t \notin]a, b[, \end{cases} \quad (6.11)$$
$$v(T) = 0,$$

où $dv/d\tau$ est comprise comme la dérivée d'une fonction à valeurs dans $W_2^k(\mathbf{R}^n)$. Soient φ et ψ des fonctions arbitraires de S. Alors

$$(\tilde{A}_1\varphi, \psi)_{W_2^k(\mathbf{R}^n)} = \int_{\mathbf{R}^n} i\frac{\partial \tilde{\psi}(p)}{\partial p_1} [\tilde{\psi}(p)]^* (1+p^2)^k dp =$$
$$= i\int_{\mathbf{R}^n} \tilde{\varphi}(p)(1+p^2)^k \left[\frac{\partial \tilde{\psi}^*(p)}{\partial p_1} + \frac{2kp_1}{p^2+1} \tilde{\psi}^*(p) \right] dp. \quad (6.12)$$

La formule (6.12) entraîne

$$F^{-1}(\tilde{A}_1)^* F\chi(p) = i\left[\frac{\partial \chi(p)}{\partial p_1} + \frac{2kp_1}{p^2+1} \chi(p) \right]$$

pour tout $\chi \in S$. En passant donc aux transformées de Fourier, on peut remplacer l'étude du problème (6.11) par celle du suivant:

$$\frac{dw}{d\tau} - Bw = \begin{cases} q & \text{pour} \quad \tau \in]a, b[, \\ 0 & \text{pour} \quad \tau \notin]a, b[, \end{cases} \qquad (6.13)$$

$$w(T) = 0;$$

où $dw/d\tau$ est comprise comme la dérivée d'une fonction à valeurs dans $\tilde{W}_2^k(\mathbf{R}^n)$, q est un élément quelconque de $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ et B un opérateur défini par la formule

$$B\varphi(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{2kx_1}{x^2+1}\varphi(x).$$

Montrons que le problème (6.13) admet une solution w. Faisons à cet effet le changement

$$[w(\tau)](x) = [z(\tau)](x)(x^2+1)^{-k}.$$

On obtient le problème suivant:

$$\frac{dz}{d\tau} - iA_1 z(\tau) = \begin{cases} q & \text{pour} \quad \tau \in]a, b[, \\ 0 & \text{pour} \quad \tau \notin]a, b[, \end{cases} \qquad (6.14)$$

$$z(T) = 0,$$

où $dz/d\tau$ est comprise comme la dérivée d'une fonction à valeurs dans $L_2(\mathbf{R}^n)$, et $g \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$. L'existence d'une solution du problème (6.14) appartenant pour chaque τ fixe à l'espace $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ a été précédemment acquise. Ceci établit l'unicité de la solution du problème (6.10).

De la formule (6.7) il résulte que la solution du problème (6.9) est de la forme

$$[u(t)](x) = e^{-ixt}h(x). \qquad (6.15)$$

L'ensemble $\tilde{A}$ engendre ainsi un groupe à n paramètres $\{U_{\tilde{A}}(t)\}$:

$$U_{\tilde{A}}(t)\varphi(x) = e^{-ixt}\varphi(x). \qquad (6.16)$$

On a

$$\|e^{-ixt}\varphi(x)\|^2_{W_2^k(\mathbf{R}^n)} = \int_{\mathbf{R}^n} |\tilde{\varphi}(p-t)|^2 (p^2+1)^k dp \leqslant$$

$$\leqslant \|\varphi\|^2_{W_2^k(\mathbf{R}^n)} \sup_{p \in \mathbf{R}^n} \frac{[(p-t)^2+1]^k}{(p^2+1)^k} \leqslant c(1+|t|)^{2|k|}\|\varphi\|^2_{W_2^k(\mathbf{R}^n)}.$$

On en déduit que $\tilde{A}$ est un ensemble générateur de degré $|k|$.

Si k est un nombre naturel, $\tilde{A}$ est un ensemble générateur de degré k par rapport au couple déterminant $(W_2^k(\mathbf{R}^n), W_2^k(\mathbf{R}^n))$. En effet, pour tout nombre naturel $j > 1$ et tout $h \in S$

$$\int_{\mathbf{R}^n} \left| h(x) \frac{\partial^j}{\partial x_1^j} \left[\frac{e^{-i\delta x_1} - 1}{\delta} + ix_1 \right] \right|^2 dx = |\delta^{2j-2}| \int_{\mathbf{R}^n} |h(x)|^2 dx \to 0$$

lorsque $\delta \to 0$. Par ailleurs,

$$\int_{\mathbf{R}^n} \left| h(x) \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{e^{-i\delta x_1} - 1}{\delta} + ix_1 \right] \right|^2 dx = \int_{\mathbf{R}^n} |h(x)\,[e^{-i\delta x_1} - 1]|^2 \, d\tau \to 0$$

lorsque $\delta \to 0$. D'où il vient que la fonction

$$[u(t)](x) = -e^{-itx} h(x)$$

est solution du problème de Cauchy ($j = 1, \ldots, n$)

$$\frac{\partial u}{\partial t_j} + i\tilde{A}_j u = 0,$$

$$u(0) = h,$$

où $\partial u/\partial t_j$ est la dérivée au sens de la norme de l'espace $W_2^k(\mathbf{R}^n)$, de sorte que $\tilde{A}$ engendre, comme pour les $k \leqslant 0$, le groupe $\{U_{\tilde{A}}(t)\}$:

$$U_{\tilde{A}}(t)\, h(x) = e^{-itx} h(x).$$

Evaluons la norme de l'opérateur $U_{\tilde{A}}(t)$ dans $W_2^k(\mathbf{R}^n)$. Comme

$$\left| \frac{\partial^{j_1}}{\partial x_1^{j_1}} \cdots \frac{\partial^{j_n}}{\partial x_n^{j_n}} e^{-itx} h(x) \right| =$$

$$= \left| \sum_{l_1=0}^{j_1} \cdots \sum_{l_n=0}^{j_n} \left\{ c_{j_1}^{l_1} \ldots c_{j_n}^{l_n} (-it_1)^{l_1} \ldots (-it_n)^{l_n} e^{-itx} \times \right. \right.$$

$$\left. \left. \times \frac{\partial^{j_1 - l_1}}{\partial x_1^{j_1 - l_1}} \cdots \frac{\partial^{j_n - l_n}}{\partial x_n^{j_n - l_n}} h(x) \right\} \right| \leqslant \sum_{l_\alpha \leqslant j_\alpha} c_j^l |t|^l \left| \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{j-l} h(x) \right|,$$

où $l = (l_1, \ldots, l_n)$, $j = (j_1, \ldots, j_n)$, $c_j^l = c_{j_1}^{l_1} \ldots c_{j_n}^{l_n}$, alors

$$\| U_{\tilde{A}}(t) \|_{W_2^k(\mathbf{R}^n)} = O(|t|^k)$$

pour $t \to \infty$. On a ainsi prouvé que $\tilde{A}$ est un ensemble générateur de degré k dans $W_2^k(\mathbf{R}^n)$.

Designons encore les fermetures des opérateurs A_j, $\tilde{A}_j$ dans $W_2^k(\mathbf{R}^n)$ respectivement par A_j et $\tilde{A}_j$. Il est immédiat de voir que

$$[\varphi \in D_{A^m}] \Leftrightarrow [\varphi \in W_2^{k+m}(\mathbf{R}^n)],$$

où D_{A^m} est l'ensemble des vecteurs h de $W_2^k(\mathbf{R}^n)$ pour lesquels existe $A_n^{m_n} A_{n-1}^{m_{n-1}} \ldots A_1^{m_1} h$, $m_1 + \ldots + m_n = m$.

Définition. Les opérateurs de la forme $f\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{A}\right)$ et $f\left(\overset{2}{A}, \overset{1}{A}\right)$ s'appellent *opérateurs pseudo-différentiels.*

On se sert des notations suivantes :

$$f\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{\tilde{A}}\right) u(x) \overset{\text{déf}}{=} f\left(\overset{1}{-i\partial/\partial x}, \overset{2}{x}\right) u(x),$$

$$f\left(\overset{2}{A},\ \overset{1}{\tilde{A}}\right) u(x) \overset{\text{déf}}{=} f\left(-i\overset{2}{\partial}/\partial x,\ \overset{1}{x}\right) u(x).$$

Exercice. Montrer que les opérateurs pseudo-différentiels dans $L_2(\mathbf{R}^n)$ sont justiciables de la formule

$$f^*\left(-i\overset{2}{\partial}/\partial x,\ \frac{1}{\overset{1}{x}}\right)=\left[f\left(-i\overset{1}{\partial}/\partial x,\ \overset{2}{x}\right)\right]^*.$$

Exercice. Montrer que l'opérateur de multiplication par une fonction $f\in\mathscr{B}_s(\mathbf{R}^n)$ défini sur S est borné dans $W_2^k(\mathbf{R}^n)$ pour $s\geqslant|k|$, et que, pour tout $h\in S$, on a la formule

$$f(x)\,h(x)=f(\tilde{A})\,h(x).$$

Exercice. Montrer que pour tout $h\in S$, on a les formules suivantes:

$$f\left(-i\overset{1}{\partial}/\partial x,\ \overset{2}{x}\right) h(x)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_{\mathbf{R}^n} e^{ip\cdot x} f(p,\ x)\,\tilde{h}(p)\,dp,$$

$$f\left(-i\overset{2}{\partial}/\partial x,\ \overset{1}{x}\right) h(x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbf{R}^n} e^{ip\cdot x}\,dp\int\limits_{\mathbf{R}^n} e^{-ip\cdot\xi} f(p,\ \xi)\,h(\xi)\,d\xi.$$

Exemple.

$$\exp\left(-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\overset{1}{f_j}\left(\overset{2}{x}\right) h(x)\right)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbf{R}^{2n}} e^{ip\cdot(x-\xi)}e^{-ip\cdot f(x)}h(\xi)\,d\xi=$$

$$=h(x_1-f_1(x),\ldots,x_n-f_n(x)).$$

On peut envisager également des opérateurs pseudo-différentiels à symboles croissants. Plus exactement, soit

$$g(p,\ x)=f(p,\ x)\,P(p)\,Q(x),$$

où $f\in\mathscr{B}_{0,k}(\mathbf{R}^n)$, P et Q sont des polynômes. Alors pour tout $h\in S$,

$$g\left(-i\overset{1}{\partial}/\partial x,\ \overset{2}{x}\right) h(x) \overset{\text{déf}}{=} Q(x)\,f\left(-i\overset{1}{\partial}/\partial x,\ \overset{2}{x}\right) P(-i\partial/\partial x)\,h(x),$$

$$g\left(-i\overset{2}{\partial}/\partial x,\ \overset{1}{x}\right) h(x) \overset{\text{déf}}{=} P(-i\partial/\partial x)\,f\left(-i\overset{2}{\partial}/\partial x,\ \overset{1}{x}\right) Q(x)\,h(x).$$

§ 7. Exemples

1. Soient

$$A=i\frac{d}{dx}+i\frac{2x}{x^2+1},\qquad A'=i\frac{d}{dx},\qquad T=1,\qquad B_1=B_2=B_3=B_4=L_2(\mathbf{R}).$$

La fonction

$$u(x,\ t)=\frac{[(x+t)^2+1]}{x^2+1}\,f(x+t)$$

est solution de l'équation

$$i\frac{\partial u}{\partial t}=i\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{2x}{x^2+1}u.$$

Donc

$$\|e^{iAt}f\|_{L_2(\mathbf{R})}=\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{(x+t)^2+1}{x^2+1}\right]^2|f(x+t)|^2\,dx}\leqslant$$

$$\leqslant\max_{x\in\mathbf{R}}\left|\frac{(x+t)^2+1}{x^2+1}\right|\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+t)|^2\,dx}\leqslant c(1+|t|)^2\|f\|_{L_2(\mathbf{R})}.$$

Il est évident que

$$\|e^{iA't}f\|_{L_2(\mathbf{R})}=\|f\|_{L_2(\mathbf{R})}.$$

Pour tout $f\in S$, on a

$$\Phi(A)f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-iAt}\tilde{\Phi}(t)f(x)\,dt=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-t)^2+1}{x^2+1}f(x-t)\,\tilde{\Phi}(t)\,dt=\frac{1}{x^2+1}\Phi\left(-i\frac{d}{dx}\right)(x^2+1)f(x).$$

Donc pour tous Φ, $\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R})$, $f\in S$

$$\Phi(A)\,\varphi(A')f(x)=\frac{1}{x^2+1}\Phi\left(-i\frac{d}{dx}\right)(x^2+1)\,\varphi\left(i\frac{d}{dx}\right)f(x)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ip\cdot x}\left(1-\frac{d^2}{dp^2}\right)^{-1}\Phi(p)\left(1-\frac{d^2}{dp^2}\right)\varphi(-p)\tilde{f}(p)\,dp.$$

Si $\lambda\neq\mu$ et si les supports des fonctions φ et Φ sont contenus dans un petit voisinage respectivement de λ et de μ, alors l'opérateur

$$\Phi(p)\left(1-\frac{d^2}{dp^2}\right)\varphi(p)$$

est nul. Donc, le spectre du couple $\begin{pmatrix}1&2\\A',&A\end{pmatrix}$ est situé sur la diagonale du produit direct $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$.

Par ailleurs, le spectre du couple $\begin{pmatrix}1&2\\A,&A'\end{pmatrix}$ couvre l'espace $\mathbf{R}^2$ tout entier, puisque pour tous $\varepsilon>0$, $\lambda\in\mathbf{R}$, $\mu\in\mathbf{R}$ on peut exhiber des fonctions Φ, $\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R})$ dont les supports sont contenus dans des ε-voisinages respectivement de λ et de μ, telles que

$$\varphi(p)\left(1-\frac{d^2}{dp^2}\right)^{-1}\Phi(p)\neq 0$$

(l'opérateur $(1-d^2/dp^2)^{-1}$ n'est pas local).

Donc le spectre d'un couple d'opérateurs non hermitiens dépend de l'ordre dans lequel ces opérateurs sont considérés: le spectre du couple $\binom{1\ \ 2}{A,\ B}$ n'est généralement pas égal à celui du couple $\binom{1\ \ 2}{B,\ A}$, mais on démontre que ces spectres sont confondus (à une symétrie près par rapport à la bissectrice de l'angle des coordonnées) pour des opérateurs hermitiens.

2. Soient B le complété de l'espace $C_0^\infty(\mathbf{R})$ pour la norme

$$\|f(x)\|_B^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{x^2/2} f(x)|^2 \, dx,$$

B' le complété de $C_0^\infty(\mathbf{R})$ pour la norme

$$\|f(x)\|_{B'}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-x^2/2} f(x)|^2 \, dx.$$

Il est évident que $B \subset B'$. Prenons pour T l'opérateur d'immersion $1 : B \to B'$. Considérons les opérateurs de création et d'annihilation

$$A = i\frac{d}{dx} + ix, \qquad A' = i\frac{d}{dx} - ix.$$

On a le théorème suivant.

Théorème 7.1. a) *A est un générateur de degré* 0 *de couple déterminant* (B, B), *A' un générateur de degré* 0 *de couple déterminant* (B', B');

b) *le spectre du couple* $\binom{1\ \ 2}{A,\ A'}$ *couvre le plan* $\mathbf{R}^2$ *tout entier*;

c) *la fonction*

$$\Phi : (x, y) \to c(1 + (x-y)^2)^{1/2} \, e^{-(x-y)^2/2}$$

pour c assez grand est le poids spectral de l'opérateur vectoriel $\binom{1\ \ 2}{A,\ A'}$, *de sorte que*

$$\left\| F\binom{1\ \ 3}{A,\ A'} \right\| \leqslant \|\Phi F\|_{\mathscr{H}_0(\mathbf{R}^2)}.$$

Démonstration. a) L'équation

$$i\frac{\partial u}{\partial t} = i\frac{\partial u}{\partial x} \pm ixu$$

admet une solution de la forme $u(x, t) = e^{\mp x^2/2} \varphi(x+t)$, donc

$$e^{-iAt} f(x) = e^{-x^2/2} \, e^{(x+t)^2/2} \, f(x+t),$$

de sorte que

$$\|e^{-iAt}f(x)\|_B = \|e^{x^2/2}\,e^{-iAt}f(x)\|_{L_2(\mathbf{R}_x)} =$$
$$= \|e^{(x+t)^2/2}f(x+t)\|_{L_2(\mathbf{R}_x)} = \|e^{x^2/2}f(x)\|_{L_2(\mathbf{R}_x)} = \|f(x)\|_B$$

pour tout $f \in C_0^\infty(\mathbf{R})$. Donc $\|e^{-iAt}\| = 1$.

b) De façon analogue, pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$,

$$\|e^{-iA't}\varphi\|_{B'} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{x^2}e^{-(x+t)^2/2}|\,\varphi(x+t)|^2\,dx\right]^{1/2} =$$
$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}|\varphi(x)|^2\,dx\right)^{1/2} = \|\varphi\|_{B'}$$

Soient Φ, $f \in C_0^\infty(\mathbf{R})$.

Comme dans l'exemple 1, on trouve que

$$\Phi(A)f(x) = e^{-x^2/2}\,\Phi\left(i\frac{d}{dx}\right)e^{x^2/2}f(x),$$

$$\Phi(A')f(x) = e^{x^2/2}\,\Phi\left(i\frac{d}{dx}\right)e^{-x^2/2}f(x).$$

Soient Φ, f, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$. Alors

$$\varphi(A')\,\Phi(A)f(x) = e^{x^2/2}\,\varphi\left(i\frac{d}{dx}\right)e^{-x^2}\,\Phi\left(i\frac{d}{dx}\right)e^{x^2/2}(x) =$$
$$= e^{x^2/2}\,\varphi\left(i\frac{d}{dx}\right)e^{-x^2}\,\Phi\left(i\frac{d}{dx}\right)f_1(x).$$

Soient $F_{p\to x}: L_2(\mathbf{R}_p) \to L_2(\mathbf{R}_x)$ la transformation de Fourier, $F_{x\to p}^{-1}$: $L_2(\mathbf{R}_x) \to L_2(\mathbf{R}_p)$ la transformation réciproque de Fourier; désignons $F_{x\to p}f_1(x)$ par $\tilde{f}_1(p)$. Alors

$$\varphi(A')\,\Phi(A)f(x) = e^{x^2/2}\,F_{p\to x}^{-1}\,\varphi(p)\,e^{d^2/dp^2}\Phi(p)\,\tilde{f}_1(p).$$

L'expression $\varphi(p)\,e^{d^2/dp^2}\,\psi(p)$ ne s'annule pour aucunes φ et ψ à support borné; donc le spectre de l'opérateur vectoriel $\left(\overset{1}{A},\ \overset{2}{A'}\right)$ couvre le plan tout entier.

c) Soit $\Phi(x, y) = \varphi(x-y)$. Il est immédiat de vérifier que dans ce cas $\Phi\left(\overset{1}{A},\ \overset{2}{A'}\right)$ est un opérateur de multiplication par une fonction, plus exactement

$$\Phi\left(\overset{1}{A},\ \overset{2}{A'}\right)f(x) = \frac{1}{2\pi}\,e^{x^2}f(x)\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\varphi}(t)\,e^{-(x-t)^2}\,dt,$$

où $\tilde{\varphi} = F^{-1}\varphi$.

Soit

$$\Phi_n(x, g)=(1+(x+y))^{1/2}\left[e^{-(x-y)^2/2}+\frac{1}{n}\right]=\varphi_n(x-y).$$

Alors

$$\frac{1}{2\pi}e^{x^2}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\Phi}_n(t)\,e^{-(x-t)^2}dt=\frac{1}{2\pi^{3/2}}e^{x^2}\int_{\mathbf{R}^2}e^{-(x-t)^2+it\xi}(1+\xi^2)^{-1/2}\frac{e^{\xi^2/2}}{1+e^{\xi^2/2}/n}\,d\xi\,dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{2}}e^{x^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix\xi}(1+\xi^2)^{-1/2}\frac{e^{\xi^2/4}}{1+e^{\xi^2/2}/n}\,d\xi.$$

On s'assure sans peine que

$$\sup_{\xi\in\mathbf{R}}(1+\xi^2)^{-1/2}\frac{e^{\xi^2/4}}{1+e^{\xi^2/2}/n}=2^{-1/2}\,e^{1/4}+d_n,$$

où $d_n\to 0$ lorsque $n\to\infty$, de sorte que la dernière intégrale est bornée comme fonction de n. On en déduit la proposition c), puisque l'opérateur de multiplication par e^{x^2} est borné en tant qu'opérateur de B dans B'.

Exercice 1. Soient

$$A=-i\frac{d}{dx}+i\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x+x^2},\qquad A'=\frac{d^2}{dx^2},\qquad T=1,$$

$$B_1=B_2=B_3=B_4=L_2(\mathbf{R}).$$

Montrer que le spectre de l'opérateur vectoriel $\begin{pmatrix}1 & 2\\ A, & A'\end{pmatrix}$ est contenu dans le domaine $\lambda_2\leqslant 0$, $\lambda_1-1\leqslant|\lambda_2|^{1/2}\leqslant\lambda_1+1$.

Solution. Signalons que $A=-i\frac{d}{dx}+i\frac{d}{dx}\left[\ln\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)\right]$, de sorte que d'après l'exercice du § 3

$$\psi(A)f=e^{\ln\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)}\psi\left(-i\frac{d}{dx}\right)e^{-\ln\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)}f(x)=\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)\psi\left(-i\frac{d}{dx}\right)\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)^{-1}f(x).$$

Soient $\varphi, \psi\in C_0^\infty(\mathbf{R})$. Alors

$$\varphi(A')\psi(A)f=F_{p\to x}^{-1}\left[\varphi(-p^2)\left(1+\frac{\sin\left(i\frac{d}{dp}\right)}{i\frac{d}{dp}}\right)\psi(p)\left(F_{y\to p}\left(1+\frac{\sin y}{y}\right)^{-1}f(y)\right)\right]$$

Appesantissons-nous sur la fonction

$$\eta(p)\equiv\left(1+\frac{\sin\left(i\frac{d}{dp}\right)}{i\frac{d}{dp}}\right)\chi(p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}dy\int_{-\infty}^{\infty}d\xi e^{iy(p-\xi)}\left(1+\frac{\sin y}{y}\right)\chi(\xi),\qquad\chi\in C_0^\infty(\mathbf{R}).$$

Remarquons que

$$F_{x\to\xi}(\theta(1-|x|))=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{+1}e^{-i\xi x}\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\xi}{\xi}$$

ou

$$F^{-1}_{y\to p}\left(1+\frac{\sin y}{y}\right)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\theta(1-|p|)+\sqrt{2\pi}\delta(p).$$

D'où

$$\eta(p)=\chi(p)+\frac{1}{2}\int_{p-1}^{p+1}\chi(\xi)\,d\xi.$$

Si $\operatorname{supp}\chi\subset[a, b]$, alors $\operatorname{supp}\eta\subset[a-1, b+1]$.

Revenons à l'opérateur $\varphi(A')\psi(A)$. Les raisonnements précédents montrent que si $\operatorname{supp}\psi\subset[a, b]$ et $\operatorname{supp}\varphi(-p^2)\subset\mathbf{R}\setminus[a-1, b+1]$, alors $\varphi(A')\psi(A)=0$. D'où

$$\sigma\begin{pmatrix}1 & 2\\ A, & A'\end{pmatrix}\subset\{\lambda_2\leqslant 0,\quad (\lambda_1-1)\leqslant\sqrt{|\lambda_2|}\leqslant(\lambda_1+1)\}.$$

Exercice 2. Soient

$$A=i\partial/\partial x_1,\qquad A'=i\partial/\partial x_2,$$
$$B_1=B_2=B_3=B_4=C_{s_1,s_2}(\mathbf{R}\times\mathbf{R}),\qquad T=1.$$

Montrer que dans ce cas

$$\left\|\varphi\begin{pmatrix}1 & 2\\ A, & A'\end{pmatrix}\times\psi\begin{pmatrix}1 & 2\\ A, & A'\end{pmatrix}\right\|\leqslant\left\|\varphi\begin{pmatrix}1 & 2\\ A, & A'\end{pmatrix}\right\|\cdot\left\|\psi\begin{pmatrix}1 & 2\\ A, & A'\end{pmatrix}\right\|,$$

c'est-à-dire que l'algèbre induite dans $\operatorname{Hom}(C_{s_1,s_2}(\mathbf{R}_{x_1},\mathbf{R}_{x_2}), C_{s_1,s_2}(\mathbf{R}_{x_1},\mathbf{R}_{x_2}))$ par l'homomorphisme $\mathscr{M}$ est une algèbre normée.

Solution. On a l'inégalité

$$|\varphi(x+t)(1+|x_1|)^{-s_1}(1+|x_2|)^{-s_2}\leqslant(1+|t_1|)^{s_1}(1+|t_2|)^{s_2}\|\varphi\|_{C_s(\mathbf{R}^2)},$$

où $t=(t_1, t_2)$, $x=(x_1, x_2)$, $s=(s_1, s_2)$, $\varphi\in C_s(\mathbf{R}^2)$. Donc l'ensemble $\begin{pmatrix}1 & 2\\ A, & A'\end{pmatrix}$ est un ensemble générateur de degré s. D'autre part, si $\tilde{\varphi}\equiv F^{-1}\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$, alors

$$\left\|\varphi\begin{pmatrix}1 & 2\\ A, & A'\end{pmatrix}\chi\right\|_{C_s}=\sup_x(1+|x_1|)^{-s_1}(1+|x_2|)^{-s_2}\left|\int\tilde{\varphi}(t)\chi(x+t)\,dt\right|\leqslant$$
$$\leqslant\int|\tilde{\varphi}(t)|(1+|t_1|)^{s_1}(1+|t_2|)^{s_2}dt\cdot\|\chi\|_{C_s}=\|\varphi\|_{\mathscr{B}_s}\cdot\|\chi\|_{C_s}.$$

On obtient la même majoration si $\tilde{\varphi}(t)=\delta(t-t_0)$. Donc de la définition de l'espace $\mathscr{B}_s(\mathbf{R}^2)$ il résulte que pour tous les $\varphi\in\mathscr{B}_s(\mathbf{R}^2)$, on a la majoration

$$\left\|\varphi\begin{pmatrix}1 & 2\\ A, & A'\end{pmatrix}\right\|_{C_s\to C_s}\leqslant\|\varphi\|_{\mathscr{B}_s}.$$

Par ailleurs, pour $\varphi\in\mathscr{B}_s$ et quel que soit $\varepsilon\in 0$, il existe un $\chi_\varepsilon\in C_s$, $\|\chi_\varepsilon\|_{C_s}=1$, tel que

$$\left|\int_{\mathbf{R}^2}\tilde{\varphi}(t)\chi_\varepsilon(t)\,dt\right|\geqslant\|\varphi\|_{\mathscr{B}_s}-\varepsilon.$$

Alors

$$\left\|\varphi\begin{pmatrix}1 & 2\\ A, & A'\end{pmatrix}\chi_\varepsilon\right\|_{C_s}\geqslant\left|\int\tilde{\varphi}(t)\chi_\varepsilon(t)\right|\geqslant\|\varphi\|_{\mathscr{B}_s}-\varepsilon,$$

de sorte que $\left\| \varphi\begin{pmatrix}1 & 2\\ A, & A'\end{pmatrix}\right\|_{C_s\to C_s} \geqslant \|\varphi\|_{\mathscr{B}_s}$. D'où

$$\left\| \varphi\begin{pmatrix}1 & 2\\ A, & A'\end{pmatrix}\right\|_{C_s\to C_s} = \|\varphi\|_{\mathscr{B}_s}.$$

Il est aisé maintenant d'établir les inégalités finales :

$$\left\| (\varphi\cdot\psi)\begin{pmatrix}1 & 2\\ A, & A'\end{pmatrix}\right\|_{C_s\to C_s} = \|\varphi\cdot\psi\|_{\mathscr{B}_s} \leqslant \|\varphi\|_{\mathscr{B}_s}\cdot\|\psi\|_{\mathscr{B}_s} = \left\| \varphi\begin{pmatrix}1 & 2\\ A, & A'\end{pmatrix}\right\|_{C_s\to C_s}\left\| \psi\begin{pmatrix}1 & 2\\ A, & A'\end{pmatrix}\right\|_{C_s\to C_s}.$$

Exercice 3. Soient $B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = B$, $T = 1$ et soit $A - A'$ un opérateur borné. Montrer que la fonction $\dfrac{K}{x_1 - x_2 + i}$ est, pour K assez grand, poids spectral de l'opérateur vectoriel $\begin{pmatrix}1 & 2\\ A, & A'\end{pmatrix}$.

Solution. Soit $e_n \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, $e_n \to 1$ dans $\mathscr{B}_l(\mathbf{R})$ pour tout l. Considérons la suite de fonctions

$$\psi_n(x_1, x_2) = \frac{1}{K}[e_n(x_1)\, e_n(x_2)\,(x_1 - x_2) + i] \in \mathscr{B}_s(\mathbf{R}^2),$$

où $s = (s_1, s_2)$, s_1 étant le degré de A, s_2, celui de A'. On a

$$\frac{1}{\psi_n} = \frac{K}{e_n(x_1)\, e_n(x_2)\,(x_1 - x_2) + i}, \qquad \frac{1}{\psi_n} = K\left[\frac{ie_n(x_1)\, e_n(x_2)\,(x_1 - x_2)}{e_n(x_1)\, e_n(x_2)\,(x_1 - x_2) + i} - i\right] \in \mathscr{B}_s(\mathbf{R}^2),$$

$$\frac{1}{\psi_n} \underset{n\to\infty}{\to} K\left[\frac{i(x_1 - x_2)}{(x_1 - x_2) + i} - i\right] = \frac{K}{x_1 - x_2 + i} \text{ dans } \mathscr{B}_s.$$

Par ailleurs,

$$\left\| \psi_n\begin{pmatrix}1 & 2\\ A, & A'\end{pmatrix}\right\| = \frac{1}{K}\left\| \begin{pmatrix}2\\ A - A'\end{pmatrix} e_n\begin{pmatrix}1\\ A\end{pmatrix} e_n\begin{pmatrix}3\\ A'\end{pmatrix} + i\right\| \leqslant \frac{c^2\,\|A - A'\| + 1}{K},$$

où

$$\|e_n(A)\| \leqslant c, \qquad \|e_n(A')\| \leqslant c.$$

Soit $M = \sup_{\varphi} \dfrac{\left\| \varphi\begin{pmatrix}1 & 2\\ A, & A'\end{pmatrix}\right\|}{\|\varphi\|_{\mathscr{B}_s}}$. Prenons $K \geqslant M(c^2\,\|A - A'\| + 1)$. Alors

$$M\cdot\left\| \psi_n\begin{pmatrix}1 & 2\\ A, & A'\end{pmatrix}\right\| \leqslant 1.$$

Ainsi la suite ψ_n remplit toutes les conditions de la définition du poids spectral, autrement dit la fonction $\dfrac{K}{x_1 - x_2 + i}$ est un poids spectral pour $\begin{pmatrix}1 & 2\\ A, & A'\end{pmatrix}$.

3. L'un des plus importants cas particuliers du théorème 5.3 est la majoration suivante. Soient A et A' des ensembles générateurs de degrés respectifs s et s' et supposons que $B_2 \subset B_3$. Alors

$$\|f(A) - f(A')\|_{B_1\to B_4} \leqslant c\,\|\varphi(A) - \varphi(A')\|_{B_2\to B_3}\left\| \frac{f(x) - f(y)}{\varphi(x) - \varphi(y)}\right\|_{\mathscr{B}_{s,s'}(\mathbf{R}^k\times\mathbf{R}^{k'})}.$$

4. Soient $\{B_\tau\}$ une échelle de Banach, T_1 et T_2 des opérateurs réguliers de degré s de couple déterminant $(B_\tau, B_{\tau+\tau_1})$, où τ est un entier quelconque.

Supposons que $T_1 - T_2$ est borné en tant qu'opérateur de B_τ dans $B_{\tau-\tau_2}$, où $\tau_2 > 2\tau_1$. Soient $T_1 = A_1 + iA_2$, $T_2 = B_1 + iB_2$, où (A_1, A_2), (B_1, B_2) sont des ensembles générateurs. Soient $\Phi_1(x_1, x_2)$ et $\Phi_2(y_1, y_2)$ des fonctions telles que $\dfrac{\Phi_1(x) - \Phi_2(y)}{x_1 + ix_2 - y_1 - iy_2}$ appartienne à $\mathscr{B}_{s,s'}((\sigma(T_1) \times \sigma(T_2))$. Alors l'opérateur $\Phi_1(A_1, A_2) - \Phi_2(B_1, B_2)$ est borné comme un opérateur de B_τ dans $B_{\tau+2\tau_1-\tau_2}$.

5. Soit Γ une courbe différentiable dans $\mathbf{R}^2$. Au voisinage de Γ, introduisons les coordonnées r, t, où r est la longueur de la normale, t le paramètre sur la courbe. Soient

$$\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2), \qquad \varphi(x, y) = \bar{\varphi}(r, t),$$

$$\bar{\varphi}_N(r, t) = \sum_{k=0}^{N} \frac{r^k}{k!} \frac{\partial^k \bar{\varphi}}{\partial r^k}(0, t) = \varphi_N(x, y).$$

Si le spectre de l'opérateur vectoriel $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ A, & T, & A' \end{pmatrix}$ est situé sur Γ et si la somme des degrés des générateurs A et A' est $\leqslant N$, alors

$$\overset{2}{T}\varphi\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ A, & A' \end{pmatrix} = \overset{2}{T}\varphi_N\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ A, & A' \end{pmatrix}.$$

6. Soient $P(x, y) = \Sigma a_{ij} x^i x^j$ un polynôme de deux variables, A, A' des générateurs dans un espace de Banach B. Posons

$$P\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ A, & A' \end{pmatrix} \overset{\text{déf}}{=} \sum a_{ij} A'^j A^i.$$

Exercice. Soient A et A' les opérateurs dans $L^2(\mathbf{R})$ étudiés au n° 1 :

$$A = i\frac{d}{dx}, \qquad A' = i\frac{d}{dx} + i\frac{2x}{1+x^2}.$$

Montrer que $\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ A' & A \end{pmatrix}\right)^k = 0$ si et seulement si $k \geqslant 3$.

Solution. Il est aisé de voir que $\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ A & A' \end{pmatrix}\right) \neq 0$ pour $k = 0, 1, 2$. Supposons que $k \geqslant 3$. Il est évident que A est un générateur de degré $s_A = 0$. Par ailleurs,

$$e^{-iA't} f(t) = e^{-\ln(1+x^2) + \ln(1+(x+t)^2)} f(x+t) = \frac{1+(x+t)^2}{1+x^2} f(x+t);$$

donc, A' est un générateur de degré $s_{A'} = 2$. Pour $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, on a

$$\psi(A')\varphi(A) f = \frac{1}{1+x^2} \psi\left(i\frac{d}{dx}\right)(1+x^2)\varphi\left(i\frac{d}{dx}\right) f(x) = \frac{1}{1+x^2}\left[\psi(p)\left(1 - \frac{d^2}{dp^2}\right)\varphi(p)(Ff)\varphi\right].$$

Donc, si $\operatorname{supp}\varphi \cap \operatorname{supp}\psi \neq \varnothing$, alors $\psi(A')\varphi(A) = 0$, c'est-à-dire que le spectre $\sigma\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ A, & A' \end{pmatrix}$ est situé sur la diagonale de $\mathbf{R}^2$

D'après le numéro précédent, l'opérateur $F\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{A'}\right)$ est nul si la fonction F possède sur la diagonale de $\mathbf{R}^2$ un zéro d'ordre $\geqslant S_A + S_{A'} + 1 = 3$. Donc, pour $k \geqslant 3$

$$\left(g, \left(\overset{1}{A} - \overset{2}{A'}\right)^k f\right) = \lim_{m,n\to\infty} \left(g, e_n \left(\overset{2}{A'}\right)\left(\overset{1}{A} - \overset{2}{A'}\right) e_m \left(\overset{1}{A}\right) f\right)$$

pour $f \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, $g \in L^2(\mathbf{R})$ ($\{e_n\}$ est la suite de fonctions du lemme 1.13, chapitre III.) D'où $\left(\overset{1}{A} - \overset{2}{A'}\right)^k = 0$ pour $k \geqslant 3$.

7. Soient $B_1 = B_2 = L_2(\mathbf{R})$, $B_3 = B_4 = W_2^{-1}(\mathbf{R})$, $T = id/dx$ et supposons que A et A' sont des opérateurs de multiplication par une fonction réelle différentiable $f(x)$. Il est aisé de s'assurer que le spectre de l'opérateur vectoriel $\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{T}, \overset{3}{A'}\right)$ est situé sur la diagonale.

L'égalité

$$\left(i\frac{d}{dx}\right) e^{-if(x)t} = e^{-if(x)t}\left(i\frac{d}{dx}\right) + (-it)\, e^{-if(x)t}\,(if'(x))$$

entraîne immédiatement la formule

$$\overset{2}{TF}\left(\overset{1}{A}, \overset{3}{A'}\right)\varphi = F(f(x), \quad f(x))\, i\frac{d\varphi(x)}{dx} + F'((x), f(x))\, i\frac{df(x)}{dx}\varphi(x),$$

où F' est la dérivée de la fonction F par rapport au premier argument, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$.

§ 8. Dérivation de fonctions d'un opérateur dépendant d'un paramètre

Théorème 8.1. *Soient $A_1^{(n)}$, $A_2^{(n)}$ des générateurs de couples déterminants respectifs (B_1, B_1) et (B_2, B_2), et en outre $\left\|e^{-iA_1^{(n)}t}\right\| \leqslant c_1(1+|t|)^{s_1}$, $\left\|e^{-iA_2^{(n)}t}\right\| \leqslant c_2(1+|t|)^{s_2}$, où c_1, s_1, c_2, s_2 sont des constantes indépendantes de n. Soient $T_n : B_1 \to B_1$ des homomorphismes bornes en norme par une même constante. Supposons par ailleurs que la suite $\{A_1^n\}$ converge simplement dans un ensemble dense dans B_1 vers un générateur A_1, la suite $\{A_2^{(n)}\}$ converge simplement dans un ensemble dense dans B_2 vers un générateur A_2 et la suite $\{T_n\}$ converge simplement vers un homomorphisme $T : B_1 \to B_2$. Alors, pour toute fonction $f \in \mathscr{B}_{s_1,s_2}(\mathbf{R}^2)$, la suite $\left\{\overset{2}{T}_n f\left(\overset{1}{A_1^{(n)}}, \overset{3}{A_2^{(n)}}\right)\right\}$ converge simplement vers l'homomorphisme $\overset{2}{T}f\left(\overset{1}{A}_1, \overset{3}{A}_2\right) : B_1 \to B_2$.*

Démonstration. Supposons tout d'abord que la fonction f est de la forme $f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$, où $f_1 \in \mathscr{B}_{s_1}(\mathbf{R})$, $f_2 \in \mathscr{B}_{s_2}(\mathbf{R})$. Alors

$$\overset{2}{T}_n f\left(\overset{1}{A_1^{(n)}}, \overset{3}{A_2^{(n)}}\right) = f_2(A_2^{(n)})\, T_n f_1(A_1^{(n)}),$$

$$\overset{2}{T}f\left(\overset{1}{A}_1, \overset{3}{A}_2\right) = f_2(A_2)\, T f_1(A_1).$$

Le théorème 6.2 du chapitre III nous dit que pour tout $h \in B_1$

$$\lim_{n\to\infty} f_1(A_1^{(n)})h = f_1(A_1)h.$$

Comme $T_n \to T$ simplement et que $||T_n|| \leqslant \text{const}$, il vient

$$T_n f_1(A_1^{(n)})h \overset{n\to\infty}{\to} Tf_1(A_1)h$$

pour la norme de l'espace B_2. Vu que $f_2(A^{(n)}) \to f_2(A_2)$ simplement sur B_2 et que $||f_2(A_2^{(n)})|| \leqslant \frac{c_2}{\sqrt{2\pi}} ||f_2||_{\mathscr{B}_{s_2}(\mathbf{R})}$ il s'ensuit

$$f(A_2^{(n)})\, T_n f(A_1^{(n)})h \overset{n\to\infty}{\to} f(A_2)\, Tf(A_1)h$$

pour la norme de l'espace B_2. Ce qui prouve le théorème 8.1 dans le cas particulier envisagé.

Supposons maintenant que h est un élément fixe de B_1. Alors

$$\overset{2}{T_n} f\left(\overset{1}{A_1^{(n)}}, \overset{3}{A_2^{(n)}}\right) h \overset{n\to\infty}{\to} \overset{2}{T} f\left(\overset{1}{A_1}, \overset{3}{A_2}\right) h$$

pour la norme de l'espace B_2 pour tout f pris dans l'ensemble P dense dans $\mathscr{B}_{s_1,s_2}(\mathbf{R}^2)$ des fonctions de la forme

$$f(x, y) = \sum_{j=1}^{k} \varphi_j(x)\psi_j(y).$$

Désignons par $A_n : \mathscr{B}_{s_1,s_2}(\mathbf{R}^2) \to B_2$ l'opérateur défini par la formule

$$A_n f = \overset{2}{T_n} f\left(\overset{1}{A_1^{(n)}}, \overset{3}{A_2^{(n)}}\right) h,$$

et par A l'opérateur

$$Af \overset{\text{déf}}{=} \overset{2}{T} f\left(\overset{1}{A_1}, \overset{3}{A_2}\right) h.$$

La suite $\{A_n\}$ converge alors simplement vers A sur l'ensemble partout dense P et est bornée en norme

$$||A_n|| \leqslant \frac{c_1 c_2}{2\pi} ||T_n||.$$

Le théorème de Banach-Steinhaus nous dit que $A_n \to A$ simplement dans $\mathscr{B}_{s_1,s_2}(\mathbf{R}^2)$. Ce qui prouve le théorème.

Remarque. Dans ce théorème il faut remplacer les générateurs par des ensembles générateurs.

Soient A un ensemble générateur de k opérateurs commutables de couple déterminant (B_1, B_1), A' un ensemble générateur identique de k'

opérateurs de couple déterminant (B_2, B_2), T un homomorphisme de B_1 dans B_2. Soit $P(x, y)$ un polynôme des variables $x \in \mathbf{R}^k$, $y \in \mathbf{R}^{k'}$

$$P(x, y) = \sum a_{ij} x^i y^j,$$

où

$$i = i_1, \quad ., i_k; \quad j = j_1, \ldots, j_{k'}; \quad x^i = x_1^{i_1} \ldots x_k^{i_k}, \quad y^j = y_1^{j_1} \ldots y_k^{j_{k'}}.$$

Posons

$$\overset{2}{I}P\left(\begin{smallmatrix}1 & 3\\ A, & A'\end{smallmatrix}\right) = \sum a_{ij} A'^j T A^i.$$

Lemme 8.1. *Soient* $f \in \mathscr{B}_{s,s'}(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k'})$, $fP \in \mathscr{B}_{s,s'}(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k'})$. *Si l'opérateur* $\overset{2}{T}P\left(\begin{smallmatrix}1 & 3\\ A, & A'\end{smallmatrix}\right)$ *est borné en tant qu'opérateur de* B_1 *dans* B_2, *alors*

$$\overset{2}{T}fP\left(\begin{smallmatrix}1 & 3\\ A, & A'\end{smallmatrix}\right) = \overset{2}{T'}f\left(\begin{smallmatrix}1 & 3\\ A, & A'\end{smallmatrix}\right),$$

où T' *est le prolongement de l'opérateur* $\overset{2}{T}P\left(\begin{smallmatrix}1 & 3\\ A, & A'\end{smallmatrix}\right)$ *en un homomorphisme de* B_1 *dans* B_2.

Démonstration. Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions de la forme

$$f_n(x, y) = u_n(x) v_n(y), \quad x \in \mathbf{R}^k, \quad y \in \mathbf{R}^{k'}.$$

Il est aisé de voir que si les opérateurs A et A' sont bornés, alors le lemme est valable pour les fonctions f_n:

$$\overset{2}{T}f_n P\left(\begin{smallmatrix}1 & 3\\ A, & A'\end{smallmatrix}\right) = \overset{2}{T'}f_n\left(\begin{smallmatrix}1 & 3\\ A, & A'\end{smallmatrix}\right). \tag{8.1}$$

Si $f_n \to f$ et $f_n P \to fP$ dans $\mathscr{B}_{s,s'}(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{k'})$, alors en faisant tendre $n \to \infty$ dans (8.1), on obtient la proposition annoncée. On laisse au lecteur le soin de prouver l'existence d'une telle suite. Le lemme est prouve pour des opérateurs A et A' bornés.

Supposons maintenant que A et A' sont des générateurs arbitraires. Posons

$$A_n = \frac{A}{1 + A^2/n}, \qquad A'_n = \frac{A'}{1 + A'^2/n}.$$

Alors A_n et A'_n sont des opérateurs bornés convergeant vers A et A' respectivement dans des ensembles partout denses. Ceci étant, on peut exhiber des constantes c, c', N et N' telles que

$$\left\| e^{-iA_n t} \right\| \leqslant c(1 + |t|)^N, \qquad \left\| e^{-iA'_n t} \right\| \leqslant c'(1 + |t|)^{N'}.$$

Désignons: $T_n = \varphi(A'_n) T \varphi(A_n)$. Alors $T_n \to T$ simplement sur B_1 et $\|T_n\|_{B_1 \to B_2} \leqslant \text{const}$. Donc, en vertu du théorème 8.1, pour toute fonction $f \in \mathscr{B}^0(\mathbf{R}^2)$ et tout $h \in B_1$, on a la formule

$$\lim_{n \to \infty} \overset{2}{T_n} f\left(\begin{smallmatrix}1 & 3\\ A_n, & A'_n\end{smallmatrix}\right) P\left(\begin{smallmatrix}1 & 3\\ A_n, & A'_n\end{smallmatrix}\right) h = \overset{2}{T} f\left(\begin{smallmatrix}1 & 3\\ A, & A'\end{smallmatrix}\right) P\left(\begin{smallmatrix}1 & 3\\ A, & A'\end{smallmatrix}\right) h.$$

Par ailleurs, la suite d'opérateurs

$$T'_n = P\left(\overset{1}{A}, \overset{3}{A'}\right) \varphi\left(\overset{3}{A'_n}\right) \overset{2}{T} \varphi(A_n) = \varphi(A'_n)\, T' \varphi(A_n),$$

de B_1 dans B_2 est bornée en norme et converge fortement vers T' Donc

$$\lim_{n\to\infty} \overset{2}{T'_n} f\left(\overset{1}{A_n}, \overset{3}{A'_n}\right) h \sim \overset{2}{T'} f\left(\overset{1}{A}, \overset{3}{A'}\right) h.$$

Ce qui prouve le lemme.

Considérons maintenant une famille $\{T(\xi)\}$ d'opérateurs réguliers

$$T(\xi) = A_1(\xi) + iA_2(\xi),$$

où $(A_1(\xi), A_2(\xi)) = A(\xi)$ est un ensemble générateur de degré s de couple déterminant (B, B), en outre le domaine de définition D de l'opérateur $T(\xi)$ ne dépend pas de ξ,

$$\sup_{t\in\mathbf{R}^2} \frac{\left\| e^{-iA(\xi)t} \right\|}{(1+|t|)^s} < \infty$$

et le spectre de l'opérateur $T(\xi)$ est contenu dans un ensemble fermé $\sigma \subset \mathbf{R}^2$ indépendant de ξ.

Lemme 8.2. *Soit $f \in \mathscr{B}_s(\sigma)$ et supposons que la famille $\{T(\xi)\}$ possède (B', B') pour couple déterminant, $B \subset B'$, et que pour tous ξ', ξ'' du domaine de définition de la fonction $T(\xi)$, le spectre du couple d'ensembles générateurs $\overset{1}{A}(\xi')$, $\overset{2}{A}(\xi'')$ par rapport à l'inclusion de B dans B' est contenu dans l'ensemble fermé $\Sigma \subset \sigma \times \sigma \subset \mathbf{R}^4$. Supposons, enfin, que*

$$\lim_{\xi\to\xi_0} \left\| T(\xi) - T(\xi_0) \right\|_{B\to B'} = 0.$$

Sous ces conditions, si l'ensemble des fonctions de la forme

$$\frac{g(x) - g(y)}{x_1 + ix_2 - y_1 - iy_2}, \qquad g \in \mathscr{B}_s(\sigma)$$

est dense) dans $\mathscr{B}_s(\Sigma)$, alors*

$$\lim_{\xi\to\xi_0} \left\| f(A(\xi)) - f(A(\xi_0)) \right\|_{B\to B'} = 0.$$

Démonstration. Supposons que les fonctions $f_n(x)$, $x \in \mathbf{R}^2$, sont telles que

$$\Phi_n(x, y) = \frac{f_n(x) - f_n(y)}{x_1 + ix_2 - y_1 - iy_2} \subset \mathscr{B}_s(\Sigma). \tag{8.2}$$

*) Signalons que cette condition est remplie si $\{T(\xi)\}$ est une famille de générateurs. Dans ce cas on peut poser $\sigma = \mathbf{R}$, $\Sigma = \mathbf{R}^2$

Soit T_{ξ, ξ_0} le prolongement de l'opérateur $T(\xi)-T(\xi_0)$ en un homomorphisme de B dans B'. Alors, en vertu du lemme précédent, on a

$$f_n(A(\xi))-f_n(A(\xi_0))=\overset{2}{T}_{\xi, \xi_0}\Phi_n\left(\overset{1}{A}(\xi), \overset{3}{A}(\xi_0)\right).$$

Donc

$$\|f_n(A(\xi))-f_n(A(\xi_0))\|_{B\to B'}\leqslant c\,\|T(\xi)-T(\xi_0)\|_{B\to B'}\,\|\Phi_n\|_{\mathscr{B}_s(\Sigma)}\to 0$$

lorsque $\xi\to\xi_0$.

Supposons que $f_n\to f$ dans $\mathscr{B}_s(\sigma\times\sigma)$. Alors

$$\|f(A(\xi))-f(A(\xi_0))\|_{B\to B'}\leqslant\|f(A(\xi))-f_n(A(\xi))\|_{B\to B'}+$$
$$+\|f_n(A(\xi))-f_n(A(\xi_0))\|_{B\to B'}+\|f_n(A(\xi_0))-f(A(\xi_0))\|_{B\to B'}\leqslant$$
$$\leqslant c\{\|f-f_n\|_{\mathscr{B}_s(\sigma)}+\|T(\xi)-T(\xi_0)\|_{B\to B'}\,\|\Phi_n\|_{\mathscr{B}_s(\Sigma)}\}.$$

Figeons $\varepsilon>0$ et choisissons n tel que soit réalisée l'inégalité $\|f-f_n\|_{\mathscr{B}_s(\mathbf{R}^2)}<\varepsilon/2$. Pour ce n on peut exhiber un $\delta>0$ tel que

$$\|T(\xi)-T(\xi_0)\|_{B\to B'}\,\|\Phi_n\|_{\mathscr{B}_s(\Sigma)}<\frac{\varepsilon}{2}$$

pour $|\xi-\xi_0|<\delta$. Par conséquent, pour $|\xi-\xi_0|<\delta$, on a l'inégalité

$$\|f(A(\xi))-f(A(\xi_0))\|_{B\to B'}<c\varepsilon,$$

ce qui prouve le lemme.

Exercice. Enoncer et prouver le lemme 8.2 pour le cas multidimensionnel.

Théorème 8.2. *Supposons qu'un paramètre ξ parcourt un intervalle de la droite réelle, qu'une famille d'opérateurs réguliers $\{T(\xi)\}$ possède (outre (B, B)) un couple déterminant (B', B'), $B\subset B'$, et que pour tous ξ', ξ'' de l'intervalle considéré le spectre du couple d'ensembles générateurs $\overset{1}{A}(\xi')$, $\overset{2}{A}(\xi'')$ par rapport à l'inclusion de B dans B' est contenu dans l'ensemble fermé $\Sigma\subset\sigma\times\sigma$. Supposons par ailleurs qu'existe la dérivée $T'(\xi)$ au sens suivant :*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\|\frac{T(\xi+\varepsilon)-T(\xi)}{\varepsilon}-T'(\xi)\right\|_{B\to B'}=0,$$

et en outre $\|T'(\xi)\|_{B\to B'}<\infty$. Supposons enfin que $f\in\mathscr{B}_s(\sigma)$. Sous ces conditions, si

$$\Phi(x, y)=\frac{f(x)-f(y)}{x_1+ix_2-y_1-iy_2}\in\mathscr{B}_s(\Sigma),\quad x\in\mathbf{R}^2,\quad y\in\mathbf{R}^2,$$

alors existe la dérivée $\dfrac{d}{d\xi}f(A(\xi))$ pour la topologie de l'espace $\mathrm{Hom}(B, B')$ et de plus

$$\frac{d}{d\xi}f(A(\xi))=\overset{2}{T}'(\xi)\,\frac{f\left(\overset{1}{A}(\xi)\right)-f\left(\overset{3}{A}(\xi)\right)}{\overset{1}{T}(\xi)-\overset{3}{T}(\xi)}.$$

Corollaire. *On a la majoration*

$$\left\|\frac{d}{d\xi}f(A(\xi))\right\|_{B\to B'} \leqslant c\,\|T'(\xi)\|_{B\to B'}\left\|\frac{f(x)-f(y)}{x_1+ix_2-y_1-iy_2}\right\|_{\mathscr{B}_s(\Sigma)},$$

où c *ne dépend que de* $\sup_{t\in\mathbf{R}^2}\frac{\|e^{-iA(\xi)t}\|_{B\to B}}{(1+|t|)^s}$ *et de* $\sup_{t\in\mathbf{R}^2}\frac{\|e^{-iA(\xi)t}\|_{B'\to B'}}{(1+|t|)^s}$.

Démonstration. Du fait que l'opérateur $T'(\xi)$ existe et est borné il résulte que $\|T(\xi+\varepsilon)-T(\xi)\|_{B\to B'}<\infty$. Le lemme 8.1 nous dit que

$$\frac{f(A(\xi+\varepsilon))-f(A(\xi))}{\varepsilon} = \frac{\overset{2}{T}(\xi+\varepsilon)-T(\xi)}{\varepsilon}\, f\left(\overset{1}{A}(\xi+\varepsilon)\right) - f\left(\overset{3}{A}(\xi)\right), \quad (8.3)$$

$$\overset{1}{T}(\xi+\varepsilon)-T(\xi)$$

où $\overset{1}{T}(\xi+\varepsilon)-T(\xi)$ est le prolongement de l'opérateur $T(\xi+\varepsilon)-T(\xi)$ en un homomorphisme de B dans B'. En faisant tendre $\varepsilon\to 0$ dans (8.3) et en appliquant le lemme 8.2 pour le cas multidimensionnel, on obtient la proposition du théorème.

Le cas multidimensionnel du théorème 8.2, nous le formulerons et le prouverons pour des fonctions de plusieurs ensembles générateurs. La définition de ces fonctions est presque entièrement calquée sur celle du § 4.

Soient $A_k=(A_k^{(1)},\dots,A_k^{(n_k)})$ des ensembles générateurs de degrés s_k de couples déterminants (B_k, B_k'), $k=1,\dots,N$; T_k un homomorphisme de B_k' dans B_{k+1}, $k=1,\dots,N-1$. Supposons que $B_k\subset B_k'$, $k=1,\dots,N$. Désignons par $U_k(t)$ le groupe à n_k paramètres engendré par l'ensemble générateur A_k, $t\in\mathbf{R}^{n_k}$.

Définissons comme de coutume l'algèbre de Banach $\mathscr{B}_s(\mathbf{R}^{|n|})$, $|n|=n_1+\dots+n_N$, $s=(s_1,\dots,s_N)$ à l'aide de l'espace $C_s(\mathbf{R}^{|n|})$ des fonctions continues sur $\mathbf{R}^{|n|}$ de norme finie

$$\|f\|_{C_s}=\sup_{x\in\mathbf{R}^{|n|}}\frac{|f(x)|}{\prod_{i=1}^{N}(1+|x_i|)^{s_i}},$$

où $x=(x_1,\dots,x_N)\in\mathbf{R}^{|n|}$, $x_i=(x_i^{(1)},\dots,x_i^{(n_k)})\in\mathbf{R}^{n_k}$.

Si $\varphi\in\mathscr{B}_s(\mathbf{R}^{|n|})$ et $h\in B_1$, on posera par définition

$$\overset{2}{T}_1\dots\overset{2N-2}{T}_{N-1}\varphi\left(\overset{1}{A}_1,\dots,\overset{2N-1}{A}_N\right)h=$$

$$=(2\pi)^{\frac{|n|}{2}}\int_{\mathbf{R}^{|n|}}\tilde{\varphi}(t_1,\dots,t_N)\,e^{-iA_Nt_N}T_{N-1}\,e^{-iA_{N-1}t_{N-1}}\dots T_1e^{-iA_1t_1}h\,dt,$$

où $t_i\in\mathbf{R}^{n_i}$, $dt=dt_1^{(1)}\dots dt_N^{(n_N)}$, $e^{-iA_jt_j}:B_j\to B_j'$ est la fermeture de l'opérateur $U_j(t)$.

Définition. On dira que $\lambda \in \mathbf{R}^{|n|}$ est un *point de la résolvante* de l'ensemble vectoriel $\mathscr{X} = \left\{ \overset{1}{A_1}, \overset{2}{T_1}, \ldots, \overset{2N-2}{T_{N-1}}, \overset{2N-1}{A_N} \right\}$ s'il existe un voisinage u_λ de ce point tel que toute fonction $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{|n|})$ à support contenu dans u_λ, appartient à l'idéal X construit à l'aide de l'homomorphisme

$$\mathscr{M} : \psi \to \overset{2}{T_1} \ldots \overset{2N-2}{T_{N-1}} \psi \left(\overset{1}{A_1}, \ldots, \overset{2N-1}{A_N} \right)$$

de l'algèbre de Banach $\mathscr{B}_s(\mathbf{R}^{|n|})$ dans l'espace de Banach $\mathrm{Hom}(B_1, B_N')$ (de même que dans la définition du § 5). Le complémentaire de la résolvante sera appelé *spectre* $\sigma(\mathscr{X})$ *du générateur* $\mathscr{X}$.

Soient λ un point de la résolvante de $\mathscr{X}$, φ une fonction indéfiniment dérivable partout sauf en λ. Supposons d'autre part que u_λ est le voisinage de la définition et enfin que $\bar{\varphi}$ et $\bar{\bar{\varphi}}$ sont des fonctions de $\mathscr{B}_s(\mathbf{R}^{|n|})$ indéfiniment dérivables dans u_λ et confondues avec φ à l'extérieur d'un ensemble fermé contenu dans u_λ. Alors $\bar{\varphi} - \bar{\bar{\varphi}} \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{|n|})$ et $\mathrm{supp}(\bar{\varphi} - \bar{\bar{\varphi}}) \subset u_\lambda$, de sorte que la fonction $\bar{\varphi} - \bar{\bar{\varphi}}$ appartient à l'idéal X, c'est-à-dire que les éléments $\{\bar{\varphi}\}$ et $\{\bar{\bar{\varphi}}\}$ de l'algèbre quotient $\mathscr{B}_s(\mathbf{R}^{|n|})/X$ sont confondus. Par abus de notation, on écrira $\{\bar{\varphi}\} = \{\bar{\bar{\varphi}}\} = \{\varphi\}$. L'homomorphisme $\mathscr{M}$ admet le développement $\mathscr{M} = \pi \mathscr{M}_\sigma$, où

$$\mathscr{B}_s(\mathbf{R}^{|n|}) \xrightarrow{\pi} \mathscr{B}_s(\mathbf{R}^{|n|})/X \xrightarrow{\mathscr{M}_\sigma} \mathrm{Hom}(B_1, B_N').$$

Donc

$$\overset{2}{T_1} \ldots \overset{2N-2}{T_{N-1}} \bar{\varphi} \left(\overset{1}{A_1}, \ldots, \overset{2N-1}{A_N} \right) = \overset{2}{T_1} \ldots \overset{2N-2}{T_{N-1}} \bar{\bar{\varphi}} \left(\overset{1}{A_1}, \ldots, \overset{2N-1}{A_N} \right).$$

Dans la suite nous désignerons cet opérateur aussi par $\overset{2}{T_1} \ldots \overset{2N-2}{T_{N-1}} \times \varphi \left(\overset{1}{A_1}, \ldots, \overset{2N-1}{A_N} \right)$ et nous appellerons la fonction φ son *symbole*.

Lemme 8.3. *Supposons que le support d'une fonction* $\psi \in \mathscr{B}_s(\mathbf{R}^{|n|})$ *est contenu dans la résolvante de* $\mathscr{X}$. *Alors* ψ *appartient à l'idéal* X *construit à l'aide de l'homomorphisme* $\mathscr{M}$.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que si un point λ appartient à la résolvante de $\mathscr{X}$, alors toute fonction de $\mathscr{B}_s(\mathbf{R}^{|n|})$ dont le support est contenu dans un voisinage assez petit de λ, est un élément de X. Ceci résulte du fait qu'une telle fonction peut être approchée dans $\mathscr{B}_s(\mathbf{R}^{|n|})$ par des fonctions de $C_0^\infty(\mathbf{R}^{|n|})$ dont les supports sont contenus dans un petit voisinage de λ.

Supposons tout d'abord que la fonction ψ admet un support compact. Elle se représente alors par la somme d'un nombre fini de fonctions de X, donc est elle-même une fonction de X.

Supposons maintenant que ψ est une fonction arbitraire vérifiant les conditions du lemme. Il existe une suite $\{e_n\} \subset C_0^\infty(\mathbf{R}^{|n|})$ telle que

$$\lim_{n' \to \infty} (2\pi)^{-|n|/2} \int_{\mathbf{R}^{|n|}} (F^{-1} e_{n'})(t)\, g(t)\, dt = g(0)$$

pour toute fonction $g \in C_s(\mathbf{R}^{|n|})$. Posons $\psi_{n'} = \psi e_{n'}$. On a $\operatorname{supp} \psi_{n'} \subset \operatorname{supp} \psi$; donc $\overset{2}{T_1} \dots \overset{2N-2}{T_{N-1}} \psi_{n'} \left(\overset{1}{A_1}, \dots, \overset{2N-1}{A_N} \right) = 0$. Par ailleurs,

$$\lim_{n' \to \infty} (2\pi)^{-|n|/2} \int_{\mathbf{R}^{|n|}} (F^{-1}\psi_{n'})(t)\, g(t)\, dt =$$

$$= (2\pi)^{-|n|/2} \lim \int_{\mathbf{R}^{|n|}} [(F^{-1}\psi) * (F^{-1}e_{n'})](t)\, g(t)\, dt = \int_{\mathbf{R}^{|n|}} (F^{-1}\psi)(t)\, g(t)\, dt.$$

D'où, pour tous $h \in B_1$, $h^* \in (B'_N)^*$,

$$0 = \lim_{n \to \infty} h^* \left[\overset{2}{T_1} \dots \overset{2N-2}{T_{N-1}} \psi_n \left(\overset{1}{A_1}, \dots, \overset{2N-1}{A_N} \right) h \right] -$$

$$= h^* \left[\overset{2}{T_1} \dots \overset{2N-2}{T_{N-1}} \psi \left(\overset{1}{A_1}, \dots, \overset{2N-1}{A_N} \right) h \right].$$

Donc $\overset{2}{T_1} \dots \overset{2N-2}{T_{N-1}} \psi \left(\overset{1}{A_1}, \dots, \overset{2N-1}{A_N} \right) = 0$.

En remplaçant ψ par ψf dans les raisonnements précédents, on trouve que

$$\overset{2}{T_1} \dots \overset{2N-2}{T_{N-1}} (\psi f) \left(\overset{1}{A_1}, \dots, \overset{2N-1}{A_N} \right) = 0$$

pour tout $f \in \mathscr{B}_s(\mathbf{R}^{|n|})$, or cela signifie que $\psi \in X$, ce qui prouve le lemme.

Supposons que l'ensemble $A_k(\xi) = \{A_k^{(1)}(\xi), \dots, A_k^{(n_k)}(\xi)\}$ est, pour tous les ξ pris dans un voisinage u_{ξ_0} de ξ_0, générateur sur les couples (B_k, B_k) et $(\overline{B}_k, \overline{B}_k)$, $k = 1, \dots, N$. Supposons que pour tous les k sont remplies les conditions suivantes :

(A_1) : $B_k \subset \overline{B}_k$; le domaine de définition D_k des opérateurs $A_k^{(j)}(\xi)$ est indépendant de ξ;

$$\left\| e^{-iA_k(\xi)t} \right\|_{\overline{B}_k \to \overline{B}_k} \leqslant c_k (1 + |t|)^{s_k}$$

pour tous les $\xi \in u_{\xi_0}$, $t \in \mathbf{R}^{n_k}$;

$$\left\| e^{-i\langle A_k(\xi_0), t \rangle} \right\|_{\overline{B}_k \to \overline{B}_k} \leqslant c_k (1 + |t|)^{s_k}, \qquad t \in \mathbf{R}^{n_k}.$$

Par ailleurs, soit $T_k(\xi) : D_k \to D_{k+1}$ un opérateur linéaire pour tous les $\xi \in u_{\xi_0}$ et $k = 1, \dots, N-1$, et de plus $T_k(\xi)$ satisfait les conditions :

(A_2) : $T_k(\xi)$ est un opérateur borné de $\overline{B}_k$ dans B_{k+1},

$$\left\| T_k(\xi) \right\|_{\overline{B}_k \to B_{k+1}} \leqslant c_k, \qquad \text{où } c_k \text{ est indépendant de } \xi.$$

Le lemme suivant est identique au lemme 8.2.

Lemme 8.4. *Soit* $f \in \mathscr{B}_s(\mathbf{R}^{|n|})$, $s = (s_1, \dots, s_N)$, $|n| = n_1 + \dots + n_N$. *Si des familles d'opérateurs* $T_k(\xi)$, $k = 1, \dots, N-1$ *sont continues en* ξ_0 *pour la norme de* $\operatorname{Hom}(\overline{B}_k, B_{k+1})$ *et des familles* $[A_k^{(j)}(\xi) - A_k^{(j)}(\xi_0)]$, $j = 1, \dots, n_k$,

$k=1,\ldots,N$, *sont continues en* ξ_0 *pour la norme de* $\mathrm{Hom}(B_k, B_k)$, *alors la famille d'opérateurs* $\overset{2}{T}_1(\xi)\ldots\overset{2N-2}{T}_{N-1}(\xi) f\left(\overset{1}{A}_1(\xi),\ldots,\overset{2N-1}{A}_N(\xi)\right)$ *est continue en* ξ_0 *pour la norme de* $\mathrm{Hom}(B_1, \overline{B}_N)$.

Démonstration. Signalons l'identité suivante:

$$\varphi(y_1,\ldots,y_N)=\varphi(x_1,\ldots,x_N)+\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{n_k}(y_k^{(i)}-x_k^{(i)})(\delta_{k,i}\varphi)\times$$

où

$$\times(x_1,\ldots,x_k^{(1)},\ldots,x_k^{(i)},y_k^{(i)},\ldots,y_k^{(n_k)},\ldots,y_N), \qquad (8.4)$$

$$\delta_{k,i}\varphi=\frac{\varphi(x_1,\ldots,x_k^{(1)},\ldots,x_k^{(i)},y_{(k)}^{(i+1)},\ldots,y_k^{(n_k)},\ldots,y_N)}{x_k^{(i)}-y_k^{(i)}}-$$

$$-\frac{\varphi(x_1,\ldots,x_k^{(1)},\ldots,y_k^{(i)},\ldots,y_k^{(n_k)},\ldots,y_N)}{x_k^{(1)}-y_k^{(i)}}$$

est la dérivée aux différences de la fonction φ par rapport à $x_k^{(i)}$

L'espace $\mathscr{B}_{(2s+1)}(\mathbf{R}^{|n|})$, où

$$(2s+1)=(\underbrace{2s_1+1,\ldots,2s_1+1}_{n_1},\ldots,\underbrace{2s_N+1,\ldots,2s_N+1}_{n_N}),$$

est dense dans $\mathscr{B}_s(\mathbf{R}^{|n|})$. Donc, pour le symbole $f\in\mathscr{B}_s(\mathbf{R}^{|n|})$ considéré, il existe une suite $f_m\in\mathscr{B}_{(2s+1)}(\mathbf{R}^{|n|})$ telle que $\|f_m-f\|_{\mathscr{B}_s}\to 0$ lorsque $m\to\infty$.

Pour f_m on a la relation $\delta_{k,i}f_m\in\mathscr{B}_{(s,s_k)}(\mathbf{R}^{|n|+1})$, où

$$(s,s_k)=(\underbrace{s_1,s_1,\ldots,s_1}_{n_1},\ldots,\underbrace{s_k,\ldots,s_k}_{n_k},\ldots,\underbrace{s_N,\ldots,s_N}_{n_N}).$$

En vertu de la condition $[A_k^{(j)}(\xi)-A_k^{(j)}(\xi_0)]\in\mathrm{Hom}(B_k,\overline{B}_k)$ et du lemme 8.1, il résulte de (8.4) l'égalité

$$\overset{2}{T}_1(\xi)\ldots\overset{2N-2}{T}_{N-1}(\xi)f_m\left(\overset{1}{A}_1(\xi),\ldots,\overset{2N-1}{A}_N(\xi)\right)-$$

$$-\overset{2}{T}_1(\xi_0)\ldots\overset{2N-2}{T}_{N-1}(\xi_0)f_m\left(\overset{1}{A}_1(\xi_0),\ldots,\overset{2N-1}{A}_N(\xi_0)\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{n_k}(A_k^{(i)}(\xi)\overset{2k}{-}A_k^{(i)}(\xi_0))\overset{2}{T}_1(\xi)\ldots\overset{2k-2}{T}_{k-1}(\xi)\overset{2k+2}{T}_k(\xi)\ldots\overset{2N-2}{T}_{N-1}(\xi)\times$$

$$\times(\delta_{k,i}f_m)\left(\overset{1}{A}_1(\xi_0),\ldots,\overset{2k-1}{A}{}_k^{(1)}(\xi_0),\ldots,\overset{2k-1}{A}{}_k^{(i)}(\xi_0),\overset{2k+1}{A}{}_k^{(i)}(\xi),\ldots\right.$$

$$\left.\ldots,\overset{2k+1}{A}{}_k^{(n_k)}(\xi),\ldots,\overset{2N+1}{A}_N(\xi)\right)+\sum_{k=1}^{N-1}\overset{2}{T}_1(\xi_0)\ldots[\overset{2k}{T}_k(\xi)-\overset{2k}{T}_k(\xi_0)]\ldots$$

$$\ldots\overset{2N-2}{T}_{N-1}(\xi)f_m\left(\overset{1}{A}_1(\xi_0),\ldots,\overset{2N-1}{A}_N(\xi_0)\right), \qquad T_N=T_0=1. \qquad (8.5)$$

De là, grâce aux hypothèses du lemme et aux majorations du lemme 3.1, on déduit que

$$\left\| \overset{2}{T}_1(\xi)\dots\overset{2N-2}{T}_{N-1}(\xi) f_m\left(\overset{1}{A}_1(\xi),\dots,\overset{2N-1}{A}_N(\xi)\right) - \right.$$
$$\left. - \overset{2}{T}_1(\xi_0)\dots\overset{2N-2}{T}_{N-1}(\xi_0) f_m\left(\overset{1}{A}_1(\xi_0),\dots,\overset{2N-1}{A}_N(\xi_0)\right)\right\|_{B_1\to\overline{B}_N} \leqslant$$
$$\leqslant c\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{n_k}\left\|A_k^{(i)}(\xi)-A_k^{(i)}(\xi_0)\right\|_{B_k\to\overline{B}_k}\left\|\delta_{k,i} f_m\right\|_{\mathscr{B}(s,s_k)} +$$
$$+ c\sum_{k=1}^{N-1}\left\|T_k(\xi)-T_k(\xi_0)\right\|_{B_k\to B_{k+1}}\left\|f_m\right\|_{\mathscr{B}_s}\to 0 \qquad (8.6)$$

lorsque $\xi\to\xi_0$.

Mais vu que $\|f_m - f\|_{\mathscr{B}_s}\to 0$ lorsque $m\to\infty$, comme dans la démonstration du lemme 8.2 on déduit de (8.6) que la famille

$$\overset{2}{T}_1(\xi)\dots\overset{2N-2}{T}_{N-1}(\xi) f\left(\overset{1}{A}_1(\xi),\dots,\overset{2N-1}{A}_N(\xi)\right)$$

est continue en ξ_0 par rapport à ξ, ce qui prouve le lemme. La conséquence immédiate de ce lemme est l'analogue multidimensionnel du théorème 8.2.

Théorème 8.3. *Soient $A_k(\xi)$, $k=1,\dots,N$, des ensembles générateurs satisfaisant la condition (A_1) au voisinage d'un point ξ_0; $T_k: D_k\to D_{k+1}$ des opérateurs linéaires, tels que $T_k\in\mathrm{Hom}(\overline{B}_k, B_{k+1})$ et ne dépendent pas de ξ $(k=1,\dots,N-1)$; $A_k^{(j)}(\xi)$, $j=1,\dots,n_k$, $k=1,\dots,N$ des familles dérivables dans $\mathrm{Hom}(B_k,\overline{B}_k)$ en ξ_0; f un symbole appartenant à l'espace $\mathscr{B}_{(2s+1)}(\mathbf{R}^{|n|})$, où*

$$(2s+1)=(\underbrace{2s_1+1,\dots,2s_1+1}_{n_1},\dots,\underbrace{2s_N+1,\dots,2s_N+1}_{n_N}).$$

Sous ces conditions la famille d'opérateurs

$$\overset{2}{T}_1\dots\overset{2N-2}{T}_{N-1} f\left(\overset{1}{A}_1(\xi),\dots,\overset{2N-1}{A}_N(\xi)\right)$$

est dérivable en ξ_0 pour la norme de l'espace $\mathrm{Hom}(B_1,\overline{B}_N)$ et

$$\frac{d}{d\xi}\overset{2}{T}_1\dots\overset{2N-2}{T}_{N-1} f\left(\overset{1}{A}_1(\xi),\dots,\overset{2N-1}{A}_N(\xi)\right)\Big|_{\xi=\xi_0} =$$
$$= \sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{n_k}\left[\frac{d}{d\xi}\overset{2k}{A}_k^{(i)}(\xi_0)\right]\overset{2}{T}_1\dots\overset{2k-2}{T}_{k-1}\ \overset{2k+2}{T}_k\dots\overset{2N}{T}_{N-1}\times$$
$$\times(\delta_{k,i} f)\left(\overset{1}{A}_1(\xi_0),\dots,\overset{2k-1}{A}_k^{(1)}(\xi_0),\dots\right.$$
$$\left.\dots,\overset{2k-1}{A}_k^{(i)}(\xi_0),\ \overset{2k+1}{A}_k^{(i)}(\xi_0),\dots\overset{2k+1}{A}_k^{(n_k)}(\xi_0),\dots,\overset{2N+1}{A}_N^{(n_N)}(\xi_0)\right).$$

Démonstration. Divisons les deux membres de (8.5) par $\xi-\xi_0$. En vertu du lemme 8.4, la limite du second membre lorsque $\xi\to\xi_0$ existe et l'on obtient la proposition du théorème.

Exemple. Considérons le développement de l'opérateur

$$L\left(\overset{2}{x},\ hp+\overset{1}{\frac{\partial S}{\partial x}}\right)=e^{-\frac{i}{h}S}\,L\left(\overset{2}{x},\ \overset{1}{hp}\right)e^{\frac{i}{h}S},$$

où $p=-i\partial/\partial x$, jusqu'à la puissance deux du paramètre h, S étant une fonction dérivable de x. D' après le théorème précédent

$$L\left(\overset{2}{x},\ \overset{1}{hp+\partial S/\partial x}\right)=L(x,\ \partial S/\partial x)+\overset{2}{hp}\,\frac{L\left(\overset{4}{x},\ \overset{1}{\partial S/\partial x}\right)-L\left(\overset{4}{x},\ \overset{3}{\partial S/\partial x}\right)}{\underset{1}{\partial S/\partial x}-\underset{3}{\partial S/\partial x}}+O(h^2).$$

Cette formule fait intervenir les couples déterminants suivants: $B_1=B_2=W_2^1$, $B_1'=B_2'=L_2$; $hp+\partial S/\partial x$ possède les couples déterminants $(B_1,\ B_2)$ et $(B_1',\ B_2')$, p est un opérateur borné de B_2 dans B_1'.

Vu que le spectre de l'opérateur vectoriel $\left(\underset{1}{\partial S/\partial x},\ \overset{2}{p},\ \underset{3}{\partial S/\partial x}\right)$ est situé sur la diagonale, que $\underset{1}{\partial S/\partial x}$ est un générateur d'ordre 1 et que $\underset{3}{\partial S/\partial x}$ est un générateur d'ordre 0, on obtient

$$\overset{2}{p}\,\frac{L\left(\overset{4}{x},\ \overset{1}{\partial S/\partial x}\right)-L\left(\overset{4}{x},\ \overset{3}{\partial S/\partial x}\right)}{\underset{1}{\partial S/\partial x}-\underset{3}{\partial S/\partial x}}=\overset{2}{pP}\left(\overset{4}{x},\ \overset{1}{\partial S/\partial x},\ \overset{3}{\partial S/\partial x}\right),$$

où $P(x;\ \xi,\ \eta)$ est la somme du terme d'ordre 1 et du terme d'ordre 0 du développement taylorien de la fonction $\dfrac{L(x,\ \xi)-L(x,\ \eta)}{\xi-\eta}$ par rapport à ξ en $\xi=\eta$, c'est-à-dire que

$$P(x;\ \xi,\ \eta)=L_p(x,\ \eta)+\frac{1}{2}L_{pp}(x,\ \eta)(\xi-\eta)$$

(L_p est la dérivée de la fonction L par rapport au second argument). Par ailleurs,

$$\overset{2}{pP}\left(\overset{4}{x};\ \overset{1}{\partial S/\partial x},\ \overset{3}{\partial S/\partial x}\right)=-\overset{2}{i\partial/\partial x}\left\{L_p\left(\overset{4}{x},\ \overset{3}{\partial S/\partial x}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}L_{pp}\left(\overset{4}{x};\ \overset{3}{\partial S/\partial x}\right)\left(\overset{1}{\partial S/\partial x}-\overset{3}{\partial S/\partial x}\right)\right\}=$$

$$=-iL_p(x,\ \partial S/\partial x)\,\frac{\partial}{\partial x}-\frac{i}{2}L_{pp}(x,\ \partial S/\partial x)\,\partial^2 S/\partial x^2.$$

On obtient en définitive la formule

$$e^{-\frac{i}{h}S(x)} L\left(\overset{2}{x},\ -ih\overset{1}{\partial}/\partial x\right) e^{\frac{i}{h}S(x)}\varphi(x) =$$

$$= L(x,\ \partial S/\partial x)\,\varphi(x) - ih\left[L_p(x,\ \partial S/\partial x)\,\partial\varphi/\partial x + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} L_{pp}(x,\ \partial S/\partial x)\,\partial^2 S/\partial x^2\,\varphi(x)\right]. \qquad (8.7)$$

Exercice. Supposons remplies les conditions du n° 4, § 7, et soit $f \in \mathscr{B}_r(\mathbf{R}^2)$, où r est assez grand. Etablir les conditions sous lesquelles la différence

$$f(B_1, B_2) - \sum_{j=0}^{N} \prod_{k=1}^{j} \frac{2k}{(T_2 - T_1)} \sum_{l=0}^{j} \frac{f\left(\overset{2l+1}{A_1},\ \overset{2l+1}{A_2}\right)}{\prod_{i \neq l} \left(\overset{2l+1}{T_1} - \overset{2i+1}{T_1}\right)}$$

est un opérateur borné de B_τ dans $B_{\tau-(N+1)(\tau_2-2\tau_1)}$.

Solution. Il suffit que la condition suivante soit remplie : toutes les fonctions

$$\delta^m f(x_0, \ldots, x_m) \equiv \sum_{k=0}^{m} \frac{f(x_k^{(1)}, x_k^{(2)})}{\prod_{j \neq k} [(x_k^{(1)} + ix_k^{(2)}) - (x_j^{(1)} + ix_j^{(2)})]} \qquad m = 0, 1, \ldots, N+1$$

sont éléments de l'espace $\mathscr{B}_{\underbrace{(s,\ldots,s)}_{m+1}}(\sigma(T_{k_0}) \times \ldots \times \sigma(T_{k_m}))$, où $k_j = 1, 2$. En effet, grâce au lemme 8.1, on obtient comme dans la démonstration du théorème 8.3 un développement de la forme (8.5) :

$$\overset{2}{R}_1 \ldots \overset{2N-2}{R}_{N-1} \psi\left(\overset{1}{T}_1, \ldots, \overset{2N-1}{T}_N\right) - \overset{2}{R}_1 \ldots \overset{2N-2}{R}_{N-1} \varphi\left(\overset{1}{K}_1, \ldots, \overset{2N-1}{K}_N\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \left(\overset{2j}{T}_j - \overset{2j}{K}_j\right) \overset{2}{R}_1 \ldots \overset{2j-2}{R}_{j-1} \overset{2N}{R}_{N-1} (\delta^j \psi)\left(\overset{1}{K}_1, \ldots, \overset{2j-1}{K}_j, \overset{2j+1}{T}_j, \ldots, \overset{2N+1}{T}_N\right),$$

où $R_1, \ldots, R_{N-1}$ sont des transporteurs, T_i, K_i sont des opérateurs réguliers de degré s_i, $(T_i - K_i)$ des transporteurs pour $i = 1, \ldots, N$ dans l'échelle $\{B_\tau\}$,

$$\psi \in \mathscr{B}_{\underbrace{(s,\ldots,s)}_{N}}(\mathbf{R}^2 \times \ldots \times \mathbf{R}^2),\ \delta^j \psi \in \mathscr{B}_{\underbrace{(s,\ldots,s)}_{N+1}}(\sigma(K_1) \times \ldots \times \sigma(T_N)), \qquad i = 1, \ldots, N.$$

En appliquant cette formule au second membre de l'égalité

$$f(B_1, B_2) - f(A_1, A_2) = \overset{2}{(T_2 - T_1)} \frac{f\left(\overset{3}{B}_1, \overset{3}{B}_2\right) - f\left(\overset{1}{A}_1, \overset{1}{A}_2\right)}{\overset{3}{T}_2 - \overset{1}{T}_1} \equiv \overset{2}{(T_2 - T_1)}\, \delta f\left(\overset{1}{T}_1, \overset{3}{T}_2\right),$$

on obtient le développement cherché

$$f(B_1, B_2) = f(A_1, A_2) + \overset{2}{(T_2 - T_1)}\, \delta f\left(\overset{1}{T}_1, \overset{3}{T}_1\right) + \ldots$$

$$\ldots + \overset{2}{(T_2 - T_1)} \ldots \overset{2N}{(T_2 - T_1)}\, \delta^N f\left(\underbrace{\overset{1}{T}_1, \ldots, \overset{2N+1}{T}_1}_{N+1}\right) + Z_N,$$

où l'opérateur Z_N est — ce qu'on établit sans peine — un opérateur borné de B_τ dans $B_{\tau-(N-1)(\tau_2-2\tau_1)}$.

§ 9. Formules de commutation

Soient A et B des générateurs de degrés respectifs s et s' agissant dans un espace de Banach B contenant une variété linéaire E partout dense invariante par A, B, e^{iAt}, e^{-iBt}.

Nous admettrons dans ce paragraphe qu'est remplie la condition de compatibilité des opérateurs A et B: pour toute fonction $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, les opérateurs $\varphi(A)B$ et $B\varphi(A)$ sont définis sur E et fermés.

Lemme 9.1. *Supposons que l'opérateur A et le commutateur $[A, B]$ sont bornés. Alors pour tout $f \in \mathscr{B}_{s+1}(\mathbf{R})$, on a la formule*

$$\overline{[B, f(A)]} = \overline{[B, A]}^{2} \frac{f^{(1)}(A) - f^{(3)}(A)}{A - A},$$

où la barre désigne la fermeture.

Démonstration. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ une fonction réelle comprise entre 0 et 1 prenant la valeur 1 au voisinage du 0. Posons $\varphi_n(x) = \varphi(x/n)$, $A_n = \varphi_n(B)\, A \varphi_n(B)$ et prouvons d'abord la formule

$$\overline{[B, f(A_n)]} = \frac{f^{(1)}(A_n) - f^{(3)}(A_n)}{A_n - A_n} \overline{[B, A_n]}. \tag{9.1}$$

On a

$$\overline{[A_n, B]} = \varphi_n(B)\, A \varphi_n(B) B - B \varphi_n(B)\, A \varphi_n(B) = \varphi_n(B) \overline{[A, B]}\, \varphi_n(B).$$

Donc le second membre de la formule (9.1) est égal à

$$\overline{[\varphi_n(B) \overline{[B, A]}\, \varphi_n(B)]}^{2} \frac{f^{(1)}(A_n) - f^{(3)}(A_n)}{A_n - A_n} =$$

$$= \overline{[\varphi_n(B) B A \varphi_n(B)]}^{2} \frac{f^{(1)}(A_n) - f^{(3)}(A_n)}{A_n - A_n} - \overline{[\varphi_n(B) A B \varphi_n(B)]}^{2} \frac{f^{(1)}(A_n) - f^{(3)}(A_n)}{A_n - A_n} =$$

$$= \overline{[A_n B]}^{2} \frac{f^{(1)}(A_n) - f^{(3)}(A_n)}{A_n - A_n} + \overline{[B A_n]}^{2} \frac{f^{(1)}(A_n) - f^{(3)}(A_n)}{A_n - A_n}.$$

Désignons $B_m = B\varphi_m(B)$. Alors, pour n fixe et m assez grand,

$$\overline{[\overline{[B, A_n]}]}^{2} \frac{f^{(1)}(A_n) - f^{(3)}(A_n)}{A_n - A_n} = -\overline{[A_n B_m]}^{2} \frac{f^{(1)}(A_n) - f^{(3)}(A_n)}{A_n - A_n} +$$

$$+\overset{2}{\overline{[[B_m A_n]]}}\frac{f\overset{1}{(}A_n\overset{1}{)}-f\overset{3}{(}A_n\overset{3}{)}}{A_n-A_n}=-\overset{3}{A_n}\overset{2}{B_m}\frac{f\overset{1}{(}A_n\overset{1}{)}-f\overset{3}{(}A_n\overset{3}{)}}{A_n-A_n}+$$

$$+\overset{2}{B_m}\overset{1}{A_n}\frac{f\overset{1}{(}A_n\overset{1}{)}-f\overset{3}{(}A_n\overset{3}{)}}{A_n-A_n}=\overset{2}{B_m}\left(-f\overset{3}{(}A_n\overset{3}{)}+f\overset{1}{(}A_n\overset{1}{)}\right)=[B_m, f(A_n)].$$

Ainsi, pour n fixe et m assez grand, on a la formule

$$\overset{2}{\overline{[[B, A_n]]}}\frac{f\overset{1}{(}A_n\overset{1}{)}-f\overset{3}{(}A_n\overset{3}{)}}{A_n-A_n}=[B_m, f(A_n)];$$

on remarque, en particulier, que le second membre de cette formule est indépendant de m. Si $h=\psi(B)q$, où $\psi\in C_0^\infty(\mathbf{R})$, alors

$$f(A_n)B_m h=f(A_n)Bh$$

pour m assez grand. Par conséquent, $B_m f(A_n)h$ est indépendant de m pour m assez grand, et puisque $\varphi_m(B)\to 1$ simplement, $B=B\varphi_m(B)$ et B est fermé, il vient que

$$B_m f(A_n)h=Bf(A_n)h$$

pour m assez grand. Ceci signifie que la formule (9.1) est valable sur un ensemble partout dense, donc, partout.

Dans la formule (9.1) faisons tendre $n\to\infty$ en admettant en plus que la transformée réciproque de Fourier de la fonction f admet un support compact. Pour tout h

$$e^{-iA_n t}h\to e^{-iAt}h \tag{9.2}$$

uniformément en $t\in[a,b]$ et

$$\left\|e^{-iA_n t}\right\|\leqslant c \tag{9.3}$$

pour $t\in[a, b]$. Ceci résulte du fait que

$$\left\|e^{-iA_n t}-\sum_{k=0}^{N}\frac{(iA_n)^k}{k!}\right\|=O_t(\varepsilon),$$

où $O_t(\varepsilon)$ est indépendant de n. En faisant tendre $n\to\infty$ au second membre de (9.1), on trouve en vertu de (9.2) et (9.3)

$$\lim_{n\to\infty}\overset{2}{\overline{[B, A_n]}}\frac{f\overset{1}{(}A_n\overset{1}{)}-f\overset{3}{(}A_n\overset{3}{)}}{A_n-A_n}h=\overset{2}{\overline{[B, A]}}\frac{f\overset{1}{(}A\overset{1}{)}-f\overset{3}{(}A\overset{3}{)}}{A-A}h.$$

S'agissant de la limite du premier membre de la formule (9.1), $f(A_n)\to f(A)$ simplement, de sorte que $f(A_n)B\to f(A)B$ sur E. Donc la suite $\{Bf(A_n)h\}$ converge pour tout $h\in E$. L'opérateur B étant fermé, il vient pour $h\in E$:

$$\lim_{n\to\infty} Bf(A_n)h = Bf(A)h.$$

Ainsi, pour tout $h\in E$,

$$[B, f(A)]h = \overset{2}{\overline{[B, A]}}\,\frac{f\left(\overset{1}{A}\right) - f\left(\overset{3}{A}\right)}{\overset{1}{A} - \overset{3}{A}}\,h.$$

Le lemme a été établi pour des fonctions f dont les transformées réciproques de Fourier sont à support compact. L'ensemble de ces fonctions étant dense dans $\mathscr{B}_{s+1}(\mathbf{R})$, le lemme est valable dans le cas général.

Le théorème suivant affirme qu'on peut renoncer à la condition que l'opérateur A est borné.

Théorème 9.1. *Supposons que le commutateur $[A, B]$ est borné. Alors pour tout $f\in\mathscr{B}_{s+1}(\mathbf{R})$, on a la formule*

$$[B, f(A)] = \overset{2}{\overline{[B, A]}}\,\frac{f\left(\overset{1}{A}\right) - f\left(\overset{3}{A}\right)}{\overset{1}{A} - \overset{3}{A}}.$$

Démonstration. Soit $\{\varphi_n\}$ la suite de fonctions envisagée dans la démonstration du lemme 9.1. Posons $B_n = \varphi_n(A)B\varphi_n(A)$, $A_n = A\varphi_n(A)$. Considérons le commutateur

$$[B_n, A_m] = \varphi_n(A)B\varphi_n(A)A\varphi_m(A) - A\varphi_m(A)\varphi_n(A)B\varphi_n(A).$$

Supposons que n est fixe. Pour m assez grand, on obtient alors

$$[B_n, A_m]h = \varphi_n(A)[B, A]\varphi_n(A)h, \qquad h\in E.$$

Donc, pour m assez grand, l'opérateur $\overline{[B_n, A_m]}$ est indépendant de m et est borné en norme par le nombre $\|[B, A]\|$.

En appliquant le lemme 9.1, on trouve

$$\overline{[B_n, f(A_m)]} = \overset{2}{\overline{[\varphi_n(A)[B, A]\varphi_n(A)]}}\,\frac{f\left(\overset{1}{A_m}\right) - f\left(\overset{3}{A_m}\right)}{\overset{1}{A_m} - \overset{3}{A_m}}.$$

Pour m assez grand, cette formule peut s'écrire

$$\overline{[B_n, f(A_m)]} = \varphi_n\left(\overset{3}{A}\right)\overset{2}{\overline{[B, A]}}\,\varphi_n\left(\overset{1}{A}\right)\frac{f\left(\overset{1}{A}\right) - f\left(\overset{3}{A}\right)}{\overset{1}{A} - \overset{3}{A}}. \tag{9.4}$$

Soit $h \in E$. Alors $f(A_m) B_n h = f(A_m) \varphi_n(A) B \varphi_n(A) h = f(A) \varphi_n(A) \times$ $\times B \varphi_n(A) h = f(A) B_n h$ si m est assez grand et n fixe. De façon analogue, $B_n f(A_m) h = B_n f(A) h$ pour m assez grand. On a donc la formule

$$[\overline{B_n, f(A)}] = \varphi_n\begin{pmatrix}3\\A\end{pmatrix} \overset{2}{[\overline{B, A}]} \frac{f\begin{pmatrix}1\\A\end{pmatrix} - f\begin{pmatrix}3\\A\end{pmatrix}}{\begin{matrix}1 & 3\\A & -A\end{matrix}} \varphi_n\begin{pmatrix}1\\A\end{pmatrix}.$$

Faisons tendre $n \to \infty$. Le second membre converge simplement vers

$$\overset{2}{[\overline{B, A}]} \frac{f\begin{pmatrix}1\\A\end{pmatrix} - f\begin{pmatrix}3\\A\end{pmatrix}}{\begin{matrix}1 & 3\\A & -A\end{matrix}}$$

Pour ce qui est du premier membre, pour $h \in E$, $q \in \psi(A) h$, $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ on a

$$[B_n, f(A)] q = \varphi_n(A) B \varphi_n(A) f(A) \psi(A) h - $$
$$- f(A) \varphi_n(A) B \varphi_n(A) \psi(A) h = \varphi_n(A) [B, f(A)] \varphi_n(A) \psi(A) h.$$

Si n est assez grand, alors $\varphi_n(A) \psi(A) h = \psi(A) h = q$, de sorte que

$$\lim_{n \to \infty} [B_n, f(A)] q = \lim_{n \to \infty} \varphi_n(A) [B, f(A)] q = [B, f(A)] q.$$

Ceci achève la démonstration du théorème, puisque l'enveloppe linéaire de l'ensemble des éléments de la forme $\psi(A) h$, où $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, $h \in E$, est partout dense.

Théorème 9.2. *Supposons que le commutateur $[A, B]$ est borné. Alors, pour toute fonction $f(x, y) \in \mathscr{B}_{s+1, s'+1}(\mathbf{R}^2)$, on a la formule*

$$f\begin{pmatrix}1 & 2\\A, & B\end{pmatrix} - f\begin{pmatrix}2 & 1\\A, & B\end{pmatrix} = \overset{3}{[\overline{A, B}]} \frac{\delta^2 f}{\delta x \, \delta y}\begin{pmatrix}2 & 4 & 1 & 5\\A, & A, & B, & B\end{pmatrix}. \tag{9.5}$$

Démonstration. Il suffit de considérer le cas où $f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$, puisque l'ensemble de ces fonctions est dense dans $\mathscr{B}_{s+1, s'+1}(\mathbf{R}^2)$. On établit la formule (9.5) en passant à la fermeture. On a

$$[f_1(A), f_2(B)] = \overset{2}{[\overline{f_1(A), B}]} \frac{f_2\begin{pmatrix}1\\B\end{pmatrix} - f_2\begin{pmatrix}3\\B\end{pmatrix}}{\begin{matrix}1 & 3\\B & -B\end{matrix}}.$$

Par ailleurs,

$$[f_1(A), B] = \overset{2}{[\overline{A, B}]} \frac{f_1\begin{pmatrix}1\\A\end{pmatrix} - f_1\begin{pmatrix}3\\A\end{pmatrix}}{\begin{matrix}1 & 3\\A & -A\end{matrix}}.$$

Donc

$$[f_1(A), f_2(B)] = \overset{3}{[A, B]} \frac{f_1\left(\overset{2}{A}\right) - f_1\left(\overset{4}{A}\right)}{\underset{2}{A} - \underset{4}{A}} \frac{f_2\left(\overset{1}{B}\right) - f_2\left(\overset{5}{B}\right)}{\underset{1}{B} - \underset{5}{B}}.$$

Ce qui prouve le théorème.

Théorème 9.3. *Soit* $f(x) \in \bigcap_s \mathscr{B}_s(\mathbf{R})$, $f(x, y) \in \bigcap_{s,s'} \mathscr{B}_{s,s'}(\mathbf{R}^2)$ *et supposons que le commutateur* $[A, B]$ *est borné. On a alors la formule*

$$f\left(\left[\!\left[g\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}\right)\right]\!\right]\right) = \left[\!\left[f\left(g\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}\right)\right)\right]\!\right] + \left[\!\left[\overset{5}{[A, B]} \frac{\delta g}{\delta x}\left(\overset{3}{A}, \overset{7}{A}, \overset{9}{B}\right) \frac{\delta g}{\delta y}\left(\overset{3}{A}, \overset{4}{A}, \overset{6}{B}\right) \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \frac{\delta^2 f}{\delta x^2}\left(g\left(\overset{1}{A}, \overset{9}{B}\right), \left[\!\left[g\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}\right)\right]\!\right], \left[\!\left[g\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}\right)\right]\!\right]\right)\right]\!\right]^{*}). \quad (9.6)$$

Démonstration. Si l'opérateur A est borné, la démonstration est confondue avec celle du théorème 9.2.

Supposons donc que A n'est pas borné. Posons $A_n = \dfrac{A}{1 + \dfrac{A^2}{n}}$. Alors l'opérateur A_n est borné et $\|e^{-iA_n t}\| \leqslant c(1 + |t|)^s$, où c et s sont des constantes indépendantes de n (cf. ch. III). Par ailleurs,

$$\|[A_n, B]\| \leqslant \|[A, B]\| \left\| \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} \right\|_{\mathscr{B}_{s,s}(\mathbf{R})},$$

où $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + \dfrac{x^2}{n}}$.

On a

$$\delta^2 f_n(x, y) = \frac{\dfrac{x}{1 + \dfrac{x^2}{n}} - \dfrac{y}{1 + \dfrac{y^2}{n}}}{x - y} = \delta^2 f_1\left(\frac{x}{\sqrt{n}}, \frac{y}{\sqrt{n}}\right),$$

d'où

$$\|\delta^2 f_n(x, y)\|_{\mathscr{B}_{s,s}(\mathbf{R})} \leqslant \|\delta^2 f_1(x, y)\|_{\mathscr{B}_{s,s}(\mathbf{R}^2)}.$$

Donc les commutateurs $[A_n, B]$ sont uniformément bornés en n. Si l'on remplace A par A_n dans la formule (9.6), la formule obtenue sera valable. En y faisant tendre $n \to \infty$, on obtient la formule (9.6) dans le cas général. Ce qui prouve le théorème.

*) La notation $\left[\!\left[g\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}\right)\right]\!\right]$ exprime que nous traitions $g\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}\right)$ comme un opérateur et non comme un élément d'une plus vaste expression (cf. Introduction). Nous omettrons les crochets si aucune confusion n'est à craindre.

§ 10. Symboles croissants

Soient A_1 et A_2 des générateurs de degrés respectifs s_1 et s_2 dans un espace de Banach B. On admettra comme toujours que A_1 et A_2 sont définis sur un même ensemble E partout dense dans B et on désignera les fermetures des opérateurs A_1 et A_2 dans B encore par A_1 et A_2 respectivement.

Définition. Supposons que pour une fonction $f(x, y)$ on puisse exhiber des entiers k, $l \geqslant 0$ tels que la fonction

$$g(x, y) = \frac{f(x, y)}{(x+i)^k (y+i)^l}$$

appartienne à l'espace $\mathscr{B}_{s_1, s_2}(\mathbf{R}^2)$. *Posons* alors

$$f\binom{1}{A_1}\binom{2}{A_2} \stackrel{\text{déf}}{=} (A_2+i)^l g\binom{1}{A_1}\binom{2}{A_2} (A_1+i)^k h \tag{10.1}$$

pour tout vecteur $h \in E$ pour lequel $g\binom{1}{A_1}\binom{2}{A_2} (A_1+i)^k h$ est contenu dans l'ensemble de définition de l'opérateur A_2^l.

Théorème 10.1. *Si, dans les notations de la définition,*

$$k' \geqslant k,\ l' \geqslant l, \qquad g'(x, y) = \frac{f(x, y)}{(x+i)^{k'} (y+i)^{l'}}$$

et h est un vecteur sur E tel que

$$g\binom{1}{A_1}\binom{2}{A_2} (A_1+i)^k h \in D_{A_2^l},$$

alors

$$(A_2+i)^l g\binom{1}{A_1}\binom{2}{A_2} (A_1+i)^k h = (A_2+i)^{l'} g'\binom{1}{A_1}\binom{2}{A_2} (A_2+i)^{k'} h. \tag{10.2}$$

Démonstration. On a

$$g(x, y) = g'(x, y)(x+i)^{k'-k}(y+i)^{l'-l}.$$

Supposons que la suite $\{\varphi_n\}$ de fonctions

$$\varphi_n(x, y) = \sum_{j=1}^{m_n} \alpha_{jn}(x)\beta_{jn}(y), \qquad \alpha_{jn} \in \mathscr{B}_{s_1}(\mathbf{R}), \qquad \beta_{jn} \in \mathscr{B}_{s_2}(\mathbf{R})$$

converge vers $g(x, y)$ dans $\mathscr{B}_{s_1, s_2}(\mathbf{R}^2)$. Dans ces conditions, la suite de fonctions

$$\Psi_n(x, y) = \sum_{j=1}^{m_n} \gamma_{jn}(x)\delta_{jn}(y),$$

où $\gamma_{jn}(x) = \dfrac{\alpha_{jn}(x)}{(x+i)^{k'-k}}$, $\delta_{jn}(y) = \dfrac{\beta_{jn}(y)}{(y+i)^{l'-l}}$ converge vers $g'(x, y)$ dans

$\mathscr{B}_{s_1,s_2}(\mathbf{R}^2)$. Pour tout $q\in E$, on a

$$\varphi_n\left(\overset{1}{A_1},\overset{2}{A_2}\right)q=\sum_{j=1}^{m_n}\beta_{jn}(A_2)\alpha_{jn}(A_1)q=$$

$$=\sum_{j=1}^{m_n}(A_2+i)^{l'-l}\delta_{jn}(A_2)\gamma_{jn}(A_1)(A_1+i)^{k'-k}q=$$

$$=(A_2+i)^{l'-l}\Psi_n\left(\overset{1}{A_1},\overset{2}{A_2}\right)(A_1+i)^{k'-k}q.$$

En faisant tendre $n\to\infty$, on trouve que

$$g\left(\overset{1}{A_1},\overset{2}{A_2}\right)q=(A_2+i)^{l'-l}g'\left(\overset{1}{A_1},\overset{2}{A_2}\right)(A_1+i)^{k'-k} \tag{10.3}$$

(on s'est servi du fait que l'opérateur $(A_2+i)^{l'-l}$ est fermé). En portant $q=(A_1+i)^k h$ dans (10.3) et en appliquant l'opérateur $(A_2+i)^l$ à ses deux membres, on obtient la formule (10.2).

Le théorème 10.1 indique que l'élément $f\left(\overset{1}{A_1},\overset{2}{A_2}\right)h$ ne dépend pas du choix des exposants k et l dans (10.1). Remarquons encore que si le second membre de la formule (10.2) existe, alors il en est de même du premier, ce qui résulte directement de la formule (10.3).

Théorème 10.2. *Soit $f\left(\overset{1}{A_1},\overset{2}{A_2}\right)$ un opérateur partout défini sur E et borné dans B, et soit T sa fermeture dans B. Alors, pour toute fonction $g\in\mathscr{B}_{s_1,s_2}(\mathbf{R}^2)$ et tout $h\in E$, on a la formule*

$$[fg]\left(\overset{1}{A_1},\overset{2}{A_2}\right)h=\overset{2}{T}g\left(\overset{1}{A_1},\overset{3}{A_2}\right)h.$$

Démonstration. Soit

$$f\left(\overset{1}{A_1},\overset{2}{A_2}\right)h=(A_2+i)^l f_0\left(\overset{1}{A_1},\overset{2}{A_2}\right)(A_1+i)^k h,$$

où

$$f_0(x,y)=f(x,y)/(x+i)^k(y+i)^l,\qquad f_0\in\mathscr{B}_{s_1,s_2}(\mathbf{R}^2).$$

Alors, pour tout $h\in E$, on a

$$\overset{2}{T}g\left(\overset{1}{A_1},\overset{2}{A_2}\right)h=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}^2}\tilde{g}(t,\tau)e^{-iA_2\tau}(A_2+i)^l f_0\left(\overset{1}{A_1},\overset{2}{A_2}\right)(A_1+i)^k e^{-iA_1 t}h\,dt\,d\tau=$$

$$=(A_2+i)^l\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}^2}\tilde{g}(t,\tau)e^{-iA_2\tau}f_0\left(\overset{1}{A_1},\overset{2}{A_2}\right)e^{-iA_2 t}(A_1+i)^k h\,dt\,d\tau=$$

$$=(A_2+i)^l[f_0 g]\left(\overset{1}{A_1},\overset{2}{A_2}\right)(A_1+i)^k h=(fg)\left(\overset{1}{A_1},\overset{2}{A_2}\right)h.$$

Corollaire. *On a la majoration*

$$\left\| (fg)\begin{pmatrix}1 & 2\\ A_1, & A_2\end{pmatrix}\right\|_B \leqslant c \left\| f\begin{pmatrix}1 & 2\\ A_1, & A_2\end{pmatrix}\right\|_B \|g\|_{\mathscr{B}_{s_1,s_2}(\mathbf{R}^2)}, \tag{10.4}$$

où c est la norme de l'homomorphisme $\mathscr{M}: \mathscr{B}_{s_1,s_2}(\mathbf{R}^2) \to \mathrm{Hom}(B, B)$ construit à l'aide du couple d'opérateurs $\begin{pmatrix}1 & 2\\ A_1, & A_2\end{pmatrix}$

Pour la suite nous aurons besoin de symboles $f(x_1, \ldots, x_n)$ vérifiant la condition

$$\frac{f(x_1, \ldots, x_n)}{(x_1+i)^k} \in \mathscr{B}_{s_1,s_n}(\mathbf{R}^n)$$

pour un k naturel. Si $A_1, \ldots, A_n$ est un ensemble de générateurs de degrés respectifs $s_1, \ldots, s_n$ dans un espace de Banach B définis sur une variété linéaire E partout dense dans B, alors pour tout $h \in E$ on posera

$$f\begin{pmatrix}1 & & n\\ A_1, & \ldots, & A_n\end{pmatrix} h \stackrel{\text{déf}}{=} g\begin{pmatrix}1 & & n\\ A_1, & \ldots, & A_n\end{pmatrix} (A_1+i)^k h,$$

où $g(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n)/(x+i)^k$. Comme dans le théorème 10.1, on établit que cette définition est indépendante du choix de k.

Il est immédiat de s'assurer que dans ce cas on a une majoration identique à (10.4): si $f\begin{pmatrix}1 & & n\\ A_1, & \ldots, & A_n\end{pmatrix}$ est un opérateur borné dans B et $g \in \mathscr{B}_{s_1,\ldots,s_n}(\mathbf{R}^n)$, alors

$$\left\| (fg)\begin{pmatrix}1 & & n\\ A_1, & \ldots, & A_n\end{pmatrix}\right\|_B \leqslant c \left\| f\begin{pmatrix}1 & & n\\ A_1, & \ldots, & A_n\end{pmatrix}\right\|_B \|g\|_{\mathscr{B}_{s_1,\ldots,s_n}(\mathbf{R}^n)},$$

où c est la norme de l'homomorphisme $\mathscr{M}: \mathscr{B}_{s_1,\ldots,s_n}(\mathbf{R}^n) \to \mathrm{Hom}(B, B)$ construit à l'aide de la séquence d'opérateurs $\begin{pmatrix}1 & & n\\ A_1, & \ldots, & A_n\end{pmatrix}$.

Exercice. Montrer que les fonctions de deux générateurs non commutables, indéfiniment dérivables et croissant moins vite qu'une puissance de l'argument, forment une algèbre munie d'une μ-structure (avec la même restriction que dans la note de la page 322).

Définissons enfin des fonctions croissantes de plusieurs opérateurs non commutables. Nous aurons besoin à cet effet de poser des conditions supplémentaires. Plus exactement, soient $\{B_\tau\}$ une échelle de Banach telle que $B_\tau \subset B_{\tau'}$ pour $\tau < \tau'$, $A_1 \ldots, A_n$ des générateurs dans l'echelle $\{B_\tau\}$ qui sont transporteurs aussi dans la même échelle. Désignons par $\mathscr{S}^\infty$ l'espace des fonctions $f(x_1, \ldots, x_n)$ croissant avec toutes leurs dérivées moins vite que $|x|^k$ (l'exposant k varie d'une fonction f à l'autre).

Pour toute fonction $f(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathscr{S}^\infty$ on peut exhiber des nombres naturels $k_1, \ldots, k_n$ tels que

$$g(x_1, \ldots, x_n) = \frac{f(x_1, \ldots, x_n)}{(x_1+i)^{k_1} \ldots (x_n+i)^{k_n}}$$

appartienne à $\mathscr{B}_{l_1,\ldots,l_n}(\mathbf{R}^n)$ quels que soient $l_1, \ldots, l_n$. Posons

$$f\begin{pmatrix}1 & & n\\ A_1, & \ldots, & A_n\end{pmatrix} \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix}2\\ A_1+1\end{pmatrix}^{k_1} \ldots \begin{pmatrix}2n\\ A_n+1\end{pmatrix}^{k_n} g\begin{pmatrix}1 & & 2n-1\\ A_1, & \ldots, & A_n\end{pmatrix}, \tag{10.5}$$

où les opérateurs $(A_1+i)^{k_1}, \ldots, (A_n+i)^{k_n}$ sont traités comme des transporteurs.

On propose au lecteur de vérifier la validité de cette définition.

Exercice. Vérifier que la formule (10.5) munit l'algèbre des générateurs et des transporteurs dans l'échelle $\{B_\tau\}$ d'une μ-structure avec une opération $\mu(x_1 \to A_1, \ldots, x_n \to A_n)$ qui envoie $f(x_1, \ldots, x_n)$ dans $f\overset{n}{(}A_1, \ldots, A_n\overset{n}{)}$.

§ 11. Spectre quotient

Soient $\{B_\tau\}$ une échelle de Banach, A et A' des générateurs dans cette échelle de degrés respectifs s et s' et de pas respectifs k_1 et k_2, T un transporteur de pas l; S_1 et S_2 des opérateurs définis sur D et agissant dans B_τ pour τ quelconque. On dira que les opérateurs S_1 et S_2 sont *équivalents* si, quels que soient τ et τ',

$$\|S_1 - S_2\|_{\tau \to \tau'} < \infty.$$

Définition. On dira que $\lambda \in \mathbf{R}^2$ est *un point de la résolvante quotient* de l'opérateur vectoriel $\overset{1}{(}A, \overset{2}{T}, A'\overset{3}{)}$ s'il existe un voisinage U de λ tel que pour toute fonction $f \in \mathscr{B}_{s,s'}(\mathbf{R}^2)$ à support dans U et tous τ, τ',

$$\left\| \overset{2}{Tf}\left(\overset{1}{A}, \overset{3}{A'}\right) \right\|_{\tau \to \tau'} < \infty,$$

c'est-à-dire que l'opérateur $\overset{2}{Tf}\left(\overset{1}{A}, \overset{3}{A'}\right)$ est équivalent à 0.

Le complémentaire de la résolvante quotient dans $\mathbf{R}^2$ sera appelé *spectre quotient* σ *de l'opérateur vectoriel* $\overset{1}{(}A, \overset{2}{T}, A'\overset{3}{)}$.

Lemme 11.1. *Soit f une fonction à support borné de $\mathscr{B}_{s,s'}(\mathbf{R}^2)$ et supposons que l'opérateur $\overset{2}{Tf}\left(\overset{1}{A}, \overset{3}{A'}\right)$ est équivalent à 0. Alors, tout point λ tel que $f(\lambda) \neq 0$ appartient à la résolvante quotient de l'opérateur vectoriel $\overset{1}{(}A, \overset{2}{T}, A'\overset{3}{)}$.*

Démonstration. Soit U un voisinage du point λ tel que $f(\lambda) \neq 0$ pour $\lambda \in U$, et soit φ une fonction de $\mathscr{B}_{s,s'}(\mathbf{R}^2)$ à support dans U. Il existe alors une fonction $\psi \in \mathscr{B}_{s,s'}(\mathbf{R}^2)$ telle que $\varphi = \psi f$. En vertu du théorème 4.1, pour tout μ

$$\left\| \overset{2}{T\varphi}\left(\overset{1}{A}, \overset{3}{A'}\right) \right\|_{\tau \to \tau + k_1 + k_2 + \mu} \leqslant c \left\| \overset{2}{Tf}\left(\overset{1}{A}, \overset{3}{A'}\right) \right\|_{\tau + k_1 \to \tau + k_1 + \mu} \|\psi\|_{\mathscr{B}_{s,s'}(\mathbf{R})} < \infty.$$

Ce qui prouve le lemme.

Le critère suivant est une conséquence du lemme 11.1.

Théorème 11.1. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point* λ^0 *appartienne à la résolvante quotient de l'opérateur vectoriel* $\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{T}, \overset{3}{A'}\right)$ *est que pour* $\varepsilon>0$ *assez petit, il existe des fonctions* φ, $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ *à supports dans un* ε*-voisinage respectivement de* λ_1 *et* λ_2, *telles que*

$$\varphi(\lambda_1^0)=\psi(\lambda_2^0)=1$$

et que l'opérateur

$$\psi(A')\,T\varphi(A)$$

soit équivalent à 0.

§ 12. Simboles à valeurs opératorielles

Soient A un générateur de degré s de couple déterminant (B_1, B_2), $B_1 \subset B_2$; B_3 un espace de Banach tel que $B_3 \supset B_2$; $L=\mathrm{Hom}(B_1, B_2)$, $L_1=\mathrm{Hom}(B_2, B_3)$, $L_2=\mathrm{Hom}(B_1, B_3)$. Définissons des fonctions de A à valeurs opératorielles.

Par analogie avec le cas scalaire, introduisons les espaces suivants: $C_s(\mathbf{R}, L)$, l'espace des fonctions continues sur $\mathbf{R}$ à valeurs dans L de norme $\|\varphi\|_{C_s(\mathbf{R},L)}=\max\limits_t (1+|t|)^{-s}\|\varphi(t)\|_L$; $C_0^\infty(\mathbf{R}, L_1)$, l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à valeurs dans L_1 à supports compacts (c'est-à-dire que si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}, L_1)$, alors $\varphi(\lambda)$ est égale à l'opérateur 0 pour tous les λ assez grands; $W_2^k(\mathbf{R}, L_1)$, le complété de $C_0^\infty(\mathbf{R}, L_1)$ pour la norme

$$\|f\|^2_{W_2^k(\mathbf{R},L_1)}=\int \|(1+|\xi|^2)^{k/2}\,\tilde f(\xi)\|^2_{L_1} d\xi,$$

où $\tilde f(\xi)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-i\xi t} f(t)\,dt$ est la transformée de Fourier d'une fonction de $C_0^\infty(\mathbf{R}, L_1)$; $C^{(s)}(\mathbf{R}, L_1)$ le complété de $C_0^\infty(\mathbf{R}, L_1)$ pour la norme

$$\|f\|_{C^{(s)}(\mathbf{R},L_1)}=\sup_t \max_{0\le k\le s}\left\|\frac{d^k}{dt^k} f(t)\right\|_{L_1};$$

$C_s'(L\to L_2)$, l'espace des applications bornées de $C_s(\mathbf{R}, L)$ dans L_2; $C_s'(\mathbf{R}, L_2)$, l'espace des applications bornées de $C_s(\mathbf{R})$ dans L_2.

On a l'injection canonique $j_1: C_s(\mathbf{R})\to C_s(\mathbf{R}, L)$:

$$f(t)\to f(t)\cdot I_1 \overset{\text{déf}}{=} j_1[f],$$

où $I_1: B_1\to B_2$ est l'opérateur d'injection.

De là on déduit l'injection $J: C_s'(L\to L_2)\to C_s'(\mathbf{R}, L_2)$ définie par la formule

$$\langle J(f), \varphi\rangle = f(j_1[\varphi]), \quad f\in C_s'(L\to L_2), \quad \varphi\in C_s(\mathbf{R}).$$

Posons

$$(Ff)(\lambda)=\langle J(f), e^{-i\lambda t}\rangle, \quad f\in C_s'(L\to L_2).$$

Alors Ff est une distribution à valeurs dans L_2, c'est-à-dire que $\langle Ff, \varphi\rangle \in L_2$ pour $\varphi \in S(\mathbf{R})$. La transformation inverse de Fourier F^{-1} envoie de toute évidence Ff dans f:

$$\langle Jf^{-1}(Ff), \varphi\rangle = \langle Ff, F^{-1}\rangle = \langle J(f), \varphi\rangle.$$

Si $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}, L_1)$, on peut admettre que $f \in C_s'(L \to L_2)$ en posant

$$\overset{2}{f}\begin{pmatrix}1\\ \psi\end{pmatrix} = \int f(t)\,\psi(t)\,dt \quad \text{pour} \quad \psi \in C_s(\mathbf{R}, L).$$

Définissons par ailleurs l'analogue de la fonction δ:

$$\delta_{t_0}(\psi) = \psi(t_0), \quad \psi \in C_s(\mathbf{R}, L).$$

Il est évident que $\delta_{t_0} \in C_s'(L \to L_2)$. Bien plus, comme dans le cas scalaire, on démontre que

$$\left\| f + \sum_{k=1}^{N} c_k \delta_{t_k} \right\|_{C_s'(L \to L^2)} = \int \|f(t)\|_{L_1} (1+|t|)^s\,dt + \sum_{k=1}^{N} |c_k|\,(1+|t_k|)^s, \quad (12.1)$$

où $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}, L_1)$, c_k sont des nombres complexes, $k = 1, \ldots, N$.

Considérons maintenant l'enveloppe linéaire de la réunion $C_0^\infty(\mathbf{R}, L_1) \cup \{\bigcup_{t \in \mathbf{R}} \delta_t\}$ dans $C_s'(L \to L_2)$ et son image $\mathscr{B}_s^0(\mathbf{R}, L_1)$ par la transformation de Fourier. Comme dans le cas scalaire, définissons l'espace $\mathscr{B}_s(\mathbf{R}, L_1)$ comme le complété de $\mathscr{B}_s^0(\mathbf{R}, L_1)$ pour la norme

$$\|f\|_{\mathscr{B}_s(\mathbf{R}, L_1)} = \|F^{-1}f\|_{C_s'(L \to L_2)}.$$

Alors, exactement comme au chapitre II, on obtient les inclusions

$$W_2^{s+\frac{1}{2}+\varepsilon}(\mathbf{R}, L_1) \subset \mathscr{B}_s(\mathbf{R}, L_1) \subset C^{(s)}(\mathbf{R}, L_1).$$

On peut maintenant définir les fonctions à valeurs opératorielles d'un générateur A de degré s sur le couple (B_1, B_2), $B_1 \subset B_2$.

Soit $f \in \mathscr{B}_s(\mathbf{R}, L_1)$, c'est-à-dire que $F^{-1}f \in C_s'(L \to L_2)$. Comme $\|e^{-iAt}\|_L \leqslant C(1+t|)^s$, alors $e^{-iAt} \in C_s(\mathbf{R}, L)$ et on peut poser

$$\overset{2}{f}\begin{pmatrix}1\\ A\end{pmatrix} \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (F^{-1}f)(e^{-iAt}),$$

ou, symboliquement

$$\overset{2}{f}\begin{pmatrix}1\\ A\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int (F^{-1}f)(t) \cdot e^{-iAt}\,dt. \quad (12.2)$$

On dira que l'opérateur A agit le premier et le symbole f, le second.

L'opérateur $\overset{2}{f}\left(\overset{1}{A}\right)$ appartient à $L_2=\mathrm{Hom}(B_1, B_2)$. Evaluons sa norme. Si $f\in\mathscr{B}_s^0(\mathbf{R}, L)$, $F^{-1}f=\varphi+\sum_{k=1}^{N} c_k\delta_{t_k}$, où $\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}, L_1)$, alors

$$\overset{2}{f}\left(\overset{1}{A}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\varphi(t)\,e^{-iAt}\,dt+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=1}^{N}c_k e^{-iAt_k}.$$

Donc, en vertu de (12.1),

$$\left\|\overset{2}{f}\left(\overset{1}{A}\right)\right\|_{L_2}\leqslant\frac{c}{\sqrt{2\pi}}\left[\int\|\varphi(t)\|_{L_1}(1+|t|)^s\,dt+\sum_{k=1}^{N}|c_k|(1+|t_k|)^s\right]=$$

$$=\frac{c}{\sqrt{2\pi}}\|F^{-1}f\|_{C_s^s(L\to L_2)}=\frac{c}{\sqrt{2\pi}}\|f\|_{\mathscr{B}_s(\mathbf{R}, L_1)}.$$

Cette majoration se généralise par fermeture à tous les symboles $f\in\mathscr{B}_s(\mathbf{R}, L_1)$. Nous avons ainsi construit une application continue de $\mathscr{B}_s(\mathbf{R}, L_1)$ dans $L_2=\mathrm{Hom}(B_1, B_3): f\to\overset{2}{f}\left(\overset{1}{A}\right)$.

On construit de façon analogue l'application $f\to\overset{1}{f}\left(\overset{2}{A}\right)$ définie symboliquement par l'intégrale:

$$\overset{1}{f}\left(\overset{2}{A}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-iAt}(F^{-1}f)(t)\,dt$$

(comparer avec (12.2)). On dira que le symbole f agit le premier, l'opérateur A, le second.

Nous avons construit l'opérateur $\overset{2}{f}\left(\overset{1}{A}\right)\in\mathrm{Hom}(B_1, B_3)$ pour une application $f(\lambda)\in\mathrm{Hom}(B_2, B_3)\equiv L_1$ appartenant à l'espace $\mathscr{B}_s(\mathbf{R}, L_1)$ et pour un générateur A de degré s sur le couple (B_1, B_2), $B_1\subset B_2$.

Supposons maintenant que $f(\lambda)=g(\lambda), B)$, où B est un générateur de degré l sur le couple (B_2, B_3), $B_2\subset B_3$. Plus exactement, supposons que la fonction $g(\lambda, \mu)$ appartient à l'espace $\mathscr{B}_l(\mathbf{R})$ pour chaque λ fixe. Alors est défini l'opérateur $f(\lambda)\equiv g(\lambda, B)\in L_1$. On se propose d'étudier l'opérateur $\overset{2}{f}\left(\overset{1}{A}\right)\in\mathrm{Hom}(B_1, B_3)=L_2$. Pour que celui-ci existe il faut que $f\in\mathscr{B}_s(\mathbf{R}, L_1)$.

Lemme. *Si* $g\in\mathscr{B}_{s,l}(\mathbf{R}^2)$, *alors* $f\in\mathscr{B}_s(\mathbf{R}, L_1)$.

Démonstration. Soit $F^{-1}g=\delta_{\mu_0, t_0}$, c'est-à-dire que $g(\lambda, z)=\frac{1}{2\pi}e^{-i\mu_0\lambda}e^{-it_0 z}$. Alors pour $\varphi\in S(\mathbf{R})$

$$\langle JF^{-1}f, \varphi\rangle=\langle g, (\lambda, B), (F^{-1}\varphi)(\lambda)\rangle=$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-it_0 B}\langle e^{-i\mu_0\lambda}, (F^{-1}\varphi)(\lambda)\rangle=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-it_0 B}\varphi(\mu_0),$$

i.e.

$$(F^{-1}f)(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-iBt_0}\varphi(\mu_0),\qquad \varphi\in C_s(\mathbf{R},L),\qquad L=\mathrm{Hom}(B_1,B_2). \quad (12.3)$$

Alors

$$\|F^{-1}f(\varphi)\|_{L_2}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|e^{-iBt_0}\|_{L_1}\cdot\|\varphi(\mu_0)\|_L\leqslant$$

$$\leqslant\frac{c}{\sqrt{2\pi}}(1+|t_0|)^l(1+|\mu_0|)^s\frac{\|\varphi(\mu_0)\|_L}{(1+|\mu_0|)^s}\leqslant\frac{c}{\sqrt{2\pi}}\|g\|_{\mathscr{B}_{s,l}(\mathbf{R}^2)}\|\varphi\|_{C_s(\mathbf{R},L)},$$

c'est-à-dire que $f\in\mathscr{B}_s(\mathbf{R},L_1)$ et

$$\|f\|_{\mathscr{B}_s(\mathbf{R},L_1)}=\|F^{-1}f\|_{C_s'(L\to L_2)}\leqslant\frac{c}{\sqrt{2\pi}}\|g\|_{\mathscr{B}_{s,l}(\mathbf{R}^2)}.$$

Supposons maintenant que $F^{-1}g\in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$. Alors

$$\langle JF^{-1}f,\varphi\rangle=\langle g(\lambda,B),(F^{-1}\varphi)(\lambda)\rangle=$$

$$<\left\langle\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int(F^{-1}_{z\to t}(g(\lambda,z))e^{-iBt}dt,\ F^{-1}\varphi(\lambda)\right\rangle=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\langle F^{-1}_{z\to t}g(\lambda,z),(F^{-1}\varphi)(\lambda)\rangle e^{-iBt}dt=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\langle(F^{-1}g)(\mu,t),\varphi(\mu)\rangle e^{-iBt}dt=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\iint(F^{-1}g)(\mu,t)\,e^{-iBt}\varphi(\mu)dt\,d\mu.$$

Donc

$$(F^{-1}f)(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\iint(F^{-1}g)(\mu,t)\,e^{-iBt}\varphi(\mu)dt\,d\mu,\qquad \varphi\in C_s(\mathbf{R},L). \quad (12.5)$$

D'où la majoration

$$\|F^{-1}f(\varphi)\|_{L_2}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{c}{\sqrt{2\pi}}\iint|F^{-1}g(\mu,t)|(1+|t|)^l(1+|\mu|)^s\,dt\,d\mu\|\varphi\|_{C_s(\mathbf{R},L)}=$$

$$=\frac{c}{\sqrt{2\pi}}\|g\|_{\mathscr{B}_{s,l}(\mathbf{R}^2)}\|\varphi\|_{C_s(\mathbf{R},L)},$$

c'est-à-dire que (12.4) a lieu dans le cas aussi où $F^{-1}g \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$. Cette majoration entraîne la proposition du lemme.

Soit $g \in \mathscr{B}_{s,l}(\mathbf{R}^2)$. On a alors par définition

$$\overset{2}{f}\left(\overset{1}{A}\right) = (F^{-1}f)(e^{-iAt}), \quad \text{où} \quad f(\lambda) = g(\lambda, B).$$

Si $F^{-1}g = \delta_{\mu_0, t_0}$ où $F^{-1}g \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$, alors les formules (12.3) et (12.5) expriment que

$$\overset{2}{f}\left(\overset{1}{A}\right) = g\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}\right) \quad \text{et} \quad \left\| \overset{2}{f}\left(\overset{1}{A}\right) \right\|_{L_2} \leqslant c \|g\|_{\mathscr{B}_{s,l}(\mathbf{R}^2)}.$$

Ces relations s'étendent par fermeture à tous les symboles $g \in \mathscr{B}_{s,l}(\mathbf{R}^2)$.

A noter qu'on a en fait prouvé que l'opérateur $\overset{2}{f}\left(\overset{1}{A}\right)$ est borné sous réserve que $g(\lambda, z) \in \mathscr{B}_s(\mathbf{R}_\lambda, \mathscr{B}_l(\mathbf{R}_z))$, espace des fonctions de λ à valeurs dans $\mathscr{B}_l(\mathbf{R}_z)$, et par la même occasion utilisé le fait que $\mathscr{B}_s(\mathbf{R}, \mathscr{B}_l(\mathbf{R})) = \mathscr{B}_{s,l}(\mathbf{R}^2)$.

Soient maintenant A et B des opérateurs hermitiens dans un espace hilbertien H. Si $f \in C(\mathbf{R})$, alors $f(A)$ et $f(B)$ sont bornées dans H. Nous pouvons certes définir un opérateur borné $g\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}\right)$ pour $g \in \mathscr{B}_0(\mathbf{R}^2)$. Mais les constructions opérées plus haut permettent de définir cet opérateur pour une plus vaste classe de symboles, plus précisément, pour $g(\lambda, z) \in \mathscr{B}_0(\mathbf{R}_\lambda, C(\mathbf{R}_z))$ et $\mathscr{B}_0(\mathbf{R}_z, C(\mathbf{R}_\lambda))$, et par suite pour g appartenant à l'enveloppe linéaire de ces deux espaces.

Exercice 1. Soient $g \subset \mathscr{B}_{s,l}(\mathbf{R}^2)$; A un générateur de degré s sur le couple (B_1, B_2), $B_1 \subset B_2$; B un générateur de degré l sur le couple (B_2, B_3), $B_2 \subset B_3$; u le vecteur propre de A associé à une valeur propre λ. Alors $g\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}\right) u = g(\lambda, B)u$.

Exercice 2. 1) Soient $f \in \mathscr{B}_k(\mathbf{R}^n)$, ou k est assez grand; $S \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ une fonction réelle; A un générateur dans l'échelle $\{W_2^\tau(\mathbf{R}^n)\}$. Alors, dans un espace $\mathrm{Hom}(W_2^{-\tau}, W_2^{-\tau-m})$, on a l'égalité

$$f\left(-i\overset{3}{\frac{\partial}{\partial x}}\right) e^{i\overset{1}{A}S\left(\overset{2}{x}\right)} = e^{i\overset{1}{A}S\left(\overset{3}{x}\right)} f\left(-i\overset{2}{\frac{\partial}{\partial x}} + \overset{1}{A}\frac{\partial S}{\partial x}\left(\overset{2}{x}\right)\right).$$

2) Soit $0 \notin \sigma(A)$. Alors

$$f\left(-\overset{1}{A^{-1}}\overset{3}{\frac{\partial}{\partial x}}\right) e^{i\overset{1}{A}S\left(\overset{2}{x}\right)} = e^{i\overset{1}{A}S\left(\overset{3}{x}\right)} f\left(-\overset{1}{A^{-1}}\overset{2}{\frac{\partial}{\partial x}} + \frac{\partial S}{\partial x}\left(\overset{2}{x}\right)\right)$$

(s'agissant des numéros identiques surmontant les opérateurs non commutables, voir la convention relative aux notations au § 4 de l'Introduction).

Indication. Remplacer l'opérateur A par un paramètre λ.

§ 13. Fonctions de générateurs d'une algèbre de Lie nilpotente et leurs représentations

Ce paragraphe sera essentiellement consacré à l'étude des fonctions d'opérateurs différentiels qui sont la représentation ordonnée $L_1, \ldots, L_n, \alpha$ de générateurs d'une algèbre de Lie nilpotente (Introduction, § 9). Nous montrerons que ces opérateurs sont générateurs et transporteurs dans une échelle convenable et prouverons les relations (9.5) de l'Introduction pour le cas où le polynôme est remplacé par une fonction arbitraire de $C^{\infty}_{\mathcal{L}}$. Nous établirons également la formule (9.10) qui est indispensable à la démonstration du théorème fondamental; en outre, nous prouverons les formules de réduction des fonctions d'opérateurs ordonnés $\overset{1}{L}_1, \overset{2}{L}_2, \ldots, \overset{n}{L}_n, \overset{n+1}{\alpha}$ à un opérateur pseudo-différentiel.

Indiquons préalablement quelques propriétés des représentations ordonnées.

Soit X l'ensemble des générateurs $A_1, \ldots, A_n$ d'une algèbre de Lie nilpotente (Introduction, § 9). Comme, par hypothèse, tout commutateur de longueur N est nul, un commutateur de longueur $N-1$ commute à tous les éléments de l'ensemble X. Par hypothèse, l'ensemble X contient les opérateurs $A_1, \ldots, A_n$ et tous leurs commutateurs. Soit X_1 le sous-ensemble de X des éléments commutables à tous les éléments de X. Soit X_2 l'ensemble des éléments dont le commutateur à un élément quelconque de X appartient à X_1. D'une façon plus générale, soit $X_i \subset X$ le sous-ensemble des éléments dont le commutateur à un élément quelconque appartient à la somme X_k pour $k<i$. Il est évident que le nombre des ensembles X_i est $\leqslant N$.

Penchons-nous maintenant sur la construction de la représentation ordonnée de l'ensemble X. Cette procédure a été décrite au § 9 de l'Introduction. Dans $\overset{n+1}{A}_i q\left(\overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{n}{A}_n\right)$, en transportant l'opérateur A^i du rang $n+1$ au rang i, on développe $q\left(\overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{n}{A}_n\right)$ en une série entière de $\left(\overset{n}{A}_n - \overset{n+2}{A}_n\right)$; on obtient des termes de la forme

$$\left(\overset{n}{A}_n - \overset{n+2}{A}_n\right)^k \frac{}{k!} \overset{n+1}{A}_i \frac{\partial^k}{\partial x_n^k} q\left(\overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{n-1}{A}_{n-1}, \overset{n+2}{A}_n\right)$$

Soit $A_n \in X_{i(n)}$; alors $\left(\overset{1}{A}_n - \overset{3}{A}_n\right)^k \overset{2}{A}_i$ (le commutateur de droite d'ordre k) appartient à une classe X_j telle que $j \leqslant i(n)-k$. Pour les mêmes raisons, on peut conclure que d'une façon générale le coefficient de la dérivée $\dfrac{\partial^k}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_k}}$ de l'opérateur L_i est une constante ou une fonction homogène linéaire qui dépend d'un x_r tel que $i(r) < \max\limits_{1 \leqslant s \leqslant k} i(j_s)$.

Signalons que cette remarque est valable aussi pour la construction de la représentation G_i définie au § 9 de l'Introduction.

Lemme 13.1. *Soit* $\hat{L}=L\left(\overset{2}{x},\ -i\overset{1}{\partial}/\partial x\right)$ *la représentation ordonnée d'un générateur d'une algèbre de Lie nilpotente. Alors, pour k et l entiers, on peut exhiber des entiers* $s(k,l)$, $m(k)$, $n(l)$ *tels que*

$$\left\|e^{-i\hat{L}t}\right\|_{C_l^{m(k)}\to C_{n(l)}^k}\leqslant \text{const}\,(1+|t|)^{s(k,l)},$$

où C_l^k *est l'espace des fonctions k fois continûment dérivables de norme finie*

$$\|\varphi\|_{C_l^k}=\sup_{x\in\mathbf{R}^n}\sum_{|\gamma|=0}^{k}(1+|x|)^l\frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial x^\gamma}\varphi(x).$$

Démonstration. Appelons H_l^k le complété de l'espace S pour la norme

$$\|\varphi\|_{H_l^k}=\left\|(1+|x|^2)^{l/2}\left(1+\left|\frac{\partial}{\partial x}\right|^2\right)^{k/2}\varphi\right\|_{L_2}$$

On a les inclusions

$$H_l^{k+\nu}\subset C_l^k\subset H_{l-\nu}^k,\qquad \forall\nu\geqslant n/2.$$

Il suffit donc de prouver la majoration

$$\left\|e^{-i\hat{L}t}\right\|_{H_l^{m(k)}\to H_{n(l)}^k}\leqslant \text{const}\,(1+|t|)^{s(k,l)}.$$

Soit $F_{x\to\xi}$ la transformation de Fourier. Posons $\tilde{L}=F_{x\to\xi}\hat{L}F_{\xi\to x}^{-1}$. L'image de l'espace H_l^k par la transformation de Fourier étant H_k^l, il suffit d'établir la majoration

$$\left\|e^{-i\tilde{L}t}\right\|_{H_{m(k)}^l\to H_k^{n(l)}}\leqslant \text{const}\,(1+|t|)^{s(k,l)}.$$

L'opérateur $\tilde{L}$ prend (dans une numérotation convenable des coordonnées) la forme suivante :

$$\tilde{L}=-i\sum_{j=1}^{r_1}a_i\partial/\partial\xi_j\sum_{j=r_1+1}^{r_2}P_j(\xi_1,\ldots,\xi_{r_1})\partial/\partial\xi_j-\ldots-$$

$$-i\sum_{j=r_p+1}^{r_p+1}P_j(\xi_1,\ldots,\xi_{r_p})\partial/\partial\xi_j-\ldots-\sum_{j=r_q+1}^{n}P_j(\xi_1,\ldots,\xi_{r_q})\partial/\partial\xi_j+P_0(\xi),$$

où P_j sont des polynômes à coefficients réels, a_j des nombres réels. Si $\psi(\xi)\in S$, la fonction $\psi(\xi,t)=e^{-iLt}\psi(\xi)$ est la solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\psi}{\partial t}+\displaystyle\sum_{j=1}^{r_1}a_j\partial\psi/\partial\xi_j+\sum_{j=r_1+1}^{n}P_j\partial\psi/\partial\xi_j+iP_0\psi=0,\\ \psi(\xi,0)=\varphi(\xi).\end{cases}$$

Ecrivons les équations caractéristiques de ce problème :

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi_j}{dt} = a_j, & j = 1, \ldots, r_1, \\ \dfrac{d\xi_j}{dt} = P_j, & j = r_1 + 1, \ldots, n, \\ \dfrac{d\psi}{dt} = -iP_0\psi, \\ \xi(0) = \xi^0, & \psi(0) = \varphi(\xi^0). \end{cases}$$

En résolvant successivement les n premières équations, on obtient

$$\xi_j = \xi_j(\xi^0, t) = \begin{cases} \xi_j^0 + a_j t, & j = 1, \ldots, r_1, \\ \xi_j^0 + Q_j(\xi_1^0, \ldots, \xi_{r_p}^0, t), & j = r_p + 1, \ldots, r_{p+1}, \end{cases}$$

où Q_j sont des polynômes. De là on déduit

$$\xi^0 = \xi^0(\xi, t) = \begin{cases} \xi_j - a_j t, & j = 1, \ldots, r_1, \\ \xi_j + R_j(\xi_1, \ldots, \xi_{r_p}, t), & j = r_p + 1, \ldots, r_{p+1}, \end{cases} \tag{13.1}$$

où R_j sont des polynômes. Supposons que $\overline{\psi}(\xi^0, t)$ est la fonction $\psi(\xi, t)$ exprimée au moyen des coordonnées ξ^0, t. De la dernière équation du système caractéristique, on tire l'expression suivante de $\overline{\psi}(\xi^0, t)$:

$$\overline{\psi}(\xi^0, t) = \varphi(\xi^0) \exp\left\{-i \int_0^t P_0(\xi(\xi^0, \tau))\, d\tau\right\}. \tag{13.2}$$

A noter que $\dfrac{D\xi}{D\xi_0} = 1$; donc

$$\|e^{-i\tilde{L}t}\varphi\|_{L_2}^2 = \int |\overline{\psi}(\xi^0, t)|^2\, d\xi^0 = \|\varphi\|_{L_2}^2.$$

En portant $\xi^0 = \xi^0(\xi, t)$ dans (13.2), en appliquant aux deux membres un opérateur de la forme $\xi_\beta \left(\dfrac{\partial}{\partial \xi}\right)^\gamma$ et en se servant de (13.1), on trouve la majoration de $\|e^{-i\tilde{L}t}\|_{H^l_{m(k)} \to H^n_k}$ annoncée pour $l \geqslant 0$; ceci étant, on peut même poser $n(l) = l$. De plus, on peut toujours choisir $k = k(m)$ en fonction du $m(k)$ donné. Utilisons maintenant le fait que les espaces H_m^l et H_{-m}^{-l} sont duaux pour le produit scalaire de L_2, en d'autres termes, la norme

$$\|\varphi\|_m^l = \sup_{\|\psi\|_{H_{-m}^{-l}} = 1} |(\varphi, \psi)_{L_2}|, \qquad \varphi, \psi \in S$$

est équivalente à la norme dans H_m^l. L'adjoint de l'opérateur $e^{-i\tilde{L}t}$ dans $\tilde{L}_2$ est l'opérateur $e^{i\tilde{L}t}$, puisque $\tilde{L}$ est symétrique dans L_2. Donc

$$\|e^{-i\tilde{L}t}\varphi\|_k^{-l} = \sup_{\|\psi\|_{H_{-k}^l} = 1} |(e^{-i\tilde{L}t}\varphi, \psi)_{L_2}| = \sup_{\|\psi\|_{H_{-k}^l} = 1} |(\varphi, e^{-i\tilde{L}t}\psi)_{L_2}|.$$

Si $l>0$, d'après ce qui a été démontré plus haut, il existe des entiers k' et s tels que, pour $\|\psi\|_{H^l_{-k}}=1$,

$$\|e^{-i\hat{L}t}\psi\|_{H^l_{k'}} \leqslant \text{const}\,(1+|t|)^s$$

Donc

$$\|e^{-i\hat{L}t}\varphi\|^{-l}_k = \sup_{\|\psi\|_{H^l_{-k}}=1} \|\varphi\|^{-l}_{k'} \|e^{i\hat{L}t}\psi\|_{H^l_{k'}} \leqslant \text{const.}\, \|\varphi\|^{-l}_{k'}(1+|t|)^s.$$

Ce qui prouve le lemme.

Passons maintenant à la démonstration des formules (9.5) et (9.10) et des formules analogues citées au § 9, n° 2 de l'Introduction.

Nous avons déjà signalé que cette démonstration se basait sur les axiomes μ_7) et μ_8). Elle comporte deux étapes.

1) Soit $g(x)\in C^\infty$; alors l'opérateur

$$e^{iA_kt}g\begin{pmatrix}1 & 2 & & n\\ A_1, & A_2, & \ldots, & A_n\end{pmatrix} = e^{iA_kt}\,g\begin{pmatrix}1 & & n\\ A_1, & \ldots, & A_n\end{pmatrix} \tag{13.3}$$

est égal à l'opérateur $\psi\begin{pmatrix}1 & 2 & & n\\ A_1, & A_2, & \ldots, & A_n,\end{pmatrix}$ t, dont le symbole s'exprime en fonction du symbole $g(x)$ de la manière suivante: $\psi(x, t)=e^{i\hat{L}_kt}g(x)$, où $\hat{L}_k$ est la représentation ordonnée de l'opérateur A_k. Le symbole $g(x)$ existe eu égard à ce qu'on a établi au sujet des propriétés de $\hat{L}_k$.

Démonstration. Considérons les dérivées des symboles $e^{ix_{n+2}t}g(x) \overset{\text{déf}}{=} h$ et $\psi(x, t)$ par rapport à t, c'est-à-dire les symboles $ix_{n+2}h$ et $\psi'_t(x, t)=i\hat{L}_k\psi(x, t)$. Il est évident que le premier d'entre eux est justiciable de la relation (μ_8^δ) de l'axiome μ_8). (On rappelle que l'opération μ associe à x_{n+2} l'opérateur A_k^{n+2} et à x_k l'opérateur A_k^{k}.) Comme $\hat{L}_k$ est la représentation ordonnée de A_k, on en déduit que $[i\hat{L}_k\psi(x, t)]_{x_1=A_1,\ldots,x_n=A_n} = iA_k\left[\left[\psi\begin{pmatrix}1 & 2 & & n\\ A_1, & A_2, & \ldots, & A_n\end{pmatrix}\right]\right]$. D'où il s'ensuit que la relation (μ_8^δ) est réalisée pour le symbole $\psi(x, t)$ aussi. Pour $t=0$, les opérateurs $\hat{\psi}$ et $e^{iA_kt}\hat{g}$ sont tous deux égaux à $\hat{g}$. Donc, leur différence satisfait les relations (μ_8^a) et (μ_8^b), donc ces opérateurs sont égaux, ce que nous voulions.

De la deuxième partie de l'axiome μ_7) on déduit sans peine la généralisation de l'égalité (9.5) aux symboles de la classe $C^\infty_{\mathcal{L}}$

2) Considérons les opérateurs

$$e^{i\sum_{k=1}^{n} A_{n+1+k}t_k}\,g\begin{pmatrix}1 & & n\\ A_1, & \ldots, & A_n\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \psi\begin{pmatrix}1 & & n\\ A_1, & \ldots, & A_n,\end{pmatrix} t_1, \ldots, t_n\Big), \tag{13.4}$$

où $\psi(x, t)=e^{i\sum_{k=1}^{n} L_kt_k}g(x)$. Du numéro précédent il s'ensuit qu'ils sont égaux.

Appliquons aux symboles de ces opérateurs l'opérateur pseudo-différentiel

$$f\left(i\frac{\partial}{\partial t_1}, i\frac{\partial}{\partial t_2}, \ldots, i\frac{\partial}{\partial t_n}\right) \overset{\text{déf}}{=} f\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right),$$

où $f \in \mathscr{S}^\infty$ Les propriétés de l'opérateur $\hat{L}_k$ nous donnent

$$f\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi(x, t) = e^{i\sum_{k=1}^{n} t_k \overset{k}{L}} f\left(\overset{1}{L}, \ldots, \overset{n}{L}\right) g(x).$$

Pour le symbole (13.4), on a de toute évidence

$$f\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right) e^{i\sum_{k=1}^{n} x_{n+1+k} t_k} g(x_1, \ldots, x_n) = e^{i\sum_{k=1}^{n} x_{n+1+k} t_k} f(x_{n+1}, \ldots, x_{n+1+k})\, g(x_1, \ldots, x_n).$$

En vertu de l'axiome μ_7), les opérateurs associés à ces symboles sont égaux pour tous les t, y compris pour $t=0$. Plus exactement, pour $t=0$, on obtient l'égalité

$$[\![f\left(\overset{1}{A}, \ldots, \overset{n}{A}\right)]\!]\, [\![g\left(\overset{1}{A}, \ldots, \overset{n}{A}\right)]\!] = \psi\left(\overset{1}{A}, \ldots, \overset{n}{A}\right),$$

où $\psi(x)$ s'exprime en fonction de $g(x)$ de la manière suivante:

$$\psi(x) = f\left(\overset{1}{L}, \ldots, \overset{n}{L}\right) g(x).$$

C.Q.F.D.

Les autres égalités du § 9 se prouvent de façon analogue (en mettant à profit les relations déjà établies). La généralisation au cas où l'argument $\overset{n+1}{B}$ entre en jeu est évidente.

Indiquons de nouveau la formule (9.10) pour une fonction composée d'opérateurs ordonnés. Soit $f_i\left(\overset{1}{A}, \ldots, \overset{n}{A}\right) \in M$, $i=1, \ldots, k$; alors $f\left(\overset{1}{f}, \ldots, \overset{k}{f}\right)$ peut être représentée par une fonction de la forme $\psi\left(\overset{1}{A}, \ldots, \overset{n}{A}\right)$, où le symbole $\psi(x)$ se définit par la formule

$$f\left([\![f_1\left(\overset{1}{L}, \ldots, \overset{n}{L}\right)]\!], \ldots, [\![f_k\left(\overset{1}{L}, \ldots, \overset{n}{L}\right)]\!]\right) 1 = \psi(x), \qquad (13.5)$$

où 1 est l'unité de l'espace des symboles $\mathscr{S}^\infty$. Nous nous servirons de cette formule pour exprimer une fonction des représentations $\overset{1}{L}, \ldots, \overset{n}{L}$ comme une fonction composée de générateurs d'une autre algèbre nilpotente, plus exactement, $-i\partial/\partial x_1$ et x, autrement dit, pour représenter une fonction de $\overset{1}{L}, \ldots, \overset{n}{L}$ par un opérateur pseudo-différentiel. Cherchons donc la représentation ordonnée des opérateurs $-i\partial/\partial x$ et x. Il est évident que

$$\left(-i\frac{\partial}{\partial x_j}\right) f\left(-i\frac{\partial}{\partial x}, \overset{2}{x}\right) = \psi_j\left(-i\frac{\partial}{\partial x}, \overset{2}{x}\right),$$

où $\psi_j(y, x) = \left(-i\dfrac{\partial}{\partial x_j} + y_j\right) f(y, x).$

Donc les opérateurs $\left(-i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}+y,\ \overset{2}{x}\right)$ sont la représentation ordonnée de l'ensemble $\left(-i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}},\ \overset{2}{x}\right)$. De la formule (13.5) il s'ensuit alors que

$$f\left(\overset{1}{L}_1, \ldots, \overset{n}{L}_n\right) = \varphi\left(\overset{2}{x},\ -i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}\right),$$

où

$$\varphi(x, y) = f\left(\overset{1}{\left[\left[L_1\left(\overset{2}{x},\ -i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}+y\right)\right]\right]}, \ldots, \overset{n}{\left[\left[L_n\left(\overset{2}{x},\ -i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}+y\right)\right]\right]}\right) 1$$

est le symbole de l'opérateur pseudo-différentiel.

CHAPITRE V

T-PRODUIT D'OPÉRATEURS HYPOELLIPTIQUES ET DÉCOMPOSITION SPECTRALE D'UN *T*-PRODUIT

Le *T*-produit trouve application sous des formes différentes en théorie des équations différentielles et des semi-groupes. Les opérateurs hypoelliptiques sont dans un certain sens un modèle idéal pour l'étude des propriétés du *T*-produit.

En étudiant le problème de Cauchy

$$\frac{\partial u}{\partial t} - A\left(\overset{2}{x}, t, \overset{1}{D}\right) u = 0, \tag{0.1}$$

$$u|_{t=\tau} = u_0(x)$$

dans un espace euclidien $\mathbf{R}^N$ à N dimensions, on peut mettre sa solution sous forme d'une limite, dans un sens convenable, d'un produit d'opérateurs

$$e^{[\![A(x^*, t_N^*, \overset{1}{D})]\!]\,\Delta t_N} e^{[\![A(\overset{2}{x}, t_{N-1}^*, \overset{1}{D})]\!]\,\Delta t_{N-1}} \ldots e^{[\![A(\overset{2}{x}, t_1^*, \overset{1}{D})]\!]\,\Delta t_0},$$

où les points $t_k^* \in [t_k, t_{k+1}[$, $t_0 = \tau < t_1 < \ldots < t_N = t$, $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ lorsque $\Delta = \max_{1 \leqslant k \leqslant N} \Delta t_k \to 0$. Cette limite, si elle existe, sera appelée *T-produit*.

Nous montrerons que sous les conditions posées plus bas la solution du problème de Cauchy (0.1) peut être représentée par un opérateur linéaire $U(t, \tau)$, c'est-à-dire que

$$u(x, t) = U(t, \tau)\, u_0(x);$$

ceci étant, on prouvera que l'opérateur $U(t, \tau)$ est intégral et qu'il existe une fonction $p(x, t; \xi, \tau)$ telle que

$$u(x, t) = \int e^{i(x, \xi)}\, p(x, t; \xi, \tau)\, \tilde{u}_0(\xi)\, d\xi, \tag{0.2}$$

où $\tilde{u}_0(\xi)$ est la transformée de Fourier de $u_0(x)$. La fonction $p(x, t; \xi, \tau)$ sera appelée *symbole de l'opérateur* $U(t, \tau)$. Nous prouverons le théorème d'existence du produit des opérateurs hypoelliptiques en construisant la représentation asymptotique du symbole de l'opérateur $U(t, \tau)$ lorsque $t \to \tau$.

§ 1. Théorème d'existence et d'unicité du symbole d'un opérateur

1. En résolvant le problème de Cauchy (0.1), on admettra que $u_0(x)\in\mathscr{S}(\mathbf{R}^N)$, $\mathscr{S}=\mathscr{S}(\mathbf{R}^N)$ est l'espace des fonctions indéfiniment dérivables décroissant avec toutes leurs dérivées a l'infini plus vite que $\frac{1}{x^{\|k\|}}$, où $k\geqslant 0$ est quelconque, $x=(x_1,\ldots,x_N)$, $|x|=(x_1^2+\ldots+x_N^2)^{1/2}$; $A(t)=a\left(\overset{2}{x},t,\overset{1}{D}\right)$ est un opérateur hypoelliptique pseudo-différentiel dont le symbole sera désigné par $a(x,t,\xi)$. Comme toujours, $D_j=-i\frac{\partial}{\partial x_j}$, $\partial_j=\frac{\partial}{\partial\xi_j}$, α est un indice multiple, $|\alpha|=\sum_{j=1}^{N}\alpha_j$, $\alpha!=\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_N!$, $D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\ldots D_N^{\alpha_N}$, $x^\alpha=x_1^{\alpha_1}\ldots x_2^{\alpha_2}\ldots x_N^{\alpha_N}$. On admettra que $a(x,t,\xi)\in C^\infty(\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^N)$ et que pour $|\xi|\geqslant c_0$, $x\in\mathbf{R}^N$, $t\in[0,T]$ et quels que soient α et β, on a l'inégalité (ici et dans la suite c_k, $c_{\alpha\beta\ldots\gamma}$ sont des constantes strictement positives)

$$|a_{(B)}^{(\alpha)}(x,t,\xi)|\leqslant c_{\alpha B}|a(x,t,\xi)|(1+|\xi|)^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}, \tag{1.1}$$

$a_{(\beta)}^{(\alpha)}(x,t,\xi)=\partial^\alpha D^\beta a(x,t,\xi)$, $0\leqslant\delta<\rho\leqslant 1$, δ, ρ sont fixes. Dans la suite, nous imposerons au symbole $a(x,t,\xi)$ d'autres conditions en plus de (1.1).

Nous envisagerons les solutions $u(x,t)\in C^\infty(\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}_+)$ du problème de Cauchy (0.1) telles que $u(\cdot,t)$ appartiennent à $\mathscr{S}(\mathbf{R}^N)$ avec toutes leurs dérivées par rapport à t pour t fixe. Ces solutions forment une classe $\mathfrak{A}$ sur laquelle est valable le théorème d'unicité pour le problème (0.1).

Appliqué aux fonctions $u(x,t)\in\mathfrak{A}$, l'opérateur pseudo-différentiel du problème de Cauchy (0.1) se définit comme suit:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-a\left(\overset{2}{x},t,\overset{1}{D}\right)\right)u(x,t)=\int e^{i(x,\xi)}\left[\frac{\partial\tilde{u}(\xi,t)}{\partial t}-a(x,t,\xi)\tilde{u}(\xi,t)\right]d\xi,$$

où $\tilde{u}(\xi,t)$ est la transformée de Fourier de la fonction $u(x,t)$ par rapport à la variable x:

$$\tilde{u}(\xi,t)=\int e^{-i(x,\xi)}u(x,t)\,dx,\qquad (x,\xi)=\sum_{j=1}^{N}x_j\xi_j;$$

on omettra le facteur $(2\pi)^{-N/2}$ dans toutes les formules relatives aux transformations directe et réciproque de Fourier.

Lemme 1.1. *Soient*

$$u(x,t)=\int e^{i(x,\xi)}r(x,t;\xi,\tau)\tilde{u}_0(\xi)\,d\xi,\qquad u_0\in\mathscr{S}, \tag{1.2}$$

$r(x,t;\xi,\tau)\in C^\infty$ par rapport à toutes les variables et, quels que soient α et β,

$$|r_{(\beta)}^{(\alpha)}(x,t;\xi,\tau)|\leqslant c_{\alpha\beta}(x)(1+|\xi|)^{\sigma(\alpha,\beta)}, \tag{1.3}$$

où $c_{\alpha\beta}(x) \leqslant c_{\alpha\beta}(1+|x|)^k$, $k \geqslant 0$ *est indépendant de* α *et de* β, $\sigma(\alpha, \beta) \geqslant 0$. *Soit* $\{\varphi_n(x)\}$, $n = 1, 2, \ldots$, *une suite de fonctions de* $C_0^\infty(\mathbf{R}_N)$ *telles que*

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |x| \leqslant n, \\ 0 & \text{pour } |x| \geqslant n+1, \end{cases}$$

et dont les dérivées sont uniformément bornées par rapport à n; *soit enfin*

$$(Qu)(x, t) = \int e^{i(x,\xi)} q(x, t, \xi)\, \tilde{u}(\xi, t)\, d\xi$$

et $q(x, t, \xi) \in C^\infty$ *par rapport à toutes les variables, et pour tout* (x, t) *fixe*

$$|q(x, t, \xi)| \leqslant c(1+|\xi|)^m \tag{1.4}$$

m est un nombre quelconque fixe. Alors

(i) $$(Qu)(x, t) = \lim_{n\to\infty} \int e^{i(x,\xi)} q(x, t, \xi)\, \widetilde{\varphi_n u}(\xi, t)\, d\xi; \tag{1.5}$$

(ii) $$(Qu)(x, t) = \lim_{n\to\infty} \int e^{i(x,\eta)} \tilde{u}_0(\eta)\, d\eta \int e^{i(x,z)} q(x, t; \eta+z)\, \widetilde{\varphi_n r}(\cdot, t, \eta, \tau)(z)\, dz.$$

Démonstration. Comme $u_0(x) \in \mathscr{S}$, il en est de même de $\tilde{u}_0(\xi)$, c'est-à-dire que $\tilde{u}_0(\xi)$ et ses dérivées décroissent à l'infini plus vite que toute puissance de $|\xi|^{-1}$. Donc, de (1.2) et (1.3) on déduit pour tous α et β:

$$x^\alpha D^\beta u(x, t) = x^\alpha \int e^{i(x,\xi)} \tilde{u}_0(\xi) \sum_{\beta_1+\beta_2=\beta} c_{\beta_1\beta_2} \xi^{\beta_1} r_{(\beta_2)}(x, t; \xi, \tau)\, d\xi =$$

$$= \int e^{i(x,\xi)} i^\alpha \sum_{\substack{\beta_1+\beta_2=\beta \\ \alpha_1+\alpha_2=\alpha}} c_{\beta_1\beta_2\alpha_1\alpha_2} [\xi^{\beta_1} \tilde{u}_0(\xi)]^{(\alpha_1)} r_{(\beta_2)}^{(\alpha_2)}(x, t; \xi, \tau)\, d\xi.$$

D'où, compte tenu de (1.3),

$$(1+|x|)^{|\alpha|} |D^\beta u(x, t)| \leqslant c_{\alpha\beta}(1+|x|)^k. \tag{1.6}$$

Ici et plus bas les constantes dépendant de α et de β seront désignées par la même lettre. Vu que dans (1.6) k est fixe et α quelconque, on obtient

$$|D^\beta u(x, t)| \leqslant c_{\alpha\beta}(1+|x|)^{-\alpha} \tag{1.7}$$

quels que soient α et β. De (1.6) il résulte notamment que $u(x, t)$ est absolument intégrable par rapport à x sur $\mathbf{R}^N$, donc

$$|(\widetilde{\varphi_n u} - \tilde{u})(\xi, t)| = \left| \int e^{-i(x,\xi)} [\varphi_n - 1]\, u(x, t)\, dx \right| \leqslant 2 \int_{|x|>n} |u(x, t)|\, dx \to 0 \tag{1.8}$$

lorsque $n \to \infty$ uniformément en $\xi \in \mathbf{R}^N$. Par ailleurs, pour tout β

$$|\xi^\beta \widetilde{\varphi_n u}(\xi)| = \left| \int e^{-i(x,\xi)} D^\beta [\varphi_n(x)\, u(x, t)]\, dx \right| \leqslant c_\beta \tag{1.9}$$

d'après (1.7) et la définition de la suite $\{\varphi_n(x)\}$. Le théorème de Lebesgue nous dit que la propriété (i) résulte de (1.8) et (1.9), puisque l'intégrant de

(1.5) admet un majorant intégrable: $c(1+|\xi|)^{-N-1}$ (il faut prendre $|\beta|=m+N+1$ dans (1.9)).

Prouvons (ii). On a

$$\int e^{i(x,\xi)}q(x,t,\xi)\widetilde{\varphi_n u}(\xi,t)d\xi=$$
$$=\int e^{i(x,\xi)}q(x,t,\xi)\,d\xi\int e^{-i(\xi,y)}\varphi_n(y)\,dy\int e^{i(y,\eta)}r(y,t;\eta,\tau)\tilde{u}_0(\eta)\,d\eta=$$
$$=\int e^{i(x,\xi)}q(x,t,\xi)\,d\xi\int\tilde{u}_0(\eta)\,d\eta\int e^{-i(y,\xi-\eta)}r(y,t;\eta,\tau)\varphi_n(y)\,dy=$$
$$=\int e^{i(x,\xi)}q(x,t,\xi)\,d\xi\int\tilde{u}_0(\eta)\widetilde{\varphi_n r}(\cdot,t;\eta,\tau)(\xi-\eta)\,d\eta=$$
$$=\int e^{i(x,\eta)}\tilde{u}_0(\eta)\,d\eta\int e^{i(x,z)}q(x,t,\eta+z)\widetilde{\varphi_n r}(\cdot,t;\eta,\tau)(z)\,dz.$$

Nous avons permuté par deux fois l'ordre d'intégration de façon légitime, puisque les intégrables doubles correspondantes convergent absolument. Ce qui prouve le lemme.

Lemme 1.2. *Soit $q(x,t,\xi)\in C^\infty(\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^N)$ et supposons que pour un m réel*

$$\sup_{\xi\in\mathbf{R}^N}\frac{|q(x,t,\xi)|}{(1+|\xi|)^m}=\bar{q}(x,t)<\infty \tag{1.10}$$

pour tous les $(x,t)\in(\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}_+)$, et pour tout indice multiple α,

$$|q^{(\alpha)}(x,t,\xi)|\leqslant c_\alpha|q(x,t,\xi)|(1+|\xi|)^{-\rho|\alpha|} \tag{1.11}$$

pour tous les $(x,t)\in(\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}_+)$ et $|\xi|\geqslant c_0$ et enfin que $u(x)\in\mathscr{S}$. Alors l'intégrale

$$j=j(x,t,\eta)=\int e^{i(x,z)}q(x,t;\eta+z)\tilde{u}(z)\,dz$$

est justiciable de l'égalité

$$j(x,t,\eta)=\sum_{|\alpha|<N_1}\frac{1}{\alpha!}q^{(\alpha)}(x,t,\eta)\,D^\alpha u(x)+j_0, \tag{1.12}$$

où j_0 se majore comme suit:

$$|j_0(x,t,\eta)|\leqslant c_{N_1M}\bar{q}(x,t)(1+|\eta|)^{m+N-\rho N_1}\sup_{y\in\mathbf{R}^N,|\alpha|=N_1}\left|\frac{D^\alpha u(y)}{(1+|x-y|)^M}\right|; \tag{1.13}$$

$M\geqslant 0$ et $N_1>m+N$ sont arbitraires.

Démonstration. Supposons que $\psi(x)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$, $\psi(x)=1$ pour $|x|\leqslant\frac{1}{4}$, $\psi(x)=0$ pour $|x|>\frac{1}{2}$. On a

$$j(x,t,\eta)=\int e^{i(x,z)}q(x,t,\eta+z)\tilde{u}(z)\,dz=\sum_{|\alpha|<N_1}\frac{1}{\alpha!}q^{(\alpha)}(x,t,\eta)\,D^\alpha u(x)+$$

$$+\int e^{i(x,z)}\left[q(x,t,\eta+z)-\sum_{|\alpha|<N_1}\frac{1}{\alpha!}q^{(\alpha)}(x,t,\eta)z^{\alpha}\psi\left(\frac{z}{|\eta|}\right)\tilde{u}(z)\,dz+\right.$$

$$+\int e^{i(x,z)}\left[\psi\left(\frac{z}{|\eta|}\right)-1\right]\sum_{|\alpha|<N_1}\frac{1}{\alpha!}q^{(\alpha)}(x,t,\eta)z^{\alpha}\tilde{u}(z)\,dz+$$

$$+\int e^{i(x,z)}\left[1-\psi\left(\frac{z}{|\eta|}\right)\right]q(x,t,\eta+z)\,\tilde{u}(z)\,dz,$$

c'est-à-dire que

$$j(x,t,\eta)=\sum_{|\alpha|<N_1}\frac{1}{\alpha!}q^{(\alpha)}(x,t,\eta)\,D^{\alpha}u(x)+j_0,$$

où

$$j_0=j_1+j_2+j_3.$$

Vu que d'après la formule de Taylor

$$q(x,t,\eta+z)=\sum_{|\alpha|<N_1}\frac{1}{\alpha!}q^{(\alpha)}(x,t,\eta)z^{\alpha}+$$

$$+\sum_{|\alpha|=N_1}\frac{N_1}{\alpha!}z^{\alpha}\int_0^1 q^{(\alpha)}(x,t,\eta+\sigma z)(1-\sigma)^{N_1-1}\,d\sigma,$$

il vient

$$j_1(x,t,\eta)=\sum_{|\alpha|=N_1}\frac{N_1}{\alpha!}\int K_{\alpha}(x,t,\eta,x-y)\,D^{\alpha}u(y)\,dy, \tag{1.14}$$

où

$$K_{\alpha}(x,t,\eta,w)=\int_0^1\int e^{i(w,z)}(1-\sigma)^{N-1}\,q^{(\alpha)}(x,t,\eta+\sigma z)\,\psi\left(\frac{z}{|n|}\right)d\sigma\,dz.$$

De là par une intégration par parties on déduit, pour tout indice multiple β,

$$|w^{\beta}K_{\alpha}(x,t,\eta,w)|=$$

$$=\left|\int_0^1(1-\sigma)^{N-1}\,d\sigma\int e^{i(w,z)}(-D_z)^{\beta}\left[q^{(\alpha)}(x,t,\eta+\sigma z)\,\psi\left(\frac{z}{|\eta|}\right)\right]dz\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sup_{0\leqslant\sigma\leqslant1}\int_{|z|\leqslant\frac{|\eta|}{2}}\left|D_z^{\beta}\left[q^{(\alpha)}(x,t,\eta+\sigma z)\,\psi\left(\frac{z}{|\eta|}\right)\right]\right|dz.$$

Comme $|\eta+\sigma z|\geqslant\frac{|\eta|}{2}$ dans le domaine d'intégration, de là, de (1.10) et (1.11), on obtient

$$|w^{\beta}K_{\alpha}(x,\,t,\,\eta,\,w)|\leqslant c_{\beta}\bar{q}(x,\,t)(1+|\eta|)^{m-\rho(N_1+|\beta|)+N},\qquad |\alpha|=N_1. \quad (1.15)$$

Prenons $|\beta|=N+1+M$, où $M\geqslant 0$ est arbitraire. De (1.14) et (1.15) il résulte que

$$|j_1(x,\,t,\,\eta)|\leqslant c_{M,N_1}\sup_{\alpha=N_1}\int\left|\frac{D^{\alpha}u(y)}{(1+|x-y|)^{M}}\right|\frac{1}{(1+|x-y|)^{N+1}}\,|(1+$$
$$+|x-y|)^{M+N+1}K_{\alpha}(x,\,t,\,\eta,\,x-y)|\,dy\leqslant$$
$$\leqslant c_{M,N_1}\sup_{\substack{y\in\mathbf{R}^N\\|\alpha|=N_1}}\left|\frac{D^{\alpha}u(y)}{(1+|x-y|)^{M}}\right|\bar{q}(x,\,t)(1+|\eta|)^{m+N-\rho N_1}, \quad (1.16)$$

N_1, $M\geqslant 0$ sont arbitraires.

Par ailleurs,

$$j_2(x,\,t,\,\eta)=\int e^{i(x,z)}\left(\psi\left(\frac{z}{|\eta|}\right)-1\right)\sum_{|\alpha|<N_1}\frac{1}{\alpha!}q^{(\alpha)}(x,\,t,\,\eta)z^{\alpha}\tilde{u}(z)\,dz=$$
$$=\sum_{|\alpha|<N_1}\frac{1}{\alpha!}q^{(\alpha)}(x,\,t,\,\eta)\left[\int e^{i(x,z)}\psi\left(\frac{z}{|\eta|}\right)z^{\alpha}\tilde{u}(z)\,dz-D^{\alpha}u(x)\right],$$

$$\int e^{i(x,z)}\psi\left(\frac{z}{|\eta|}\right)z^{\alpha}\tilde{u}(z)\,dz=\int e^{i(x,z)}\psi\left(\frac{z}{|\eta|}\right)dz\int e^{-i(z,y)}D^{\alpha}u(y)\,dy=$$
$$=\int D^{\alpha}u(y)\,dy\int e^{i(z,x-y)}\psi\left(\frac{z}{|\eta|}\right)dz=\int D^{\alpha}u\left(x-\frac{y}{|\eta|}\right)\Psi(y)\,dy, \quad (1.17)$$

où

$$\Psi(y)=\int e^{i(y,x)}\psi(x)\,dx.$$

Donc, l'expression entre crochets de (1.17) est égale à

$$\int D^{\alpha}u\left(x-\frac{y}{|\eta|}\right)\Psi(y)\,dy-D^{\alpha}u(x). \quad (1.18)$$

La formule de Taylor nous donne

$$D^{\alpha}u\left(x-\frac{y}{|\eta|}\right)=$$
$$=\sum_{|\beta|<N_1-|\alpha|}\frac{1}{\beta!}D^{\alpha+\beta}u(x)\left(\frac{iy}{|\eta|}\right)^{\beta}+\sum_{|\beta|=N_1-|\alpha|}\frac{1}{\beta!}D^{\alpha+\beta}u(x_0)\left(\frac{iy}{|\eta|}\right)^{\beta}. \quad (1.19)$$

où x_0 est situé sur le segment reliant x à $x-\dfrac{y}{|\eta|}$;

$$|D^\gamma u(x_0)| = \frac{|D^\gamma u(x_0)|}{(1+|x-x_0|)^M}(1+|x-x_0|)^M \leqslant$$

$$\leqslant \left(1+\frac{|y|}{|\eta|}\right)^M \sup_{y\in\mathbf{R}^N} \frac{|D^\gamma u(y)|}{(1+|x-y|)^M}. \qquad (1.20)$$

En portant (1.20) avec $|\gamma|=N_1$ dans (1.19) et comme $\int\Psi(y)\,dy=\psi(0)=1$ et $\int y^\alpha\Psi(y)\,dy=D^\alpha\psi(0)=0$ pour $|\alpha|\geqslant 1$, on déduit de (1.18) et (1.19) que

$$\left|\int D^\alpha u\left(x-\frac{y}{|\eta|}\right)\Psi(y)\,dy - D^\alpha u(x)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{y\in\mathbf{R}^N,\,|\gamma|=N_1} \frac{|D^\gamma u(y)|}{(1+|x-y|)^M} \int\left(\frac{|y|}{|\eta|}\right)^{N_1-|\alpha|}\left(1+\frac{|y|}{|\eta|}\right)^M |\Psi(y)|\,dy \leqslant$$

$$\leqslant c_{M,N_1}|\eta|^{-N_1+|\alpha|} \sup_{y\in\mathbf{R}^M,\,|\gamma|=N_1} \frac{|D^\gamma u(y)|}{(1+|x-y|)^M}, \qquad (1.21)$$

puisque $\Psi(y)$ décroît à l'infini plus vite que toute puissance de $|y|$. Portons (1.21) dans (1.17):

$$|j_2(x,t,\eta)| \leqslant c_{M,N_1} \sum_{|\alpha|<N_1} \frac{1}{\alpha!}|q^{(\alpha)}(x,t,\eta)|\,|\eta|^{|\alpha|-N_1} \sup_{y\in\mathbf{R}^N,\,|\gamma|=N_1} \frac{|D^\gamma u(y)|}{(1+|x-y|)^M}$$

ou, eu égard à (1.15) et (1.11),

$$|j_2(x,t,\eta)| \leqslant$$

$$\leqslant c_{M,N_1} \sup_{y\in\mathbf{R}^N,\,|\alpha|=N_1} \frac{|D^\alpha u(y)|}{(1+|x-y|)^M}\,\bar{q}(x,t)\,(1+|\eta|)^{m-N_1\rho+(\rho-1)}, \qquad (1.22)$$

$M\geqslant 0$ est arbitraire.

Majorons

$$j_3(x,t,\eta) = \int e^{i(x,z)}\left[1-\psi\left(\frac{z}{|\eta|}\right)\right] q(x,t,\eta+z)\,\tilde{u}(z)\,dz.$$

Comme

$$|z|^{2N_1} = (z_1^2+\ldots+z_N^2)^{N_1} = \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_N=1}^{N_1} \frac{N_1!}{\alpha_1!\ldots\alpha_N!}\,z_1^{2\alpha_1}\ldots z_N^{2\alpha_N} = \sum_{|\alpha|=N_1} \frac{N_1!}{\alpha!}\,z^{2\alpha},$$

alors en multipliant et en divisant sous le signe d'intégration de (1.22) par

$|z|^{2N_1}\left(|z| \geqslant \frac{|\eta|}{4}\right)$, on obtient

$$j_3(x, t, \eta) = \sum_{|\alpha|=N_1} \frac{N_1!}{\alpha!} \int \mathfrak{M}_\alpha(x, t, \eta, x-y)\, D^\alpha u(y)\, dy, \tag{1.23}$$

où

$$\mathfrak{M}_\alpha(x, t, \eta, w) = \int\left[1-\psi\left(\frac{z}{|\eta|}\right)\right] e^{i(z,w)}\, q(x, t, \eta+z)\, \frac{z^\alpha}{|z|^{2N_1}}\, dz. \tag{1.24}$$

L'intégrale de (1.24) existe si $N_1 > m+N$. Pour tout β, on a

$$w^\beta \mathfrak{M}_\alpha(x, t, \eta, w) =$$

$$= \int_{|z| \geqslant \frac{|\eta|}{4}} e^{i(z,w)}\, D_z^\beta\left\{\left[1-\psi\left(\frac{z}{|\eta|}\right)\right] q(x, t, \eta+z)\, \frac{z^\alpha}{|z|^{2M_1}}\right\} dz. \tag{1.25}$$

En vertu de (1.10) et (1.11), pour tout $|z| \geqslant \frac{|\eta|}{4}$, on obtient

$$\left|D_z^\beta\left\{\left[1-\psi\left(\frac{z}{|\eta|}\right)\right] q(x, t, \eta+z)\, \frac{z^\alpha}{|z|^{2N_1}}\right\}\right| \leqslant$$

$$\leqslant c_\beta |q^{(\beta)}(x, t, \eta+z)|\, \frac{1}{|z|^{N_1}} \leqslant c_\beta \bar{q}(x, t)(1+|\eta+z|)^{m-\rho|\beta|}\, \frac{1}{|z|^{N_1}} \leqslant$$

$$\leqslant c_\beta \bar{q}(x, t)(1+|z|)^{m-N_1}. \tag{1.26}$$

Pour tout β et $N_1 > m+N$, on déduit de (1.25) et (1.26)

$$|w^\beta \mathfrak{M}_\alpha(x, t, \eta, w)| \leqslant c_\beta \bar{q}(x, t) \int_{|z| \geqslant \frac{|\eta|}{4}} (1+|z|)^{m-N_1} dz \leqslant$$

$$\leqslant c_\beta \bar{q}(x, t)(1+|\eta|)^{m+N-N_1}. \tag{1.27}$$

A noter que les majorations (1.26) et (1.27) peuvent être facilement renforcées. Au second membre de (1.26), on a en fait

$$c_\beta \bar{q}(x, t)(1+|z|)^{m-\rho|\beta|-N_1} \quad \text{si} \quad \rho(\beta) \leqslant m$$

et

$$c_\beta \bar{q}(x, t)\, \frac{1}{(1+|\eta+z|)^{\rho|\beta|-m}}\, \frac{1}{|z|^{N_1}} \quad \text{si} \quad \rho(\beta) \geqslant m.$$

En portant ceci dans (1.27), on trouve que

$$|w^\beta \mathfrak{M}_\alpha(x, t, \eta, w)| \leqslant c_\beta \bar{q}(x, t)\,(1+|\eta|)^{m+N-\rho|\beta|-N_1} \quad \text{si} \quad \rho|\beta| \leqslant m$$

et

$$|w^B \mathfrak{M}_\alpha(x, t, \eta, w)| \leqslant$$

$$\leqslant c_\beta \bar{q}(x, t) \int_{|z| \geqslant \frac{|\eta|}{4}} \times \frac{dz}{(1+|\eta+z|)^{\rho|\beta|-m}|z|^{N_1}} =$$

$$= c_\beta \bar{q}(x, t) \left\{ \int_{\frac{|\eta|}{4} \leqslant |z| \leqslant \frac{|\eta|}{2}} + \int_{|\eta| \geqslant \frac{|\eta|}{2} |z+\eta| \leqslant \frac{|\eta|}{2}} + \int_{|z| \geqslant \frac{|\eta|}{2}, |z+\eta| \geqslant \frac{|\eta|}{2}} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant c_\beta \bar{q}(x, t) \left\{ c(1+|\eta|)^{m+N-\rho|\beta|-N_1} + \right.$$

$$\left. + c(1+|\eta|)^{-N_1} \int_{|\xi| \leqslant \frac{|\eta|}{2}} \frac{d\xi}{(1+|\xi|)^{\rho|\beta|-m}} + c(1+|\eta|)^{m+N-\rho|\beta|-N_1} \right\} =$$

$$= \begin{cases} c_\beta \bar{q}(x, t)(1+|\eta|)^{m+N-\rho|\beta|-N_1} & \text{pour} \quad \rho|\beta| \leqslant m+N \\ c_\beta \bar{q}(x, t)(1+|\eta|)^{-N_1} & \text{pour} \quad \rho|\beta| \geqslant m+N, \end{cases} \tag{1.27'}$$

si $\rho|\beta| \geqslant m$. De (1.23) et (1.27), on déduit

$$|j_3(x, t, \eta)| \leqslant \sum_{|\alpha|=N_1} \frac{N_1!}{\alpha!} \int |(1+|x-y|)^{M+N+1} \mathfrak{M}_\alpha(x, t, \eta, x-y)| \times$$

$$\times \left| \frac{D^\alpha u(y)}{(1+|x-y|)^M} \right| \frac{dy}{(1+|x-y|)^{N+1}} \leqslant$$

$$\leqslant c_{M, N_1} \bar{q}(x, t)(1+|\eta|)^{m+N-N_1} \sup_{\substack{\cdot \in \mathbf{R}^N \\ |\alpha|=N_1}} \left| \frac{D^\alpha u(y)}{(1+|x-y|)^M} \right|$$

quels que soient $M \geqslant 0$ et $N_1 > N+m$.

En combinant (1.16), la majoration de j_2 et la formule précédente, on obtient en définitive

$$|j_0(x, t, \eta)| = |j_1(x, t, \eta) + j_2(x, t, \eta) + j_3(x, t, \eta)| \leqslant$$

$$\leqslant c_{M, N_1} \bar{q}(x, t)(1+|\eta|)^{m+N-\rho N_1} \sup_{\substack{y \in \mathbf{R}^N \\ |\alpha|=N_1}} \frac{|D^\alpha u(y)|}{(1+|x-y|)^M} \tag{1.28}$$

quels que soient $M \geqslant 0$ et $N_1 > m+N$. Ce qui prouve le lemme.

Lemme 1.3. *Si $q(x, t, \xi)$ satisfait les hypothèses du lemme précédent, $u_n(x)=\varphi_n(x)\,r(x)$, où la suite $\varphi_n(x)$ est définie dans le lemme* 1.1 *et $r(x)\in C^\infty(\mathbf{R}^N)$ et croît à l'infini moins vite que toute puissance de $|x|$, alors* $\lim_{n\to\infty}\int e^{i(x,z)}q(x, t, \eta+z)\tilde{u}_n(z)\,dz=$

$$-\sum_{|\alpha|<N_1}\frac{1}{\alpha!}q^{(\alpha)}(x, t, \eta)\,D^\alpha r(x)+j_0(x, t, \eta). \qquad (1.29)$$

où $j_0(x, t, \eta)$ est défini dans le lemme 1.2 *(dans lequel il faut remplacer $u(x)$ par $r(x)$). Dans* (1.29) *la limite est uniforme en $(t, \eta)\in[0, T]\times\mathbf{R}^N$ et $x\in K$, K étant un compact de $\mathbf{R}^N$.*

Démonstration. La proposition du lemme résulte immédiatement des formules (1.14), (1.18), (1.23) qui sont valables pour toute fonction $u(y)$ croissant (avec ses dérivées) à l'infini moins vite que toute puissance de $|y|$, ainsi que du théorème de Lebesgue sur le passage à la limite sous le signe d'intégration. A noter que le terme $j_0(x, t, \eta)$ de la formule (1.29) vérifie la majoration (1.28) dans laquelle il faut remplacer $u(y)$ par $r(y)$.

2. Dans ce numéro on se propose de construire la partie principale du symbole $p(x, t; \eta, \tau)$ de l'opérateur $U(t, \tau)$ associé au problème de Cauchy (0.1). Formulons les conditions que nous imposerons au symbole $a(x, t, \xi)$ de l'opérateur pseudo-différentiel $a\left(\overset{2}{x}, t, \overset{1}{D}\right)$. Supposons que $a(x, t, \xi)$ vérifie les conditions suivantes:

(i) $a(x, t, \xi)\in S^m_{\rho,\delta}$, c'est-à-dire que $a(x, t, \xi)\in C^\infty(\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^N)$ et pour tous les indices multiples α et β et tous les ξ, $x\in\mathbf{R}^N$, $t\in[0, T]$, on a l'inégalité

$$|a^{(\alpha)}_{(B)}(x, t, \xi)|\leqslant c_{\alpha\beta}|a(x, t, \xi)|(1+|\xi|)^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|},$$

m, ρ, δ étant des réels tels que $0\leqslant\delta<\rho\leqslant 1$;

(ii) la condition d'hypoellipticité: il existe un nombre c_0 tel que pour $|\xi|>c_0$ et tous les $(x, t)\in\mathbf{R}^N\times[0, T]$

$$|a^{(\alpha)}_{(\beta)}(x, t, \xi)|\leqslant c_{\alpha\beta}|a(x, t, \xi)|\,(1+|\xi|)^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}; \qquad (1.30)$$

(iii) $$\operatorname{Re}a(x, t, \xi)<0, \quad |\xi|>c_0;$$

(iiii) $$\frac{\int_\tau^t|a(x, s, \xi)ds}{\int_\tau^t|\operatorname{Re}a(x, s, \xi)ds}\equiv f(x, t; \xi, \tau)=O\left(1+|\xi|\right)^{\frac{\rho-\delta}{2}-\xi},$$

où $\xi>0$ est quelconque, $0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant T$, $|\xi|>c_0$. Posons

$$a(x, t, \xi)=b(x, t, \xi)+ic(x, t, \xi),$$

où les fonctions b et c sont réelles et $b(x, t, \xi)<0$, $|\xi|>c_0$. Posons

$$r_0(x, t; \eta, \tau) = e^{\int_t^\tau a(x, s, \eta)\, ds} \tag{1.31}$$

et pour simplifier désignons $\theta(x, \eta) = \int_\tau^t a(x, s, \eta)\, ds$ (nous omettons la dépendance par rapport à τ et t). Pour tous α et β, on a

$$r_{0(\beta)}^{(\alpha)}(x, t; \eta, \tau) = e^{\theta} \sum_i c_i [\theta^{(1)}]^{i_1} \dots [\theta^{|\alpha|+|\beta|}]^{i_{|\alpha|+|\beta|}}, \tag{1.32}$$

où

$$1 \cdot i_1 + 2 \cdot i_2 + \dots + (|\alpha| + |\beta|) i_{|\alpha|+|\beta|} = |\alpha| + |\beta|; \qquad i_k \geqslant 0. \tag{1.33}$$

Chaque terme de la somme (1.32) possède $|\alpha| + |\beta|$ dérivées, $|\alpha|$ étant le nombre des dérivées par rapport à η, $|\beta|$, par rapport à x. Majorons $r_{0(\beta)}^{(\alpha)}$. On a

$$|\partial^{\alpha_i} \theta(x, \eta)| = \left| \int_\tau^t a^{(\alpha_i)}(x, s, \eta)\, ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_\tau^t |a^{(\alpha_i)}(x, s, \eta)|\, ds \leqslant c_{\alpha_i} (1 + |\eta|)^{-\rho|\alpha_i|} \int_\tau^t |a(x, s, \eta)|\, ds.$$

On obtient une majoration analogue en dérivant par rapport à x. Donc

$$|r_{0(\beta)}^{(\alpha)}(x, t; \eta, \tau)| \leqslant c_{\alpha\beta} \left| e^{\int_\tau^t a(x, s, \eta)\, ds} \right| \times$$

$$\times (1 + |\eta|)^{-\rho|\alpha| + \delta|\beta|} \sum_i c_i \left(\int_\tau^t |a(x, s, \eta)|\, ds \right)^{i_1 + \dots + i_{|\alpha|+|\beta|}} \tag{1.34}$$

et de plus en vertu de (1.33)

$$1 \leqslant i_1 + \dots + i_{|\alpha|+|\beta|} \leqslant |\alpha| + |\beta|.$$

Comme

$$e^{-\varepsilon w(x)} w^\alpha(x) \leqslant e^{-\alpha} \left(\frac{\alpha}{\varepsilon} \right)^\alpha = c(\alpha, \varepsilon)$$

pour ε, $\alpha > 0$ et $w(x) \geqslant 0$, il vient

$$\left| e^{\int_\tau^t a(x, s, \eta)\, ds} \right| \left(\int_\tau^t |a(x, s, \eta)|\, ds \right)^k = e^{\int_\tau^t b(x, s, \tau)\, ds} \left(\int_\tau^t |b(x, s, \tau)|\, ds \right)^k \times$$

$$\times \left(\frac{\int_\tau^t |a(x, s, \eta)|\, ds}{\int_\tau^t |b(x, s, \eta)|\, ds} \right)^k \leqslant c(k\varepsilon)\, e^{1 - \varepsilon \int_\tau^t b(x, s, \tau)\, ds} f^k \tag{1.35}$$

d'après la définition de $U(t, \tau)$ et de (1.30). Les relations (1.34) et (1.35) entraînent

$$|r_{0|\beta|}^{|\alpha|}(x, t; \eta, \tau)| \leqslant c_{\alpha\beta\varepsilon} e^{(1-\varepsilon) \int_\tau^t b(x, s, t)\, ds} (1 + |\eta|)^{-\rho|\alpha| + \delta|\beta|} f^{|\alpha|+|\beta|}. \tag{1.36}$$

Posons

$$v_0(x, t)=\int e^{i(x, \eta)}(r_0 x, t; \eta, \tau)\, \tilde{u}_0(\eta)\, d\eta,$$

où $u_0(x)$ est une fonction quelconque de $\mathscr{S}$ et r_0 la fonction définie dans (1.31). Le lemme 1.1 nous donne

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-A\right) v_0(x, t)=\int e^{i(x, \eta)} \frac{\partial r_0}{\partial t}(x, t, \eta, \tau)\, \tilde{u}_0(\eta)\, d\eta -$$

$$-\int e^{i(x, \eta)} a(x, t, \eta)\, \tilde{v}_0(\eta, t)\, d\eta=\lim_{n\to\infty} \int e^{i(x, \eta)} \tilde{u}_0(\eta)\, d\eta \times$$

$$\times\left\{\frac{\partial r_0}{\partial t}-\int e^{i(x, z)} a(x, t, \eta+z)\, \widetilde{\varphi_n r_0}(\cdot, t, \eta, \tau)(z)\right\} dz. \quad (1.37)$$

Le lemme 1.3 et le théorème de Lebesgue nous permettent de passer à la limite sous le signe d'intégration dans la formule (1.37); quant à la limite de l'accolade, elle vaut

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\partial r_0}{\partial t}-\int e^{i(x, z)} a(x, t, \eta+z)\, \widetilde{\varphi_n r_0}(\cdot, t, \eta, \tau)(z)\, dz\right\}=a(x, t, \eta)-$$

$$-r_0(x_0, t; \eta, \tau)-\sum_{|\alpha|<N_1} \frac{1}{\alpha!} a^{(\alpha)}(x, t, \eta)\, D^\alpha r_0(x, t; \eta, \tau)-j_0(x, t, \eta)=$$

$$=-\sum_{0<|\alpha|<N_1} \frac{1}{\alpha!} a^{(\alpha)}(x, t, \eta)\, r_0(x, t; \eta, \tau)-j_0(x, t; \eta, r_0)\equiv$$

$$\equiv -k_0(x, t; \eta, \tau)+g_0(x, t, \eta),$$

où k_0 désigne la somme et g_0 le reste j_0. Donc

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-A\right) v_0(x, t)=-K_0 u_0-G_0 u_0, \quad (1.38)$$

où K_0 et G_0 sont les opérateurs de noyaux respectifs $k_0(x, t; \eta, \tau)$ et $g_0(x, t, \eta)$. Posons maintenant $r_1(x, t; \eta, \tau)=\int_\tau^t k_0(x, \sigma; \eta, \tau)\, e^{\int_\sigma^t a(x, s, \eta)\, ds}$ et

$$v_1(x, t)=\int e^{i(x, \eta)} r_1(x, t; \eta, \tau)\, \tilde{u}_0(\eta)\, d\eta.$$

Comme $\dfrac{\partial r_1}{\partial t}=k_0(x, t; \eta, \tau)+a(x, t, \eta)\, r_1(x, t; \eta, \tau)$, on obtient en vertu du lemme 1.1

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-A\right) v_1(x, t)=K_0 u_0+\lim_{n\to\infty} \int e^{i(x, \eta)} \tilde{u}_0(\eta)\{a(x, t, \eta)\, r_1(x, t; \eta, \tau)-$$

$$-\int e^{i(x, z)} a(x, t, \eta+z)\, \widetilde{\varphi_n r_1}(\cdot, t; \eta, \tau)(z)\}\, dz. \quad (1.39)$$

Le passage à la limite sous le signe d'intégration dans la formule (1.39) est licite toujours en vertu du lemme 3 et du théorème de Lebesgue. Le calcul, comme plus haut, de la limite de l'accolade nous donne

$$\lim_{n\to\infty}\{a(x,t,\eta)r_1(x,t;\eta,\tau)-\int e^{i(x,z)}a(x,t,\eta+z)\widetilde{\varphi_n r_1}(\cdot,t;\eta,\tau)(z)dz\}=$$

$$=-\sum_{0<|\alpha|<N_1}\frac{1}{\alpha!}a^{(\alpha)}(x,t,\eta)D^{\alpha}r_1(x,t;\eta,\tau)-j_0(x,t,\eta;r_1)\equiv$$

$$\equiv -k_1(x,t;\eta,\tau)+g_1(x,t,\eta).$$

Donc

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-A\right)v_1(x,t)=K_0u_0-K_1u_0-G_1u_0. \tag{1.40}$$

Les relations (1.38) et (1.40) entraînent

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-A\right)(v_0+v_1)(x,t)=K_0u_0-K_1u_0-G_1u_0.$$

Définissons ensuite $r_j(x,t;\eta,\tau)$ par récurrence. Si $r_j(x,t;\eta,\tau)$ a déjà été défini et

$$v_j(x,t)=\int e^{i(x,\eta)}r_j(x,t;\eta,\tau)\tilde{u}_0(\eta)d\eta,$$

alors

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-A\right)(v_0+v_1+\ldots+v_j)(x,t)=-K_ju_0+(G_0+G_1+\ldots+G_j)u_0. \tag{1.41}$$

Donc

$$r_{j+1}(x,t;\eta,\tau)=\int_{\tau}^{t}k_j(x,\sigma;\eta,\tau)\,e^{\int_{\sigma}^{t}a(x,s,\eta)ds}d\sigma,$$

$$v_{j+1}(x,t)=\int e^{i(x,\eta)}r_{j+1}(x,t;\eta,\tau)\tilde{u}_0(\eta)d\eta$$

et

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-A\right)v_{j+1}(x,t)=K_ju_0+\lim_{n\to\infty}\int e^{i(x,\eta)}\tilde{u}_0(\eta)+$$

$$+\lim_{n\to\infty}\int e^{i(x,\eta)}\{a(x,t,\eta)r_{j+1}(x,t;\eta,\tau)-$$

$$-\int e^{i(x,z)}a(x,t,\eta+z)\widetilde{\varphi_n r}_{j+1}(\cdot,t;\eta,\tau)(z)dz\}=$$

$$=K_ju_0-K_{j+1}u_0+G_{j+1}u_0,$$

où

$$k_{j+1}(x, t; \eta, \tau) = \sum_{0<|\alpha|<N_1} \frac{1}{\alpha!} a^{(\alpha)}(x, t, \eta) D^{\alpha} r_{j+1}(x, t; \eta, \tau)$$

et

$$g_{j+1}(x, t, \eta) = j_0(x, t, \eta; r_{j+1}).$$

Lemme 1.4. *Supposons que le symbole $a(x, t, \eta)$ de l'opérateur pseudo-différentiel $A(t)$ satisfait les conditions* (1.30). *Alors les noyaux $r_j(x, t; \eta, \tau)$ et $k_j(x, t; \eta, \tau)$ $(j=0, 1, 2, \ldots)$ sont de classe $C^{\infty}(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}_+)$, $\tau \leqslant t$, et satisfont les inégalités:*

$$r_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, t; \eta, \tau) \leqslant$$

$$\leqslant c_{j\alpha\beta\varepsilon} e^{(1-\varepsilon)\int_{\tau}^{t} b(x, s, \eta) ds} [(1+|\eta|)^{\delta-\rho} f^2]^j (1+|\eta|)^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} f^{|\alpha|+|\beta|}, \quad (1.42)$$

$$|k_{j(\beta)}^{(\alpha)}(x, t; \eta, \tau)| \leqslant c_{j\alpha\beta\varepsilon} e^{(1-\varepsilon)\int_{\tau}^{t} b(x, s, \eta) ds} |a(x, t, \eta)| [(1+|\eta|^{\delta-\rho} f^2]^j \times$$

$$\times (1+|\eta|^{\delta-\rho} f (1+\eta)^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} f^{|\alpha|+|\beta|}. \quad (1.43)$$

Démonstration. Procédons par récurrence. Le lemme est valable pour $\tau_0(x, t; \eta, \tau)$ d'après (1.36) et (1.31). Pour $k_0(x, t; \eta, \tau)$, on a

$$k_0(x, t; \eta, \tau) = \sum_{|\alpha|=1}^{N_1} \frac{1}{\alpha!} a^{(\alpha)}(x, t, \eta) D^{\alpha} r_0(x, t; \eta, \tau).$$

De là il s'ensuit que $k_0 \in C^{\infty}$ par rapport à toutes les variables et

$$k_{0(\beta)}^{(\alpha)}(x, t; \eta, \tau) = \sum_{|\gamma|=1}^{N_1} \sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2=\alpha \\ \beta_1+\beta_2=\beta}} c_{\alpha\beta\gamma} a_{\beta_1}^{\gamma+\alpha_1}(x, t, \eta) r_{0(\gamma+\beta_2)}^{\alpha_2}(x, t; \eta, \tau). \quad (1.44)$$

Les relations (1.44), (1.30) et (1.36) entraînent ($N_1 \geqslant 1$ est fixe)

$$|k_{0(\beta)}^{(\alpha)}(x, t; \eta, \tau)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{|\gamma|=1}^{N_1} c_{\alpha\beta\gamma} |a(x, t, \eta)(1+\eta)^{-\rho(|\gamma|+|\alpha_1|+\delta|\beta_1|)} e^{(1-\varepsilon)\int_{\tau}^{t} b ds} \times$$

$$\times (1+|\eta|)^{\rho|\alpha_2|+\delta|\gamma|+|\beta_2|} f^{|\alpha_2|+|\gamma|+|\beta_2|} \leqslant c_{\alpha\beta} |a(x, t, \eta)| e^{(1-\varepsilon)\int_{\tau}^{t} b ds} f^{|\alpha|+|\beta|} \times$$

$$\times (1+|\eta|)^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} \sum_{|\gamma|=1}^{N_1} c_\gamma (1+|\eta|)^{-\rho|\gamma|+\delta|\gamma|} f^{|\gamma|} \leqslant$$

$$\leqslant c_{\alpha\beta}\, e^{(1-\varepsilon)\int_\tau^t b(x,s,\eta)\,ds} |a(x,t,\eta)|(1+|\eta|)^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} f^{|\alpha|+|\beta|}(1+|\eta|)^{-\rho+\delta} f.$$

Le lemme est donc vérifié pour $k_0(x, t; \eta, \tau)$. Supposons maintenant qu'il l'est pour $r_j(x, t; \eta, \tau)$. Alors

$$k_j(x, t; \eta, \tau) = \sum_{|\gamma|=1}^{N_1} \frac{1}{\gamma!} a^{(\gamma)}(x, t, \eta) \times D^\gamma r_j(x, t; \eta, \tau),$$

c'est-à-dire que $k_j \in C^\infty$ et pour tous les indices multiples α et β, on a

$$k_{j(\beta)}^{(\alpha)}(x, t; \eta, \tau) = \sum_{|\gamma|=1}^{N_1} \sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2=\alpha \\ \beta_1+\beta_2=\beta}} c_{\alpha\beta\gamma} a_{(\beta_1)}^{(\gamma+\alpha)}(x, t, \eta) \times$$

$$\times r_{j(\gamma+\beta_2)}^{(\alpha_2)}(x, t; \eta, \tau). \qquad (1.45)$$

De (1.45) on obtient comme plus haut grâce à (1.42) et (1.30)

$$k_{j(\beta)}^{(\alpha)}(x, t; \eta, \tau) \leqslant c_{\alpha\beta j} e^{(1-\varepsilon)\int_\tau^t b(x,s,\eta)\,ds} |a(x, t, \eta)| \times$$

$$\times [(1+|\eta|)^{\delta-\beta} f^2]^j (1+|\eta|)^{\delta-\rho} f (1+|\eta|)^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} f^{|\alpha|+|\beta|}. \qquad (1.46)$$

Maintenant

$$r_{j+1}(x, t; \eta, \tau) = \int_\tau^t k_j(x, \sigma; \eta, \tau)\, e_\sigma^{\int_\sigma^t a(x,s,\eta)} d\sigma.$$

Donc $r_{j+1} \in C^\infty$ et pour tous α et β

$$r_{j+1(\beta)}^{(\alpha)}(x, t; \eta, \tau) = \int_\tau^t \sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2=\alpha \\ \beta_1+\beta_2=\beta}} c_{\alpha\beta} k_{j(\beta_1)}^{(\alpha_1)}(x, \sigma; \eta, \tau) \left[e^{\int_\sigma^t a(x,s,\eta)\,ds} \right]_{(\beta_2)}^{(\alpha_2)} d\sigma.$$

De là on déduit grâce à (1.46) et (1.36)

$$|r_{j+1(\beta)}^{(\alpha)}(x, t; \eta, \tau)| \leqslant \sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2=\alpha \\ \beta_1+\beta_2=\beta}} c_{\alpha\beta} [(1+|\eta|^{\delta-\rho} f^2]^j (1+|\eta|)^{\delta-\rho} \times$$

$$\times f (1+|\eta|)^{-\rho|\alpha_1|+\delta|\beta_1|} f^{|\alpha_1|+|\beta_1|} (1+|\eta|)^{-\rho|\alpha_2|+\delta|\beta_2|} f^{|\alpha_2|+|\beta_2|} \times$$

$$\times \int_\tau^t |a(x, \sigma, \eta)|\, e^{(1-\varepsilon)\int_\sigma^\tau b(x,s,\eta)\,ds}\, e^{(1-\varepsilon)\int_\sigma^t b(x,s,\eta)\,ds} d\sigma \leqslant$$

$$\leqslant c_{\alpha\beta}[(1+|\eta|)^{\delta-\rho}f^2]^j(1+|\eta|)^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}f^{|\alpha|+|\beta|}e^{(1-\varepsilon)\int_\tau^t b(x,s,\eta)\,ds} \times$$

$$\times \int_\tau^t |a(x,\sigma,\eta)|\,d\sigma \leqslant c_{\alpha\beta\varepsilon_1}e^{(1-\varepsilon_1)\int_\tau^t b(x,s,\eta)\,ds}[(1+|\eta|)^{\delta-\rho}f^2]^{j+1} \times$$

$$\times (1+|\eta|)^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}f^{|\alpha|+|\beta|}, \quad 0<\varepsilon<\varepsilon_1,$$

dans la dernière inégalité on s'est servi de la majoration (1.35). Ainsi $r_{j+1}(x, t; \eta, \tau)$ est justiciable de la majoration (1.42). En se servant de la majoration obtenue et de la formule (1.45) de $j+1$ on établit la majoration (1.43) pour $k_{j+1}(x, t; \eta, \tau)$. Ce qui prouve le lemme.

Lemme 1.5. *Si le symbole $a(x, t, \eta)$ de l'opérateur pseudo-différentiel $A(t)$ satisfait les conditions* (1.30), *les fonctions $g_j(x, t, \eta)=j_0(x, t, \eta; r_j)\in C^\infty(\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^N)$ et sont justiciables pour tous α et β de la majoration*

$$|g^{(\alpha)}_{j(\beta)}(x, t, \eta)| \leqslant c_{\alpha\beta N_1}(1+|\eta|)^{m+N-(\rho-\delta)N_1} \times$$

$$\times f^{N_1}[(1+|\eta|)^{\delta-\rho}f^2]^j(1+|\eta|)^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}f^{|\alpha|+|\beta|},$$

où $N_1>m+N$ est un nombre quelconque fixe.

Démonstration. Les deux propositions du lemme résultent aisément des formules (1.14), (1.17), (1.22) et de la majoration (1.42). Signalons seulement le fait suivant: en dérivant (1.22) par rapport à η et en majorant ensuite à l'aide de (1.23) et (1.27), on peut prendre le nombre N_1 aussi grand que l'on veut et indépendant du nombre N_1 des formules (1.14) et (1.17).

Soit n un nombre naturel quelconque. Considérons la somme

$$r(x, t; \eta, \tau)=\sum_{j=0} r_j(x, t; \eta, \tau) \tag{1.47}$$

et posons

$$v(x, t)=\int e^{i(x,\eta)}r(x, t; \eta, \tau)\tilde{u}_0(\eta)\,d\eta.$$

Alors $v(x, t)$ est solution de l'équation

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-A\right)v(x, t)=Hu_0,$$

où le noyau de l'opérateur H est de la forme (cf. (1.41)):

$$h(x, t; \eta, \tau)=-k_n(x, t; \eta, \tau)+\sum_{j=0}^{n} g_j(x, t, \eta). \tag{1.48}$$

En vertu des lemmes 1.4 et 1.5 la fonction $h(x, t; \eta, \tau)$ est de classe $C^\infty(\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}_+)$, $\tau\leqslant t$, et satisfait la majoration

$$|h(x, t; \eta, \tau)| \leqslant c\{(1+|\eta|)^m[(1+|\eta|)^{\delta-\rho}f^2]^n \times$$

$$\times (1+|\eta|)^{\delta-\rho}f+(1+|\eta|)^{m+N-(\rho-\delta)N_1}f^{N_1}. \tag{1.49}$$

Comme $f = O(1+|\eta|)^{\frac{\rho-\delta-\varepsilon}{2}}$, $\varepsilon > 0$, la fonction $h(x, t; \eta, \tau)$ en tant que fonction de η tend, ainsi qu'il résulte de la majoration (1.49), vers 0, lorsque $|\eta| \to \infty$, plus vite que toute puissance de $|\eta|^{-1}$ pour n et N_1 assez grands, cette limite étant uniforme par rapport à $x \in \mathbf{R}^N$ et $\tau \leqslant t \in [0, T]$.

3. Dans ce numero on se propose de construire le symbole $p(x, t; \eta, \tau)$ de l'opérateur $U(t, \tau)$. Soit $\{\varphi_n(x)\}$ la suite de fonctions décrite dans le lemme 1.1. Pour les deux fonctions $p(x, t; \eta, \tau)$ et $h(x, t; \eta, \tau)$ désignons par $p * h$ la limite

$$\lim_{n\to\infty} \int e^{i(x,z)} p(x, t; \eta+z, \sigma)\, \widetilde{\varphi_n h}(x, \sigma; \eta, \tau)(z)\, dz \equiv$$

$$\equiv p(x, t; \eta, \sigma) * h(x, \sigma; \eta, \tau)$$

qui existe sous les conditions du lemme 1.3. Supposons par ailleurs que $r(x, t; \eta, \tau)$ et $h(x, t; \eta, \tau)$ sont définies par les formules (1.47) et (1.48) respectivement. Considérons l'équation intégrale

$$p(x, t; \eta, \tau) = r(x, t; \eta, \tau) - \int_\tau^t p(x, t; \eta, \sigma) * h(x, \sigma; \eta, \tau)\, d\sigma, \quad (1.50)$$

où $p(x, t; \eta, \tau)$ est la fonction inconnue. Intégrons l'équation (1.50) (pour la commodité on omettra la dépendance des fonctions par rapport à x et à η ainsi que le signe « $-$ » dans la fonction h en conservant à cette dernière son ancienne notation)

$$p(t, \tau) = r(t, \tau) + \int_\tau^t r(t, \sigma) * h(\sigma, \tau)\, d\sigma +$$

$$+ \int_\tau^t d\sigma \left[\int_\sigma^t p(t, \sigma_1) * h(\sigma_1, \sigma)\, d\sigma_1 \right] * h(\sigma, \tau) =$$

$$- r(t, \tau) + \int_\tau^t r(t, \sigma) * h(\sigma, \tau)\, d\sigma + \int_\tau^t d\sigma_1 p(t, \sigma_1) * \int_\tau^{\sigma_1} h(\sigma_1, \sigma) * h(\sigma, \tau)\, d\sigma.$$

Lemme 1.6. *Soient $p(x, t; \eta, \tau)$, $h(x, t; \eta, \tau)$ et $r(x, t; \eta, \tau)$ trois fonctions arbitraires remplissant les conditions du lemme* 1.3. *On a alors l'égalité (associativité du signe $*$)*

$$[p(t, \sigma_1) * h(\sigma_1, \sigma)] * r(\sigma, \tau) = p(t, \sigma_1) * [h(\sigma_1, \sigma) * r(\sigma, \tau)].$$

La proposition du lemme découle immédiatement de la définition du signe $*$ et du lemme 1.3.

Si maintenant l'on désigne

$$h_2(\sigma, \tau) = \int_\tau^\sigma h(\sigma, s) * h(s, \tau)\, ds$$

et, d'une façon plus générale,

$$h_{n+1}(\sigma, \tau)=\int_{\cdot}^{\sigma} h(\sigma, s) * h_n(s, \tau)\, ds=\int_{\tau}^{\sigma} h_n(\sigma, s) * h(s, \tau)\, ds,$$

alors la solution de l'équation intégrale (1.50) peut être mise sous la forme

$$p(t, \tau)=r(t, \tau)+\int_{\tau}^{t} r(t, \sigma) * \Phi(\sigma, \tau)\, d\sigma, \tag{1.51}$$

où

$$\Phi(\sigma, \tau)=\sum_{n=1}^{\infty} h_n(\sigma, \tau). \tag{1.52}$$

Lemme 1.7. (i) *La résolvante* $\Phi(x, \sigma; \eta, \tau)$ *de l'équation intégrale* (1.50) *existe pour tous* $0 \leqslant \tau \leqslant \sigma < \infty$, *appartient à* $C^{\infty}(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}_+)$ *et est justiciable de la majoration*

$$\left|\Phi_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, \sigma; \eta, \tau)\right| \leqslant c_{\alpha\beta}(1+|\eta|)^{-j-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} f^{|\alpha|+|\beta|} e^{c(\sigma-\tau)}; \tag{1.53}$$

α *et* β *sont des indices multiples quelconques,* j et c *des nombres fixes* >0.

(ii) *L'équation intégrale* (1.50) *admet une solution et une seule définie par la formule* (1.51).

Démonstration. Nous avons vu que $h(x, t; \eta, \tau) \in C^{\infty}(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}_+)$ et que

$$\left|h^{(\alpha)}(x, t; \eta, \tau)\right| \leqslant c_{\alpha}(1+|\eta|)^{-j-\rho|\alpha|} f^{(\alpha)}, \tag{1.54}$$

où $j>0$ est un nombre fixe quelconque et α un indice multiple arbitraire. On a

$$h(\sigma, s) * h(s, \tau)=\lim_{n \to \infty} \int e^{i(x, z)} h(x, \sigma; \eta+z, s)\, \widetilde{\varphi_n h}(\cdot, s; \eta, \tau)(z)\, dz=$$

$$=\lim_{n \to \infty} \int \varphi_n(y)\, h(y, s; \eta, \tau)\, dy \int e^{-i(z, y-x)} h(x, \sigma; \eta+z, s)\, dz. \tag{1.55}$$

Désignons

$$l(x, w, \sigma; \eta, s)=\int e^{-i(z, w)} h(x, \sigma; \eta+z, s)\, dz. \tag{1.56}$$

Alors pour tout indice multiple β, il vient en vertu de (1.54)

$$\left|w^{\beta} l\right|=\left|\int e^{-i(\xi, w)} h^{(\beta)}(x, \sigma, \xi, s)\, d\xi\right| \leqslant c_{\beta} \quad \text{pour} \quad j>N+1. \tag{1.57}$$

En prenant β tel que $|\beta|=\beta_0=N+1$, on déduit de (1.55) et (1.57) que

$$|h(\sigma, s) * h(s, \tau)| \leqslant \lim_{n \to \infty} c_{\beta_0} \int \frac{\left|\varphi_n(y)\, h(y, s; \eta, \tau)\right|}{(1+|x-y|)^{N+1}}\, dy \leqslant c_0 c_{\beta_0}(1+|\eta|)^{-j},$$

donc

$$|h_2(\sigma, r)| = \left|\int_\tau^\sigma h(\sigma, s) * h(s, \tau)\, ds\right| \leqslant c_0 c_{\beta_0} (1+|\eta|)^{-j} (\sigma - \tau).$$

D'autre part, par récurrence, si pour $h_m(\sigma, \tau)$ on a la majoration

$$|h_m(\sigma, \tau)| \leqslant (c_0, c_{\beta_0})^{m-1} \frac{(\sigma-\tau)^{m-1}}{(m-1)!} (1+|\eta|)^{-j}, \tag{1.58}$$

alors

$$h(\sigma, s) * h_m(s, \tau) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n(y)\, h_m(y, s; \eta, \tau)\, dy \int e^{-i(z, y-x)} h(x, \sigma; \eta + z, s)\, dz \tag{1.59}$$

et en vertu de (1.57) et (1.58)

$$|h(\sigma, s) * h_m(s, \tau)| \leqslant c_{\beta_0} \int \frac{|h_m(y, s; \eta, \tau)|}{(1+|x-y|)^{N-1}}\, dy \leqslant (c_0 c_{\beta_0})^m \frac{(s-\tau)^{m-1}}{(m-1)!} (1+|\eta|)^{-j}.$$

Donc

$$|h_{m+1}(\sigma, \tau)| = \left|\int_\tau^\sigma h(\sigma, s) * h_m(s, \tau)\, ds\right| \leqslant$$

$$\leqslant (c_0 c_{\beta_0})^m \frac{(1+|\eta|)^{-j}}{(m-1)!} \int_\tau^\sigma (s-\tau)^{m-1}\, ds \leqslant (c_0 c_{\beta_0})^m \frac{(\sigma-\tau)^m}{m!} (1+|\eta|)^{-j}$$

ce qui prouve (1.58) pour tout m. Par conséquent

$$|\Phi(x, \sigma; \eta, \tau)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} h_n(x, \sigma; \eta, \tau)\right| \leqslant$$

$$\leqslant (1+|\eta|)^{-j} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(c_0 c_{\beta_0})^{n-1}}{(n-1)!} (\sigma-\tau)^{n-1} = (1+|\eta|^{-j})\, e^{c_0 c_{\beta_0}(\sigma-\tau)}. \tag{1.60}$$

Nous avons ainsi prouvé l'existence de la résolvante $\Phi(x, \sigma; \eta, \tau)$ de l'équation intégrale (1.50) et avons établi pour elle la majoration (1.60); en outre la convergence uniforme de la série entraîne la continuité de la fonction Φ par rapport à toutes les variables.

Prouvons maintenant que $\Phi(x, \sigma; \eta, \tau) \in C^\infty(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}_+)$. Que Φ soit indéfiniment dérivable par rapport à η résulte de ce que chaque h_n l'est, de la convergence uniforme en η de la série de la résolvante et de la

majoration (1.54) qui rend licite la dérivation par rapport à η sous le signe d'intégration dans la formule (1.59). De là on déduit notamment la majoration suivante pour les dérivées de Φ par rapport à η :

$$|\Phi^{(\alpha)}(x, \sigma; \eta, \tau)| \leqslant c_\alpha (1+|\eta|)^{-j+\rho|\alpha|} f^{|\alpha|} e^{c(\sigma-\tau)}$$

pour tout indice multiple α, $c = c_0 c_{\beta_0}$. Les choses sont plus compliquées côté dérivabilité par rapport à x, σ et τ. Penchons-nous en détail sur la dérivabilité de Φ par rapport à x (la situation est analogue par rapport à σ et à τ). Le nombre $j>0$ de la majoration (1.54) étant arbitraire, on peut le prendre suffisamment grand, plus exactement

$$j \geqslant N+m+2.$$

Soit β un indice multiple quelconque. Si $|\beta|<m$, on peut dériver par rapport à x sous le signe d'intégration dans (1.59) et reprendre tous les calculs de (1.56) à (1.60) en remplaçant j par $j-|\beta|\left(\frac{\delta+\rho}{2}\right)$. Si $|\beta| \geqslant m$, pour calculer quelques premiers termes de la forme $h(\sigma, s) * h_n(s, \tau)$ on se servira du lemme 1.3, en y remplaçant N_1 par $N+m+1$. Ces termes dont l'expression est calquée sur celle de la formule (1.12), nous pouvons les dériver $(|\beta|)$ fois par rapport à x. En outre, chaque fonction $h(\sigma, s) * h_n(s, \tau)$ décroît pour $|\eta| \to \infty$ plus vite que $|\eta|^{(n+1)j-N_1\left(\frac{\delta+\rho}{2}\right)n}$, où $(n+1)j-N_1\left(\frac{\delta+\rho}{2}\right)n > n[j-(N+m+1)] \geqslant n$. Pour un n assez grand, cette expression sera $>|\beta|+N+1$. A partir de ce n on peut de nouveau se servir de la formule (1.59), etc., et dériver par rapport à x sous le signe d'intégration. Ce faisant, on obtient la majoration suivante:

$$|\Phi_{(\beta)}(x, \sigma; \eta, \tau)| \leqslant c_\beta (1+|\eta|)^{-j+\delta|\beta|} f^{|\beta|} e^{c(\sigma-\tau)}$$

pour tout indice multiple β. Ceci prouve la proposition (i) du lemme 1.7. Prouvons la proposition (ii). Portons (1.51) dans (1.50) (dans (1.50) nous avons inversé le signe de l'intégrale du second membre). Tenant compte de (1.52) et de l'associativité du signe $*$, on s'assure que (1.50) se transforme en l'identité

$$\begin{aligned} r(t, \tau)+\int_\tau^t r(t, s) * \Phi(s, \tau)\, ds &= r(t, \tau)+\int_\tau^t r(t, \sigma) * h(\sigma, \tau)\, d\sigma + \\ &+\int_\tau^t \left\{\int_\sigma^t r(t, s) * \Phi(s, \sigma)\, ds\right\} * h(\sigma, \tau)\, d\sigma = \\ &= r(t, \tau)+\int_\tau^t r(t, \sigma) * h(\sigma, \tau)\, d\sigma+\int_\tau^t r(t, s) * \sum_{n=2}^{\infty} h_n(s, \tau)\, ds = \\ &= r(t, \tau)+\int_\tau^t r(t, s) * \Phi(s, \tau)\, ds. \end{aligned}$$

Prouvons l'unicité de la solution de l'équation (1.50). Si cette équation admet deux solutions $p_1(t, \tau)$ et $p_2(t, \tau)$, leur différence $p = p_1 - p_2$ sera solution de l'équation homogène, donc

$$p(t, \tau) = -\int_\tau^t p(t, \sigma) * h(\sigma, \tau)\, ds = \ldots = (-1)^n \int_\tau^t p(t, \sigma) * h_n(\sigma, \tau)\, d\sigma.$$

D'ou, en vertu de (1.58), il s'ensuit que $p(x, t; \eta, \tau) \equiv 0$. Ce qui prouve le lemme 1.7.

Nous avons ainsi construit une fonction $p(x, t; \eta, \tau)$ qui est solution de l'équation intégrale (1.50):

$$p(x, t; \eta, \tau) = r(x, t; \eta, \tau) + \int_\tau^t r(x, t; \eta, \sigma) * \Phi(x, \sigma; \eta, \tau)\, d\sigma. \quad (1.61)$$

Montrons que cette fonction est le symbole de l'opérateur $U(t, \tau)$.

Théorème 1.1. *Supposons que le symbole $a(x, t, \xi)$ de l'opérateur pseudo-différentiel $A(t)$ satisfait les conditions* (1.30). *Il existe un symbole* (*et un seul*) *de l'opérateur $U(t, \tau)$ défini par la formule* (1.61).

Démonstration. Il nous faut prouver que la solution du problème de Cauchy est de classe $\mathfrak{A}$, existe et se représente par

$$u(x, t) = \int e^{i(x, \eta)} p(x, t; \eta, \tau)\, \tilde{u}_0(\eta)\, d\eta.$$

Tout d'abord, cette formule entraîne que $u(x, t) \in C^\infty(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}_+)$ et appartient à $\mathscr{S}$ en tant que fonction de x pour chaque $t \geqslant \tau$ fixe. En effet, ceci résulte immédiatement de la représentation (1.61) et des majorations (1.42) et (1.53) pour les fonctions $r(x, t; \eta, \tau)$ et $\Phi(x, t; \eta, \tau) \in C^\infty(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}_+)$. Montrons par ailleurs que pour tout $x \in \mathbf{R}^N$

$$\lim_{t \to \tau} u(x, t) = u_0(x).$$

On a

$$r(x, t; \eta, \tau) = \sum_{j=0}^{n} r_j(x, t; \eta, \tau). \quad (1.62)$$

Pour $j \geqslant 1$

$$r_j(x; t; \eta, \tau) = \int_\tau^t k_{j-1}(x, \sigma; \eta, \tau)\, e^{\int_\sigma^t a(x, s, \eta)\, ds}\, d\sigma.$$

Utilisons la majoration de k_{j-1} pour majorer $r_j(x, t; \eta; \tau)$, $j \geqslant 1$:

$$|r; (x, t; \eta, \tau)| \leqslant c_j [(1 + |\eta|)^{\delta - \rho} f^2]^{j-1} (1 + |\eta|^{\delta - \rho} f \int_\tau^t |a(x, \sigma, \eta)| \times$$

$$\times e^{(1-\varepsilon)\int_\tau^\sigma b(x, s, \eta)\, ds} \cdot e^{\int_\sigma^t b(x, s, \eta)\, ds}\, d\sigma \leqslant$$

$$\leqslant c_j [(1 + |\eta|)^{\delta - \rho} f^2]^j\, e^{(1-\varepsilon)\int_\tau^t b(x, s, \eta)\, ds} \times \int_\tau^t |b(x, s, \eta)|\, ds. \quad (1.63)$$

En utilisant maintenant la première inégalité de (1.30) et en majorant l'exponentielle par l'unité, on déduit de (1.63) la majoration (grossière) suivante :

$$|r_j(x, t; \eta, \tau)| \leqslant c_j [(1+|\eta|)^{\delta-\rho} f^2]^j (1+|\eta|)^m (t-\tau). \tag{1.64}$$

Cette majoration grossière nous suffit largement, mais on remarquera que de (1.63) il s'ensuit que $r_j \to 0$ lorsque $t \to \tau$ uniformément en $\eta \in \mathbf{R}^N$ pour tous les $j \geqslant 1$.

Les relations (1.62) et (1.64) entraînent

$$r(x, t; \eta, \tau) = e^{\int_\tau^t a(x, s, \eta) ds} + \sum_{j=1}^{n} r_j(x, t; \eta, \tau) \tag{1.65}$$

et

$$\left| r(x, t; \eta, \tau) - e^{\int_\tau^t a(x, s, \eta) ds} \right| \leqslant c(t-\tau)(1+|\eta|)^m (1+|\eta|)^{\delta-\rho} f^2$$

Le lemme 1.3 nous donne pour $N_1 > N$

$$r(x, t; \eta, \sigma) * \Phi(x, \sigma; \eta, \tau) =$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{N_1} \frac{1}{\alpha!} r^{(\alpha)}(x, t; \eta, \sigma) \Phi_{(\alpha)}(x, \sigma; \eta, \tau) + j_0. \tag{1.66}$$

Grâce aux majorations (1.42), (1.53) et (1.13), on déduit de (1.66) que

$$\left| \int_\tau^t r(x, t; \eta, \sigma) * \Phi(x, \sigma; \eta, \tau) d\sigma \right| \leqslant c(t-\tau)(1+|\eta|)^{-p}$$

si N_1 est assez grand et $0 \leqslant t-\tau \leqslant c$.

La formule (1.65) et la majoration obtenue expriment que $p(x, t; \eta, \tau) \to 1$, lorsque $t \to \tau$ en chaque point $\eta \in \mathbf{R}^N$ et que l'intégrant de (0.2) admet la majoration intégrable $(1+|\eta|)^m |\tilde{u}_0(\eta)|$. Le théorème de Lebesgue autorise le passage à la limite sous le signe d'intégration dans (0.2) et il est immédiat de prouver que $u(x, t) \to u_0(x)$ lorsque $t \to \tau$ pour la norme de l'espace $\mathscr{S}$. Assurons-nous que la fonction $u(x, t)$ définie ci-dessus est solution de l'équation $\left(\frac{\partial}{\partial t} - A\right) u(x, t) = 0$. En effet,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - A\right) u(x, t) =$$

$$= \int e^{i(x, \eta)} \tilde{u}_0(\eta) \left[\frac{\partial p(x, t, \eta, \tau)}{\partial t} - a(x, t, \eta) * p(x, t; \eta, \tau) \right] d\eta = 0$$

car, ainsi qu'il est aisé de le voir, en appliquant de nouveau le lemme 1.3 et

en mettant $r*\Phi$ sous la forme (1.66), on obtient la chaîne d'égalités suivante:

$$p(x, t; \eta, \tau)=r(x, t; \eta, \tau)+\int_{\tau}^{t} r(x, t; \eta, \tau)*\Phi(x, \sigma; \eta, \sigma)d\sigma$$

et

$$\left(\frac{\partial p}{\partial t}a*p\right)=\left(\frac{\partial r}{\partial t}-a*r\right)+\Phi+\int_{\tau}^{t}\left(\frac{\partial r}{\partial t}-a*r\right)*\Phi d\sigma=$$

$$=-h_1(x, t; \eta, \tau)+\sum_{n=1}^{\infty} h_n(x, t; \eta, \tau)-$$

$$-\int_{\tau}^{t} h_1(x, t; \eta, \sigma)*\sum_{n=1}^{\infty} h_n(x, \sigma; \eta, \tau)d\sigma=\sum_{n=2}^{\infty} h_n-\sum_{n=2}^{\infty} h_n=0.$$

Nous avons ainsi prouvé que $p(x, t; \eta, \tau)$ est le symbole de l'opérateur $U(t, \tau)$. Ce symbole est unique en vertu du théorème d'unicité de la solution du problème de Cauchy (0.1). Ceci achève la démonstration du théorème 1.1.

Remarque. Grâce au symbole $p(x, t; \eta, \tau)$ on peut mettre la solution du problème de Cauchy

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-A\right)u(x, t)=f(x, t),$$

$$u|_{t=\tau}=u_0(x), \quad u_0(x), f(x, t)\in\mathscr{S} \tag{1.67}$$

sous la forme suivante:

$$u(x, t)=\int e^{i(x, \eta)}p(x, t; \eta, \tau)\,\tilde{u}_0(\eta)d\eta+$$

$$+\int_{\tau}^{t} d\sigma\int e^{i(x, \eta)}p(x, t; \eta, \sigma)\tilde{f}(\cdot, \sigma)(\eta)d\eta. \tag{1.68}$$

§ 2. Conditions suffisantes d'existence du T-produit d'opérateurs hypoelliptiques

Subdivisons un intervalle de temps arbitraire $[\tau, \mathscr{T}]$, $0\leqslant\tau<\mathscr{T}=\infty$, en intervalles partiels $[t_i, t_{i+1}]$, $i=0, 1, \ldots, n$, $t_0=\tau$, $t_{n+1}=\mathscr{T}$. Soient $t_i\in[t_i, t_{i+1}]$, $\Delta t_i=[t_{i+1}-t_i]$. Désignons par $e^{[A(t_i)]\Delta t_i}$ l'opérateur $U(t, t_1)$ de $\mathscr{S}$ dans $\mathscr{S}$ correspondant au problème de Cauchy (0.1) dans lequel les coefficients de l'opérateur $a\left(\overset{2}{x}, \overset{1}{t}, \overset{1}{D}\right)$ sont «gelés» au point t_i et l'instant initial est l'instant t_i. Désignons par Δ le pas de la subdivision:

$\Delta = \max\{\Delta t_0, \ldots, \Delta t_n\}$. Le T-produit (ou produit chronologique) d'opérateurs se définit par la formule suivante :

$$T e^{\int_\tau^{\mathscr{T}} [A(s)]\,ds} \lim_{\Delta \to 0} e^{[A(t_n)]\,\Delta t_n} e^{[A(t_{n-1})]\,\Delta t_{n-1}} \ldots e^{[A(t_0)]\,\Delta t_0} \tag{2.1}$$

sous réserve que cette limite existe et ne dépende pas du procédé de subdivision de l'intervalle $[\tau, \mathscr{T}]$ et du choix des points $t_i \in [t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Dans ce paragraphe nous établirons les conditions d'existence du T-produit d'opérateurs.

1. Supposons remplies les conditions imposées au § 1 au symbole $a(x, t, \xi)$ de l'opérateur pseudo-différentiel $A(t)$. Alors, sur chaque intervalle partiel $\{t_i, t_{i+1}] \subset [\tau, \mathscr{T}]$ le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial t} - a\left(\overset{2}{x}, t_i, \overset{1}{D}\right)\right) u(x, t) = 0, \\ U_{t=t_i} = \varphi(x), \qquad \varphi \in \mathscr{S}, \end{cases} \tag{2.2}$$

est justiciable au théorème 1.1, de sorte que l'opérateur $e^{A(t)\Delta t_i}$ associé au problème (2.2) admet le symbole $p(x, t, \dot{t}, \eta, t_j)$ construit au § 1. Ce symbole possède toutes les propriétés mentionnées au § 1 (la notation $a\left(\overset{2}{x}, \dot{t}, \overset{1}{D}\right)$ exprime que les coefficients de l'opérateur A sont gelés au point $\dot{t} \in [t_i, t_{i+1}]$. Désignons par $L(\Delta)$ l'opérateur

$$L(\Delta) = e^{[A(t_n)]\Delta t_n} e^{[A(t_{n-1})]\Delta t_{n-1}} \ldots e^{[A(t_0)]\Delta t_0}. \tag{2.3}$$

Nous avons vu au § 1 que l'opérateur $L(\Delta)$ est un opérateur de $\mathscr{S}$ dans $\mathscr{S}$ pour tout $\Delta > 0$. On se propose de prouver que, sous certaines conditions, l'opérateur $L(\Delta)$ converge lorsque $\Delta \to 0$ vers un opérateur L_0 de $\mathscr{S}$ dans $\mathscr{S}$ au sens de la convergence simple des opérateurs, c'est-à-dire que $\lim_{\Delta \to 0} L(\Delta)\varphi = L_0 \varphi$ pour tout $\varphi \in \mathscr{S}$.

Le symbole $U(t, \tau)$ construit au § 1 nous permet d'écrire pour l'opérateur $L(\Delta)$: pour toute fonction $u_0 \in \mathscr{S}$

$$\begin{aligned} L(\Delta) u_0 = p\left(\overset{2n+2}{x}, t, t_n, \overset{2n+1}{\eta}, t_n\right) \times \\ \times p\left(\overset{2n}{x}, t_n, t_{n-1}, \overset{2n-1}{\eta}, t_{n-1}\right) \\ \ldots p\left(\overset{2}{x}, t_1, t_0, \overset{1}{\eta}, \tau\right) u_0, \end{aligned} \tag{2.4}$$

où l'expression du second membre se lit de droite à gauche (dans le sens de la croissance du temps) et l'expression $p\left(\overset{2}{x}, t_1, t_0, \overset{1}{\eta}, \tau\right) u_0$ signifie que

$$\left(p\left(\overset{2}{x}, \ldots, \overset{1}{\eta}\right) u_0(x)\right)(x) = \int e^{i(x, \eta)} p(x, \ldots, \eta)\, \bar{u}_0(\eta)\, d\eta, \tag{2.5}$$

etc. Introduisons la fonction

$$w(x, t)=p\left(\overset{2j+2}{x}, t, t_j, \overset{2j+1}{\eta}, t_j\right) p\left(\overset{2j}{x}, t_j, t_{j-1}, \overset{2j-1}{\eta}, t_{j-1}\right) \ldots$$
$$\ldots p\left(\overset{2}{x}, t_1, t_0, \overset{1}{\eta}, \tau\right) \cdot u_0 \qquad (2.6)$$

pour $t_j<t\leqslant t_{j+1}$, $j=0, 1, \ldots, n$, ou, pour simplifier,

$$w(x, t)=p\left(\overset{2}{x}, t, t; \overset{1}{\eta}, t_j\right) w(x, t_j) \qquad (2.7)$$

avec $t_j<t\leqslant t_{j+1}$; $w(x, t_0)=w(x, \tau)=u_0(x)$. Des propriétés des symboles $p(x, t, t_j; \eta, t_j)$, $j=0, 1, \ldots, n$, il résulte que $w(x, t)\in C^\infty(\mathbf{R}^N)$ par rapport à x et est continue en $t\in[\tau, \mathscr{T}]$. D'autre part, $w(x, t)\in C^\infty(\mathbf{R}^N)$ par rapport à t partout sur $[\tau, \mathscr{T}]$ à l'exception des points de subdivision t_j, où ses dérivées sont généralement affectées d'un saut. Dans la suite, par dérivée par rapport à t aux points t_j, on comprendra la dérivée à gauche, c'est-à-dire que

$$\left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=t_j}=\lim_{\Delta t\to -0}\frac{w(x, t_j+\Delta t)-w(x, t_j)}{\Delta t}. \qquad (2.8)$$

Appliquons l'opérateur $\left(\frac{\partial}{\partial t}-a\left(\overset{2}{x}, t, \overset{1}{D}\right)\right)$ à la fonction $w(x, t)$. A noter qu'on peut appliquer cet opérateur par rapport à x comme précédemment (cf. (2.7)), car $w(x, t)\in\mathscr{S}(\mathbf{R}^N)$ par rapport à x pour tous les t. D'après (2.7) et le lemme 1 du § 1

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-a\left(\overset{2}{x}, t, \overset{1}{D}\right)\right) w(x, t)=\frac{\partial p}{\partial t} w(x, t_j)-[a(x, t, \eta)*p]\, w(x, t_j)=$$
$$=\left(\frac{\partial p}{\partial t}-a*p\right) w(x, t_j) \qquad (2.9)$$

pour $t_j<t\leqslant t_{j+1}$. Mais $\frac{\partial p}{\partial t}-a(t)*p=0$, donc

$$\frac{\partial p}{\partial t}-a*p=[a(t)-a(t)]*p\equiv h(x, t, t, \eta, t_j), \quad t\in[t_j, t_{j+1}]. \qquad (2.10)$$

Designons par $H(t)$ l'opérateur dont le noyau a été défini dans (2.10) et par Z l'opérateur de translation

$$Zw(x, t)=w(x, t_j) \quad \text{pour} \quad t_j<t\leqslant t_{j+1}. \qquad (2.11)$$

De (2.9), (2.10) et (2.11) il vient que $w(x, t)$ est solution de l'équation

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-A(t)-H(t)Z\right) w(x, t)=0 \qquad (2.12)$$

pour $t_j<t\leqslant t_{j+1}$, $j=0, 1, \ldots, n$. D'autre part, (2.7) et les propriétés du symbole p entraînent que

$$w(x, t)\big|_{t=\tau}=u_0(x). \tag{2.13}$$

Etudions maintenant le problème

$$\left|\begin{array}{l}\left(\dfrac{\partial}{\partial t}-A(t)-H(t)Z\right)u(x, t)=0,\\ \qquad u(x, t)\big|_{t=\tau}=u_0(x)\end{array}\right. \tag{2.14}$$

sur l'intervalle $[\tau, \mathscr{T}]$. Construisons le symbole du problème (2.14), c'est-à-dire une fonction $p_1(x, t; \eta, \tau)\in C^\infty$ par rapport à x et à η telle que la fonction

$$u_1(x, t)=\int e^{i(x, \eta)}p_1(x, t, \eta, \tau)\,\tilde{u}_0(\eta)d\eta \tag{2.15}$$

soit solution du problème (2.14). A noter que dans le problème (2.14) on admet que la subdivision de l'intervalle $[\tau, \mathscr{T}]$ par les points t_j, $j=0, 1, \ldots, n+1$, est fixe. Le noyau de l'opérateur $H(t)$ est défini par la formule (2.10) sur chaque intervalle partiel $t_j<t\leqslant t_{j+1}$ et $\dfrac{\partial}{\partial t}$ est comprise comme la dérivée à gauche aux points de subdivision. Comme au § 1, prenons

$$r_0(x, t; \eta, \tau)=e^{\int_\tau^t a(x, s, \eta)ds}. \tag{2.16}$$

$$v_0(x, t)=\int e^{i(x, \eta)}r_0(x, t; \eta, \tau)\,\tilde{u}_0(\eta)d\eta. \tag{2.17}$$

Des calculs assez longs nous attendent en perspective. Pour les alléger nous nous servirons du lemme suivant.

Lemme 2.1. *Si* $p_j(x, \xi)\in S^{m_j}_{\rho, \delta}$, $j=0, 1, \ldots, n$, $m_j\to-\infty$, *il existe un* $p(x, \xi)\in S^{\overline{m}_0}_{\rho, \delta}$, *tel que pour tout* k

$$p-\sum_{j<k}p_j\in S^{\overline{m}_k}_{\rho, \delta},$$

où $\overline{m}_k=\max\limits_{j\geqslant k}m_j$.

La fonction p est définie à une fonction près de $S^{-\infty}_{\rho, \delta}$. Si $\varphi\in C^\infty(\mathbf{R}^N)$ est telle que $\varphi=0$ pour $|\xi|<\dfrac{1}{2}$ et $\varphi=1$ pour $|\xi|>1$, on peut choisir une suite $\nu_j\to\infty$ croissant assez rapidement de sorte que

$$p(x, \xi)=\sum_{j=0}^{\infty}\varphi\left(\frac{\xi}{\nu_j}\right)p_j(x, \xi). \tag{2.18}$$

Pour le symbole $p(x, \xi)$ défini à l'aide de $p_j(x, \xi)$, on écrira

$$p \sim \sum_j p_j.$$

Ce formalisme permet de négliger les restes dans le lemme 1.3 s'ils appartiennent à $S_{\rho, \delta}^{-\infty}$.

La dérivation des fonctions considérées fait apparaître en plus de $(1+|\eta|)^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}$ le facteur $f^{|\alpha|+|\beta|}$, mais comme f est justiciable de l'estimation $f=O[(1+|\eta|)^{\frac{\rho-\delta}{2}-\varepsilon}]$, on peut admettre que ces fonctions sont de classes $S_{\rho', \delta'}$, $\rho'=\frac{\rho+\delta}{2}+\varepsilon$, $\delta'=\frac{\rho+\delta}{2}-\varepsilon$, de sorte que $0 \leqslant \delta' < \rho' \leqslant 1 \left(0 < \varepsilon \leqslant \frac{\rho-\delta}{2}\right)$.

Revenons à la construction du symbole $p_1(x, t; \eta, \tau)$. Portons $v_0(x, t)$ dans l'équation (2.14). On obtient

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - A(t) - H(t)Z\right) v_0(x, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - A(t)\right) v_0 - H(t) Z v_0 = -K_0 u_0 - G_0 u_0,$$

où l'opérateur K_0 possède le noyau

$$k_0(x, t; \eta, \tau) \sim \sum_{|\alpha|>0} \frac{1}{\alpha!} a^{(\alpha)}(x, t, \eta)\, r_{0(\alpha)}(x, t; \eta, \tau), \tag{2.20}$$

et l'opérateur G_0, le noyau

$$g_0(x, t, t_j, \eta, \tau) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \int e^{i(x, z)}\, h(x, t, t, \eta+z, t_j)\, \widetilde{\varphi_n r_0}(\cdot, t_j; \eta, \tau)(z)\, dz \tag{2.21}$$

pour $t_j < t \leqslant t_{j+1}$, $j=0, 1, \ldots, n$. D'après le lemme 1.3 et la remarque ci-dessus

$$g_0(x, t, t_j, \eta, \tau) \sim \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} h^{(\alpha)}(x, t, t, \eta, t_j)\, r_{0(\alpha)}(x, t; \eta, \tau). \tag{2.22}$$

Estimons les noyaux h et g_0. On a

$$h(x, t, t, \eta, t_j) =$$

$$= (a(x, t, \eta) - a(x, t, \eta)) * p(x, t, t, \eta, t_j) \sim \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} \bar{a}^{(\alpha)} p_{(\alpha)}, \tag{2.23}$$

où

$$\bar{a}=a(x, t, \eta)-a(x, t, \eta)=\int_t^t \frac{\partial a(x, s, \eta)}{\partial t}\, ds.$$

On admettra que les conditions suivantes sont remplies :

(i) $$\left|\frac{\partial}{\partial s} a_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, s, \eta)\right| \leqslant c_{\alpha\beta}\left|a_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, s, \eta)\right| \tag{2.24}$$

pour tous les $(x, s) \in \mathbf{R}^N \times [0, T]$ et tous indices multiples α et β.
(ii) Pour $\varepsilon>0$ il existe un $\delta>0$ tel que pour tous les $|t_1-t_2|<\delta$ tels que $t_1, t_2 \in [0, T]$ l'on ait l'inégalité

$$(1-\varepsilon) \leqslant \left|\frac{a(x, t_1, \eta)}{a(x, t_2, \eta)}\right| \leqslant (1+\varepsilon), \qquad |\eta| \geqslant c_0$$

pour tous les $x \in \mathbf{R}^N$ à la fois. Alors, de la condition (i) il vient

$$\left|\bar{a}_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, s, \eta)\right| \leqslant c_{\alpha\beta}(1+|\eta|)^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}\left|\int_t^t |a(x, s, \eta)|\, ds\right|. \tag{2.25}$$

De la formule (1.61) et des lemmes 1.4 et 1.7, on déduit la majoration suivante pour $p(x, t, t, \eta, t_j)$:

$$\left|p_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, t, t, \eta, t_j)\right| \leqslant$$
$$\leqslant c_{\alpha\beta}(1+|\eta|)^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} f^{|\alpha|+|\beta|}\left[e^{(1-\varepsilon)\int_{t_j}^{t} b(x, t, \eta)\, ds}+(t-t_j)(1+|\eta|)^{-m_0}\right], \tag{2.26}$$

où $m_0>0$ est un nombre fixe arbitrairement grand, α et β des indices multiples quelconques.

De (2.23), (2.29) et (2.26) il vient pour $h(x, t, t; \eta, t_j)$

$$\left|h_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, t, t, \eta, t_j)\right| \leqslant$$
$$\leqslant c_{\alpha\beta}(1+|\eta|)^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} f^{|\alpha|+|\beta|}\left|\int_t^t |a(x, s, \eta)|\, ds\right|\left[e^{(1-\varepsilon)\int_{t_j}^{t} b(x, t, \eta)\, ds}+\right.$$
$$\left.+(t-t_j)(1+|\eta|)^{-m_0}\right]. \tag{2.27}$$

De (2.22) on obtient maintenant la majoration suivante pour le noyau $g_0(x, t, t_j; \eta, \tau)$:

$$\left|g_{0(\beta)}^{(\alpha)}(x, t, t_j, \eta, \tau)\right| \leqslant c_{\alpha\beta}(1+|\eta|)^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} f^{|\alpha|+|\beta|} e^{(1-\varepsilon)\int_{t}^{t_j} b(x, s, \eta)\, ds} \times$$
$$\times\left|\int_t^t |a(x, s, \eta)|\, ds\right|\left[e^{(1-\varepsilon)\int_{t_j}^{t} b(x, t, \eta)\, ds}+(t-t_j)(1+|\eta|)^{-m_0}\right], \tag{2.28}$$

où α et β sont des indices multiples quelconques, $t_j < t \leqslant t_{j+1}$*). En vertu de la formule (1.61), le symbole $p(x, t, \dot{t}, \eta, t_j)$ est égal à la somme de deux termes: $p = r + \int_{t_j}^{t} r * \Phi d\sigma$, des termes qui se majorent différemment, ce qui s'est répercuté sur la majoration (2.26).

A ces deux termes correspondent deux termes dans la fonction h (en vertu de la formule (2.23)), donc dans g_0 (cf. (2.22)). On écrira $h = \overline{h} + \overline{\overline{h}}$, où $\overline{h}$ (resp. $\overline{\overline{h}}$) est majoré par le premier (resp. le second) terme du second membre de la formule (2.27). Ceci vaut également et pour $g = \bar{g}_0 + \bar{\bar{g}}_0$, et pour (2.28). On procède ensuite comme au § 1. Posons

$$r_1(x, t; \eta, \tau) = \int_{\tau}^{t} [K_0(x, \sigma; \eta, \tau) + \bar{g}_0(x, \sigma, t_j, \eta, \tau)] e^{\int_{\sigma}^{t} a(x, s, \eta) ds} d\tau \qquad (2.29)$$

et

$$v_1(x, t) = \int e^{i(x, \eta)} r_1(x, t; \eta, \tau) \tilde{u}_0(\eta) d\eta. \qquad (2.30)$$

En portant $v_1(x, t)$ dans l'équation (2.14), on obtient (comme déjà signalé, par $\partial/\partial t$ on comprend une dérivée ordinaire si $t \neq t_j$ et $\lim_{\Delta t \to -0} \frac{v_1(t_j + \Delta t) - v_1(t_j)}{\Delta t}$ si $t = t_j$ ou, pour simplifier, on comprendra partout la dérivée à gauche):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - A(t) - H(t) Z\right) v_1(x, t) = K_0 u_0 + \overline{G}_0 u_0 + (a r_1) u_0 - (a * r_1) u_0 - H(t) Z v_1. \qquad (2.31)$$

Posons

$$-K_1 u_0 = (a r_1) u_0 - (a * r_1) u_0 \equiv -k_1 \left(\overset{2}{x}, t; \eta, \tau\right) u_0, \qquad (2.32)$$

où

$$k_1(x, t; \eta, \tau) \sim \sum_{|\alpha| = 1}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} a^{(\alpha)}(x, t, \eta) r_{1(\alpha)}(x, t; \eta, \tau) \qquad (2.33)$$

et

$$-H(t) Z v_1 \equiv -G_1 u_0 \equiv -g_1 \left(\overset{2}{x}, t, t_j, \eta, \tau\right) u_0, \qquad (2.34)$$

où

$$g_1(x, t, t_j, \eta, \tau) \sim \sum_{\alpha = 0}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} h^{(\alpha)}(x, t, \dot{t}, \eta, t_j) r_{1(\alpha)}(x, t_j; \eta, \tau) \qquad (2.35)$$

*) Dans les intégrales $\int_{t_j}^{t} b(x, t, \eta) ds = (t - t_j) b(x, t, \eta)$ de l'exposant des exponentielles des formules (2.27) et (2.28) et des formules analogues ultérieures, on peut écrire $\int_{t_j}^{t} b(x, s, \eta) ds$ si Δ est assez petit, en vertu de la condition (ii) de (2.24).

pour $t_j<t\leqslant t_{j+1}$, $j=0, 1, \ldots, n$. Définissons r_p, $p=2, 3, \ldots$ par récurrence: si r_p a déjà été défini, alors

$$k_p(x, t; \eta, \tau)\sim \sum_{|\alpha|=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} a^{(\alpha)}(x, t, \eta)\, r_{p(\alpha)}(x, t; \eta, \tau), \tag{2.36}$$

$$g_p(x, t, t_j, \eta, \tau)\sim \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} h^{(\alpha)}(x, t, t, \eta, t_j)\, r_{p(\alpha)}(x, t_j; \eta, \tau) \tag{2.37}$$

pour $t_j<t\leqslant t_{j+1}$, $j=0, 1, \ldots, n$,

$$r_{p+1}(x, t; \eta, \tau)=\int_{\tau}^{t} [k_p(x, \sigma; \eta, \tau)+\bar{g}_p(x, \sigma, t_j, \eta, \tau)]\, e^{\int_{\sigma}^{t} a(x, s, \eta)\, ds} d\sigma. \tag{2.38}$$

Etablissons les majorations nécessaires.

Lemme 2.2. *Supposons que le symbole $a(x, t, \eta)$ de l'opérateur pseudo-différentiel $A(t)$ satisfait les conditions* (i) *de* (1.30) *et* (2.24). *Alors les noyaux r_p, k_p et g_p sont de classe $C^{\infty}(\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N)$ par rapport à x et à η et sont justiciables des majorations*:

$$\left|k^{(\alpha)}_{p(\beta)}(x, t; \eta, \tau)\right|\leqslant$$

$$\leqslant c_{\alpha\beta\varepsilon}(1+|\eta|)^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} f^{|\alpha|+|\beta|} e^{(1-\varepsilon)\int_{\tau}^{t} b(x, s, \eta)\, ds} \left|a(x, t, \eta)\right| (1+$$

$$+|\eta|^{\delta-\rho} f(\chi+f\Delta)^p; \tag{2.39}$$

$$\left|\bar{g}^{(\alpha)}_{p(\beta)}(x, t, t_j, \eta, \tau)\right|\leqslant$$

$$\leqslant c_{\alpha\beta\varepsilon}(1+|\eta|)^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} f^{|\alpha|+|\beta|} e^{(1-\varepsilon)\int_{\tau}^{t_j} f(x, s, \eta)\, ds} \left|\int_{t}^{t} \left|a(x, s, \eta)\right| ds\right| e^{(1-\varepsilon)\int_{t_j}^{t} b(x, t, \eta)\, ds},$$

$$t_j<t, \quad t\leqslant t_{j+1}, \quad j=0, 1, \ldots, n; \tag{2.40}$$

$$\left|r^{(\alpha)}_{p(\beta)}(x, t; \eta, \tau)\right|\leqslant c_{\alpha\beta\varepsilon}(1+|\eta|)^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} f^{|\alpha|+|\beta|} e^{(1-\varepsilon)\int_{\tau}^{t} b(x, s, \eta)\, ds} (\chi+f\Delta)^p \tag{2.41}$$

pour tous indices multiples α et β; $\chi\equiv(1+|\eta|)^{\delta-\rho} f^2$.

Démonstration. Les majorations (2.39), (2.40) et (2.41) sont valables pour $p=0$. Supposons que (2.41) a lieu pour r_p. Alors, en vertu de (2.36) on aura pour k_p

$$\left|k^{(\alpha)}_{p(\beta)}(x, t; \eta, \tau)\right|\leqslant$$

$$\leqslant c_{\alpha\beta\varepsilon}(1+|\eta|)^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} f^{|\alpha|+|\beta|} e^{(1-\varepsilon)\int_{\tau}^{t} b(x, s, \eta)\, ds} (\chi+f\Delta)^p \left|a(x, t, \eta)\right| (1+|\eta|)^{\delta-\rho} f. \tag{2.42}$$

C.Q.F.D.

De (2.37) et (2.27) on obtient pour $\bar{g}_p(x, t, t_j, \eta, \tau)$:

$$|\bar{g}_{p\,(\beta)}^{(\alpha)}(x, t, t_j, \eta, \tau)| \leqslant$$

$$\leqslant c_{\alpha\beta\varepsilon}(1+|\eta|)^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} f^{|\alpha|+|\beta|} e^{(1-\varepsilon)\int_{t_j}^{t} b\,ds} \left| \int_t^i |a(x, s, \eta)|\,ds \right| e^{(1-\varepsilon)\int_{t_j}^{t} b(x, t, \eta)\,ds} \tag{2.43}$$

pour $t_j < t \leqslant t_{j+1}$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$, ce qui est confondu avec (2.40).

Estimons maintenant $r_{p+1}(x, t; \eta, \tau)$ à l'aide de (2.38), (2.42) et (2.43). Représentons r_{p+1} par la somme des termes $\bar{r}_{p+1}$ et $\bar{\bar{r}}_{p+1}$ et estimons chacun d'eux:

$$|\bar{r}_{p+1\,(\beta)}^{(\alpha)}(x, t; \eta, \tau)| = \left| \sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2=\alpha \\ \beta_1+\beta_2=\beta}} c_{\alpha\beta} \int_\tau^t k_{p\,(\beta_1)}^{(\alpha_1)}(x, \sigma; \eta, \tau) [e^{\int_\sigma^t a\,ds}]_{(\beta_2)}^{(\alpha_2)}\,d\sigma \right| \leqslant$$

$$\leqslant c_{\alpha\beta\varepsilon}(1+|\eta|)^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} f^{|\alpha|+|\beta|} (\chi+f\Delta)^p (1+|\eta|)^{\delta-\rho} f e^{(1-\varepsilon)\int_\tau^t b(x,s,\eta)\,ds} \int_\tau^t |a(x,\sigma,\eta)|\,d\sigma \leqslant$$

$$\leqslant c_{\alpha\beta\varepsilon_1}(1+|\eta|)^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} f^{|\alpha|+|\beta|} e^{(1-\varepsilon_1)\int_\tau^t b(x, s, \eta)\,ds} (\chi+f\Delta)^p \chi; \tag{2.44}$$

$$|\bar{\bar{r}}_{p+1\,(\beta)}^{(\alpha)}(x, t; \eta, \tau)| =$$

$$= \left| \sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2=\alpha \\ \beta_1+\beta_2=\beta}} c_{\alpha\beta} \int_\tau^t \bar{g}_{(\beta_1)}^{(\alpha_1)}(x, \sigma, t_j, \eta, \tau) [e^{\int_\sigma^t a(x, s, \eta)\,ds}]_{(\beta_2)}^{(\alpha_2)}\,d\sigma \right|. \tag{2.45}$$

Supposons que $t \in]t_j, t_{j+1}]$ et portons (2.43) dans (2.45). On obtient

$$|\bar{\bar{r}}_{p+1\,(\beta)}^{(\alpha)}(x, t, \eta, \tau)| \leqslant c_{\alpha\beta\varepsilon_1}(1+|\eta|)^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} f^{|\alpha|+|\beta|} (\chi+f\Delta)^p e^{(1-\varepsilon_1)\int_\tau^t b(x, s, \eta)\,ds} \times$$

$$\times \left\{ \left(\sum_{R=0}^{j-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} d\sigma + \int_{t_j}^{t} d\sigma \right) \left| \int_\sigma^t |a(x, s, \eta)|\,ds \right| \right\} \leqslant$$

$$\leqslant c_{\alpha\beta\varepsilon_1}(1-|\eta|)^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} f^{|\alpha|+|\beta|} (\chi+f\Delta)^p e^{(1-\varepsilon_1)\int_\tau^t b(x, s, \eta)\,ds} \left[\Delta \int_\tau^{t_j} |a(x, s, \eta)|\,ds + \right.$$

$$\left. + \int_{t_j}^{t} d\sigma \left| \int_\sigma^t |a(x, s, \eta)|\,d\sigma \right| \right] \tag{2.46}$$

Evaluons le dernier terme de (2.46) $J = \int_{t_j}^{t} d\sigma \left| \int_\sigma^t |a(x, s, \eta)|\,ds \right|$:

(i) si $t \geqslant \dot{t}$, alors

$$J \leqslant (t - t_j) \int_{t_j}^{t} |a(x, s, \eta)|\,ds. \tag{2.47}$$

(ii) si $t < \dot{t}$, alors

$$J \leqslant (t - t_j) \left(\int_{t_j}^{t} |a|\,ds + \int_t^{\dot{t}} |a|\,ds \right). \tag{2.48}$$

Faisons la substitution linéaire $s=\alpha\tau+\beta$, où $\alpha=\dfrac{t-t}{t-t_j}$, $\beta=\dfrac{t^2-t_j t}{t-t_j}$, dans la deuxième intégrale de (2.48); alors

$$(t-t_j)\int_t^t |a(x, s, \eta)|\, ds=$$

$$=(t-t)\int_{t_j}^{t} |a(x, \alpha\tau+\beta, \eta)|\, d\tau \leqslant \Delta(1+\varepsilon)\int_{t_j}^{t} |a(x, \tau, \eta)|\, d\tau,$$

car $0<t-t\leqslant\Delta$ et si Δ est assez petit, alors la condition (2.24) est remplie.

Sur (2.47), (2.48) et (2.49), on voit que

$$J\leqslant c\Delta\int_{t_j}^{t} |a(x, s, \eta)|\, ds. \tag{2.50}$$

En portant (2.50) dans (2.46), on trouve

$$|\bar{\bar{r}}^{(\alpha)}_{p+1(\beta)}(x, t; \eta, \tau)|\leqslant$$

$$\leqslant c_{\alpha\beta\varepsilon_1}(1+|\eta|)^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} f^{|\alpha|+|\beta|} e^{(1-\varepsilon_1)\int_\tau^t b(x, s, \eta)\, ds} (\chi+f\Delta)^p \Delta\int_\tau^t |a(x, s, \eta)|\, ds\leqslant$$

$$\leqslant c_{\alpha\beta\varepsilon_2}(1+|\eta|)^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} f^{|\alpha|+|\beta|} e^{(1-\varepsilon_2)\int_\tau^t b(x, s, \eta) ds} (\chi+f\Delta)^p \Delta f \tag{2.51}$$

$$(0<\varepsilon<\varepsilon_1<\varepsilon_2).$$

De (2.44) et (2.51) on déduit la majoration suivante pour r_{p+1} :

$$|r^{(\alpha)}_{p+1(\beta)}(x, t; \eta, \tau)|\leqslant$$

$$\leqslant c_{\alpha\beta\varepsilon}(1+|\eta|)^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} f^{|\alpha|+|\beta|} e^{(1-\varepsilon)\int_\tau^t b(x, s, \eta)\, ds} (\chi+f\Delta)^{p+1}, \tag{2.52}$$

ce qui est confondu avec (2.41) pour $p+1$. Le lemme est prouvé.

Désignons

$$r(x, t; \eta, \tau)=\sum_{p=0}^{n} r_p(x, t; \eta, \tau). \tag{2.53}$$

Puisque chaque $v_p(x, t)=\int e^{i(x, \eta)} r_p(x, t; \eta, \tau)\, \tilde{u}_0(\eta)\, d\eta$ est solution de l'équation

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-A(t)-H(t)Z\right)v_p=K_{p-1}u_0+\bar{G}_{p-1}u_0-K_p u_0-G_p u_0, \quad p>0, \tag{2.54}$$

il vient que

$$v(x, t)=\sum_{p=0}^{n} v_p(x, t)=\int e^{i(x, \eta)} r(x, t; \eta, \tau)\, \tilde{u}_0(\eta)\, d\eta \tag{2.55}$$

est solution de l'équation

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-A(t)-H(t)Z\right)v(x, t)=-K_n u_0-G_n u_0-\left(\sum_{p=0}^{n-1}\bar{\bar{G}}_p\right)u_0\equiv D_n u_0.$$

Le noyau $d_n(x, t, t_j, \eta, \tau)$ de l'opérateur D_n est égal à

$$d_n(x, t, t_j, \eta, \tau) = -k_n(x, t, \eta, \tau) - \bar{g}_n(x, t, t_j, \eta, \tau) - \\ - \sum_{p=0}^{n} \bar{\bar{g}}_p(x, t, t_j, \eta, \tau) - d_0(x, t, \eta, \tau), \qquad (2.57)$$

où les noyaux k et g sont définis par les formules (2.36) et (2.37) respectivement et d_0 est une fonction de $S^{-\infty}_{\rho',\delta'}$ (qui apparaît dans (2.57) à la suite du rejet des restes lors de la définition des fonctions k_p et g_p).

Lemme 2.3. *Quel que soit $n \geqslant 0$, les noyaux $d_n(x, t, t_j, \eta, \tau)$ sont de classe $C^\infty(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)$ par rapport à x et à η. Pour tout $\nu > 0$ les noyaux d_n, $n \geqslant n_0(\nu)$, vérifient la majoration*

$$\left| d^{(\alpha)}_{n(\beta)}(x, t, t_j, \eta, \tau) \right| \leqslant c_{\alpha\beta n\nu}(1+\eta)^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} f^{|\alpha|+|\beta|}(1+|\eta|)^{-\nu} \qquad (2.58)$$

pour $m_1 \geqslant \dfrac{\rho-\delta}{2}$, où α et β sont des indices multiples; la majoration (2.58) est uniforme en $(x, \eta) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$ et $t, t_j, t, \tau \in [0, T]$.

Démonstration. La première proposition du lemme résulte immédiatement de la formule (2.57) et de la définition des fonctions figurant dans le second membre de cette formule. Etablissons la majoration (2.58). Considérons de nouveau (2.57). La majoration (2.58) est valable pour α_0 par définition de la classe $S^{-\infty}_{\rho',\delta'}$. Considérons les termes $\bar{\bar{g}}_p(x, t, t_j, \eta, \tau)$. D'après (2.37) et les majorations de $\bar{\bar{h}}^{(\alpha)}_{(\beta)}$ et $r^{(\alpha)}_{p(\beta)}$ on a

$$\left| \bar{\bar{g}}^{(\alpha)}_{p(\beta)}(x, t, t_j, \eta, \tau) \right| \leqslant c_{\alpha\beta}(1+|\eta|)^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} f^{|\alpha|+|\beta|} \times \\ \times \left| \int_t^t |a(x, s, \eta)|\, ds \right| (t-t_j)\,(1+|\eta|)^{-m_0} e^{(1-\varepsilon)\int_{t_j}^{t} b\, ds} (\chi + f\Delta)^p. \qquad (2.59)$$

Soit $t \in [\tau, t_1]$. En vertu de (2.37) et (2.38), on a $\bar{g}_p(x, t, \tau, \eta, \tau) \equiv 0$, $\bar{\bar{g}}_p(x, t, \tau, \eta, \tau) \equiv 0$ si $p \geqslant 1$. Donc, si $t \in [\tau, t_1]$, il faut estimer seulement $\bar{\bar{g}}_0(x, t, \tau, \eta, \tau)$; de (2.59), on obtient pour $t_j = 0$ et $p = 0$

$$\left| \bar{\bar{g}}^{(\alpha)}_{0(\beta)}(x, t, \tau, \eta, \tau) \right| \leqslant \\ \leqslant c_{\alpha\beta}(1+|\eta|)^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} f^{|\alpha|+|\beta|} \int_{\tau}^{t_1} |a(x, s, \eta)|\, ds\, (t-\tau)(1+|\eta|)^{-m_0}. \qquad (2.60)$$

Le nombre m_0 de la majoration (2.60) pouvant être choisi arbitrairement grand, de (2.60) et de (i), (1.30), on déduit la majoration (2.58) pour $\bar{\bar{g}}^{(\alpha)}_{0(\beta)}$. Comme tous les $\bar{g}_p \equiv 0$ pour $p \geqslant 1$ et $t \in [\tau, t_1]$, le lemme 2.2 entraîne immédiatement la majoration suivante :

$$\left| k^{(\alpha)}_{n(\beta)}(x, t; \eta, \tau) \right| \leqslant \\ \leqslant c_{\alpha\beta n\varepsilon}(1+|\eta|)^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} f^{|\alpha|+|\beta|} e^{(1-\varepsilon)\int_{\tau}^{t} b(x, s, \eta)\, ds} |a(x, t, \eta)| \times \\ \times (\chi + f\Delta)\chi^{n-1}(1+|\eta|)^{\delta-\rho} f \qquad (2.61)$$

pour $t \in [\tau, t_1]$. De là, de (i) de (1.30) et de la majoration de χ, on déduit que k_n satisfait la majoration (2.58) si n est assez grand, $n > n_0(\nu)$. Donc, on a établi la majoration (2.58) pour $d_n(x, t; t_j, \eta, \tau)$ pour $t \in [\tau, t_1]$. Supposons maintenant que $t \in [t_1, \tau]$. On voit que la formule (2.59) pour $p \in [1, n]$ et les formules (2.39) et (2.40) pour $p = n$ contiennent toutes les termes

$$e^{(1-\varepsilon)\int_t^t b(x,s,\eta)\,ds}(\chi + f\Delta)^p \leqslant 2^p e^{(1-\varepsilon)\int_t^t b\,ds}[\chi^p + (f\Delta)^p]. \tag{2.62}$$

Evaluons l'expression $J = e^{(1-\varepsilon)\int_t^t b\,ds}(f\Delta)^p$. Comme $t \geqslant t_1$, alors $0 \leqslant \Delta \leqslant t - \tau$, donc (sans nuire à la généralité on peut admettre que tous les $\Delta t_j = \Delta$)

$$\Delta \leqslant \min_{\tau \leqslant s \leqslant t} \frac{1}{|b(x, s, \eta)|} \left| \int_\tau^t b(x, s, \eta)\,ds \right|,$$

et par suite

$$J = e^{(1-\varepsilon)\int_t^t b(x,s,\tau)\,ds} f^p \Delta^p \leqslant e^{(1-\varepsilon)\int_t^t b\,ds} \left| \int_\tau^t b\,ds \right|^p \left[\frac{f}{\min_s |b|} \right]^p \leqslant$$

$$\leqslant c(\varepsilon_1, p)\, e^{(1-\varepsilon_1)\int_t^t b\,ds} \left[\frac{f}{\min_s |b|} \right]^p. \tag{2.63}$$

Dorénavant nous renforcerons la condition (iii) de (1.30), plus exactement, nous exigerons que

$$b(x, t, \xi) \leqslant -c|\xi|^{m_1}, \quad m_1 > 0, \ |\xi| \geqslant c_0, \quad (x, t) \in \mathbf{R}^N \times [0, T]. \tag{2.64}$$

Alors

$$\frac{f}{\min_s |b|} \leqslant c|\eta|^{\frac{\rho-\delta}{2} - \varepsilon_0 - m_1}; \quad 0 < \rho - \delta \leqslant 1,$$

donc, si $m_1 \geqslant \dfrac{\rho - \delta}{2}$ $\left(\text{il suffit que } m_1 \geqslant \dfrac{1}{2}\right)$, alors

$$\frac{f}{\min_s |b|} \leqslant c|\eta|^{-\nu}, \quad \varepsilon_0 > 0, \quad |\eta| \geqslant c_0. \tag{2.65}$$

De (2.63) et (2.65), il vient que

$$J \leqslant c e^{(1-\varepsilon)\int_t^t b\,ds}(1 + |\eta|)^{-\nu} \tag{2.66}$$

pour tout $\nu > 0$ si p est assez grand. Vu que la formule (2.59) contient le terme $(1 + |\eta|)^{-m_0}$, où $m_0 > 0$ peut être choisi aussi grand que l'on veut, et

que dans les majorations (2.39) et (2.40) il faut poser $n \geqslant n_0(\nu)$, où $n_0(\nu)$ est assez grand, on voit, en appliquant (2.66) et la majoration de χ, que les noyaux d_n, $n \geqslant n_0(\nu)$ satisfont la majoration (2.58). Ce qui prouve le lemme.

Lemme 2.4. *Les noyaux* $r_p(x, t; \eta, \tau)$ *et* $d_p(x, t; t_j, \eta, \tau)$, $p \geqslant 0$, *tendent lorsque* $\Delta \to 0$ *vers les noyaux* $\overset{\circ}{r}_p(x, t; \eta, \tau)$ *et* $\overset{\circ}{d}_p(x, t; \eta, \tau)$ *correspondant au problème de Cauchy construits au* § 1, *la convergence étant uniforme en* τ, $t \in [0, T]$ *et en* $t \in [t_j, t_{j+1}]$.

Démonstration. Raisonnons par récurrence. Pour $p=0$

$$r_0(x, t; \eta, \tau) \equiv \overset{\circ}{r}_0(x, t; \eta, \tau)$$

par construction. Supposons que la proposition du lemme est vraie pour r_p. Alors, d'après la formule (2.36), $k_p \to \overset{\circ}{k}_p$ lorsque $\Delta \to 0$ uniformément en τ, t, i, t_j, et, de plus, les majorations (2.39) et (2.63) nous disent que $k_{p(\beta)}^{(\alpha)}$ admet un majorant pour les Δ assez petits :

$$|k_{p(\beta)}^{(\alpha)}| \leqslant c_{\alpha\beta}(1+|\eta|)^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} f^{|\alpha|+|\beta|} |a(x, t, \eta)| (1+|\eta|)^{\delta-\rho} f^2 \chi^p, \quad p=0, 1, \ldots . \tag{2.67}$$

Par ailleurs, grâce à (2.40) et (2.63), on a

$$|\bar{g}_{p(\beta)}^{(\alpha)}| \leqslant c_{\alpha\beta}(1+|\eta|)^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} f^{|\alpha|+|\beta|} \chi^p f \max_{s \in [0, T]} |a(x, s, \eta)| \Delta, \quad p=0, 1, \ldots . \tag{2.68}$$

D'où $\bar{g}_{p(\beta)}^{(\alpha)} \to 0$ lorsque $\Delta \to 0$ uniformément en τ, t, i, $t_j \in [0, T]$, $x \in \mathbf{R}^N$, et uniformément en $\chi \in \mathbf{R}^N$ si p est assez grand. D'après ce qui a été dit sur les fonctions $k_p(x, t; \eta, \tau)$ et $\bar{g}_p(x, t, t_j, \eta_0, \tau)$ et en tenant compte de la formule (2.38), on voit que $r_{p+1} \to \overset{\circ}{r}_{p+1}$ lorsque $\Delta \to 0$ uniformément en τ, t, t_j, t. Ce qui prouve le lemme pour les noyaux $r_p(x, t; \eta, \tau)$. Grâce aux formules (2.57), (2.37) et (2.28), on s'assure maintenant que $\bar{g}_{p(\beta)}^{(\alpha)} \to 0$ et $d_p \to \overset{\circ}{d}_p$ lorsque $\Delta \to 0$ uniformément en τ, t, t, t_j et $(x, \eta) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$. Ce qui prouve le lemme 2.4.

2. Dans ce numéro on se propose de construire le symbole $p_1(x, t, \eta, \tau, \Delta)$ du problème (2.14) et de démontrer le théorème d'existence du T-produit. Soient donnée une subdivision de l'intervalle $[\tau, \mathscr{T}] \subset [0, T]$ et $\Delta = \max_{0 \leqslant j \leqslant n} (t_{j+1} - t_j)$. Considérons l'équation intégrale

$$p_1(x, t; \eta, \tau) = r(x, t; \eta, \tau) + \int_\tau^t p_1(x, t; \eta, \sigma) * m(x, \sigma, t_j, \eta, \tau)\, d\sigma ; \tag{2.69}$$

où $r(x, t; \eta, \tau)$ est défini par la formule (2.53) et $m = -d_n$ par la formule (2.57). La fonction $r(x, t; \eta, \tau)$ est de classe $C^\infty(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)$ par rapport à x et à η et est continue en τ et en $t \in [0, T]$; le noyau $m(x, \sigma, t_j, \eta, \tau)$ de

l'équation intégrale (2.69) est de classe $C^\infty(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)$ par rapport à x et η et est continu par morceaux en τ et en $t \in [0, T]$. Ces propriétés et les majorations établies dans les lemmes 2.2 et 2.3 pour r et m nous disent que l'équation intégrale (2.69) est justiciable du lemme 1.7. Donc, l'équation (2.69) possède la résolvante.

$$\Phi_1(x, t, t_j, \eta, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} m_n(x, t, t_j, \eta, \tau), \tag{2.70}$$

où

$$m_n(x, t, t_j, \eta, \tau) = \int_\tau^t m_{n-1}(t, s) * m(s, \tau)\, ds = \int_\tau^t m(t, s) * m_{n-1}(s, \tau)\, ds. \tag{2.71}$$

Pour $n \geqslant 2$ tous les m_n sont des fonctions continues en τ, $t \in [0, T]$. La convergence de la série (2.70) est uniforme en $(x, \eta) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$ et t, t_j, $\tau \in [0, T]$ (Δ est supposé assez petit et fixe). La résolvante $\Phi_1(x, t, t_j, \eta, \tau)$ est de classe $C^\infty(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)$ par rapport à x et à η et satisfait la majoration

$$\left|\Phi_{1\,(\beta)}^{(\alpha)}(x, t, t_j, \eta, \tau)\right| \leqslant c_{\alpha\beta}(1 + |\eta|)^{-p-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} f^{|\alpha|+|\beta|} e^{c(t-\tau)} \tag{2.72}$$

pour tous indices multiples α et β, $p > 0$ pouvant être choisi arbitrairement grand.

Comme prouvé au lemme 1.7, l'équation intégrale (2.69) admet une solution unique de la forme

$$p_1(x, t; \eta, \tau) = r(x, t; \eta, \tau) + \int_\tau^t r(x, t; \eta, \tau) * \Phi_1(x, \sigma; \eta, \tau)\, d\sigma. \tag{2.73}$$

Lemme 2.5. *Supposons que le symbole $a(x, t, \eta)$ de l'opérateur pseudo-différentiel $A(t)$ satisfait les conditions* (1.30), (2.24) *et* $m_1 > \dfrac{\rho - \delta}{2}$. *Le problème de Cauchy* (2.14) *admet alors un symbole et un seul défini par la formule* (2.73).

Démonstration. Il nous faut prouver que la solution $u_1(x, t)$ du problème (2.14) est telle que $u_1(x, t) \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^N)$ comme fonction de x se représente par

$$u_1(x, t) = \int e^{i(x, \eta)} p_1(x, t; \eta, \tau)\, \tilde{u}_0(\eta)\, d\eta. \tag{2.74}$$

Que $u_1(x, t) \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^N)$ pour tout $t \geqslant \tau$ fixe résulte directement de (2.74) et (2.73). Par ailleurs, de (2.74) il vient que $u_1(x, t)$ est une fonction continue en τ et $t \in [0, T]$, car ceci est valable pour p_1 d'après (2.73). En reprenant *ad litteram* les raisonnements du théorème 2.1, on s'assure que $\lim_{t \to \tau} u_1(x, t) = u_0(x)$.

Assurons-nous que (2.74) est solution de l'équation (2.14). On a

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-A(t)-H(t)Z\right)u_1(x,t)=$$

$$=\int e^{i(x,\eta)}\tilde{u}_0(\eta)\left[\frac{\partial p_1}{\partial t}-a(x,t,\eta)*p_1(x,t;\eta,\tau)-\right.$$

$$\left.-h(x,t,t,\eta,\tau_j)*p_1(x,t_j;\eta,\tau)\right]d\eta=0, \qquad (2.75)$$

où $\frac{\partial}{\partial t}=\lim\limits_{\Delta t\to-0}\frac{p_1(\ldots,t+\Delta t,\ldots)-p_1(\ldots,t,\ldots)}{\Delta t}$, car de même que dans le théorème 2.1 on a les égalités suivantes qui résultent de la formule (2.73) et des propriétés des fonctions r et Φ_1 (l'important c'est que r soit continu par rapport à t, $\tau\in[0,T]$ et que $\Phi_1(x,\sigma;\eta,\tau)$ soit continue par morceaux en σ, ce qui fera apparaître le terme $\Phi_1(x,t;\eta,\tau)$ dans l'expression de la dérivée à gauche par rapport à t):

$$\frac{\partial p_1}{\partial t}-a*p_1-h*p_1=$$

$$=\left(\frac{\partial r}{\partial t}-a*r-h*r\right)+\Phi_1+\int_\tau^t\left(\frac{\partial r}{\partial t}-a*r-h*r\right)*\Phi_1 f\sigma=$$

$$=-m_1+\sum_{n=1}^{\infty}m_n-\int_\tau^t m_1*\sum_{n=1}^{\infty}m_n d\sigma=0. \qquad (2.76)$$

On remarquera que la dernière égalité est réalisée identiquement en t, car pour $n\geqslant 2$ tous les m_n sont des fonctions continues en t et en τ. Ce qui prouve que $p_1(x,t;\eta,\tau)$ est le symbole du problème de Cauchy (2.14) Montrons l'unicité de ce symbole. Supposons qu'il existe un autre symbole $p_2(x,t;\eta,\tau)$ tel que

$$u_2(x,t)=\int e^{i(x,\eta)}p_2(x,t;\eta,\tau)\,\tilde{u}_0(\eta)\,d\eta \qquad (2.77)$$

soit aussi solution du problème de Cauchy (2.14). Considérons l'intervalle $[t,\tau_1]$. Sur cet intervalle u_1 et u_2 sont solutions du problème

$$\begin{cases}\left(\frac{\partial}{\partial t}-A(t)\right)u(x,t)=H(t)Zu(x,t)=H(t)u_0\equiv F_1,\\ u|_{t=\tau}=u_0.\end{cases} \qquad (2.78)$$

Vu que F_1 est la même pour les fonctions u_1 et u_2 et que l'opérateur $A(t)$ est justiciable du théorème d'unicité, il vient que $u_1(x,t)\equiv u_2(x,t)$, $x\in\mathbf{R}^N$, $t\in[\tau,t_1]$. Considérons l'intervalle $[t_1,t_2]$ et sur cet intervalle le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - A(t)\right) u(x, t) = H(t)\, u_1(t_1) = H(t)\, u_2(t_1) = F_2, \\ u|_{t=t_1} = u_1(x, t_1) = u_2(x, t_1). \end{cases} \tag{2.79}$$

Comme précédemment, on conclut que $u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$, $x \in \mathbf{R}^N$, $t \in [t_1, t_2]$. En poursuivant ainsi on obtient

$$u_1(x, t) \equiv u_2(x, t), \quad x \in \mathbf{R}^N, \ t \in [\tau, \mathscr{T}]. \tag{2.80}$$

De (2.80), il s'ensuit que

$$p_1(x, t; \eta, \tau) \equiv p_2(x, t; \eta, \tau). \tag{2.81}$$

Montrons en fait que si $f(x, \xi) \in L_1(\mathbf{R}^N)$ comme fonction de ξ et si

$$\int e^{i(x, \xi)} f(x, \xi)\, \tilde{u}_0(\xi)\, d\xi = 0 \quad \text{pour tout } u_0 \in \mathscr{S}, \tag{2.82}$$

alors $f(x, \xi) \equiv 0$. On a $0 = \int e^{i(x, \xi)} f(x, \xi)\, \tilde{u}_0(\xi)\, d\xi = \int u_0(y)\, \tilde{f}(x, y - x)\, dy$, où la transformée de Fourier est prise par rapport au deuxième argument de f. Figeons un $x_0 \in \mathbf{R}^N$ et désignons $\tilde{f}(x_0, \cdot)(y - x_0) \equiv \psi(y)$. Comme $\int u_0(y)\, \psi(y)\, dy = 0$ pour tout $u_0 \in \mathscr{S}$, alors $\psi(y) = 0$, c'est-à-dire que $\tilde{f}(x_0, z) = 0$, donc $f(x_0, z) = 0$ pour tous x_0 et $z \in \mathbf{R}^N$. Ce qui prouve le lemme.

Tout au début du § 2 nous avons introduit la fonction $w(x, t)$ (cf. (2.6))

$$w(x, t) = L(\Delta)\, u_0 = e^{[A(t_n)]\, \Delta t_n} \ldots e^{[A(t_0)]\, \Delta t_0} u_0. \tag{2.83}$$

Nous avons vu dans (2.12) et (2.13) que cette fonction était solution du problème (2.14), donc d'après le lemme 2.5 elle peut encore être mise sous la forme

$$w(x, t) = p_1\left(\overset{2}{x}, t, \overset{1}{\eta}, \tau\right) u_0 = P_1 u_0. \tag{2.84}$$

Par conséquent,

$$L(\Delta) = P_1, \tag{2.85}$$

où P_1 est un opérateur de $\mathscr{S}$ dans $\mathscr{S}$, dont le symbole est le noyau $p_1(x, t; \eta, \tau)$. Nous pouvons maintenant entamer la démonstration du théorème fondamental de ce numéro.

Théorème 2.1. *Supposons que le symbole de l'opérateur pseudo-différentiel $A(t)$ vérifie les conditions* (1.30), (2.24) *et* $m_1 \geqslant \frac{\rho - \delta}{2}$. *Alors existe le T-produit d'opérateurs*

$$T - e^{\int_\tau^{\mathscr{T}} [A(s)]\, ds} = \lim_{\Delta \to 0} e^{[A(t_n)]\, \Delta t_n} \ldots e^{[A(t_0)]\, \Delta t_0}. \tag{2.86}$$

Cette limite est égale à l'opérateur $u(\mathscr{T}, \tau)$ (cf. § 1).

Démonstration. Comme

$$L(\Delta)\, u_0 = \int e^{i(x, \eta)} p_1(x, t, \eta, \tau, \Delta)\, \tilde{u}_0(\eta)\, d\eta, \tag{2.87}$$

il faut prouver qu'existe

$$\lim_{\Delta\to 0}\int e^{i(x,\eta)}p_1(x,t,\eta,\tau,\Delta)\,\tilde{u}_0(\eta)\,d\eta \tag{2.88}$$

indépendamment de la subdivision de l'intervalle $[\tau, \mathscr{T}]$ par les points t_j et du choix des points $\dot{t}_j\in[t_j, t_{j+1}]$. En vertu de (2.73),

$$P_1(x,t;\eta,\tau,\Delta)=r(x,t;\eta,\tau)+\int_\tau^t r(x,t;\eta,\sigma)*\Phi_1(x,\sigma;\eta,\tau)\,d\sigma. \tag{2.89}$$

Le lemme 2.4 nous dit que $r(x, t; \eta, \tau)\to\overset{\circ}{r}(x, t; \eta,\tau)$ lorsque $\Delta\to 0$ uniformément en $t, \tau, t_j, \dot{t}_j\in[0, T]$ et $\overset{\circ}{m}(x, t; \eta, \tau)\to\overset{\circ}{m}(x, t; \eta, \tau)$ lorsque $\Delta\to 0$ uniformément en $t, \tau, t_j, \dot{t}_j\in[0, T]$ et $(x, \eta)\in\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N$. Ceci entraîne la convergence immédiate de la résolvante $\Phi_1(x, \sigma; \eta, \tau)$ définie par la formule (2.70) vers la résolvante $\Phi(x, \sigma; \eta, \tau)$ correspondant au problème (1.1) et définie dans (1.52). De là, de la définition de l'opération $*$ et des majorations (2.41) et (2.72) il résulte qu'on peut passer à la limite pour $\Delta\to 0$ dans l'égalité (2.89). On trouve

$$\lim_{\Delta\to 0} p_1(x, t; \eta, \tau, \Delta)=p(x, t; \eta, \tau), \tag{2.90}$$

où $p(x, t; \eta, \tau)$ est le symbole de l'opérateur $u(x,\tau)$ correspondant au problème de Cauchy (1.1). Les majorations (2.41), (2.72) et le théorème de Lebesgue autorisent le passage à la limite sous le signe d'intégration dans (2.88). On a donc prouvé qu'existe

$$\lim_{\Delta\to 0}\int e^{i(x,\eta)}p_1(x,t;\eta,\tau,\Delta)\,\tilde{u}_0(\eta)\,d\eta=$$
$$=\int e^{i(x,\eta)}p(x,t;\eta,\tau)\,\tilde{u}_0(\eta)\,d\eta \tag{2.91}$$

et cette limite ne dépend ni de la subdivision de l'intervalle $[\tau, \mathscr{T}]$. ni du choix des points $\dot{t}_j\in[t_j, t_{j+1}]$. Cette limite est uniforme en t pris dans un intervalle $[0, T]$ fini quelconque. Désignons l'intégrale du premier membre de (2.91) par $v(x, t, \Delta)$ et celle du second par $v_0(x, t)$. Nous allons montrer que $v(x, t, \Delta)\to v_0(x, t)$ lorsque $\Delta\to 0$ au sens de la convergence dans l'espace $\mathscr{S}(\mathbf{R}^N)$ et uniformément en $t\in[\tau, \mathscr{T}]$. Pour cela il nous suffit de prouver deux faits:

(i) pour tout indice multiple α et tout compact $K\subset\mathbf{R}^N$

$$v^{(\alpha)}(x, t, \Delta)\to v_0^{(\alpha)}(x, t) \tag{2.92}$$

uniformément sur K;

(ii) pour tous α et β

$$\left|x^{(\beta)}v^{(\alpha)}(x, t, \Delta)\right|\leqslant c_{\alpha\beta} \tag{2.93}$$

pour tous les $\Delta>0$ assez petits et tous les $x\in\mathbf{R}^N$ à la fois.

Prouvons (i). On a

$$\left|v^{(\alpha)}(x, t, \Delta) - v_0^{(\alpha)}(x, t)\right| =$$

$$= \left|\int e^{i(x,\eta)} \sum_{\alpha_1+\alpha_2=\alpha} c_{\alpha_1,\alpha_2} \eta^{\alpha_1} [P_{1(\alpha_2)}(x, t, \eta, \tau, \Delta) - P_{(\alpha_2)}(x, t; \eta, \tau)] \tilde{u}_0(\eta)\, d\eta\right|.$$

Le lemme 2.4 et les raisonnements qui nous ont conduits à la formule (2.89) nous disent que

$$P_{1(\alpha_2)}(x, t, \eta, \tau, \Delta) \to p_{(\alpha_2)}(x, t; \eta, \tau) \quad \text{lorsque} \quad \Delta \to 0 \tag{2.94}$$

et admet un majorant borné par rapport à toutes les variables sauf η par rapport à laquelle il croît à l'infini moins vite qu'une puissance $\leqslant \frac{\delta+\rho}{2}|\alpha_2|$ de η. Comme $\tilde{u}_0(\eta)$ décroît à l'infini plus vite que toute puissance de η, on peut d'après le théorème de Lebesgue passer à la limite lorsque $\Delta \to 0$ sous le signe d'intégration. On a ainsi prouvé (2.92) (voire uniformément en $x \in \mathbf{R}^N$).

Prouvons (ii). Une intégration par parties nous donne

$$\left|x^{(\beta)} v^{(\alpha)}(x, t, \Delta)\right| =$$

$$= \left|\int e^{i(x,\eta)} \sum_{\alpha_1+\alpha_2=\alpha} c_{\alpha_1\alpha_2} [\eta^{(\alpha_1)} p_{1(\alpha_2)}(x, t, \eta, \tau, \Delta)\, \tilde{u}_0(\eta)]^{(\beta)} d\eta\right| \leqslant$$

$$\leqslant c_{\alpha\beta} \int \sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2=\alpha \\ \beta_1+\beta_2=\beta}} \left|p_{1(\alpha_2)}^{(\beta_2)}(x, t, \eta, \tau, \Delta)(\eta^{(\alpha_1)} \tilde{u}_0(\eta))^{(\beta_1)}\right| d\eta \leqslant c_{\alpha\beta}, \tag{2.95}$$

car $p_{1(\alpha_2)}^{(\beta_2)}$ est borné par rapport à toutes les variables sauf η par rapport à laquelle il croît à l'infini moins vite qu'une puissance $\leqslant \delta|\alpha_2| - \rho|\beta_2| + |\alpha_2+\beta_2|\left(\frac{\rho-\delta}{2} - \varepsilon\right)$, alors que $\tilde{u}_0(\eta)$ décroît à l'infini plus vite que toute puissance de η. On a ainsi prouvé que

$$T - e^{\int_\tau^{\mathscr{T}} [\![A(s)]\!]\, ds} = \lim_{\Delta\to 0} e^{[A(t_n)]\Delta t_n} \cdot \ldots \cdot e^{[A(t_0)]\Delta t_0} = U(\mathscr{T}, \tau) \tag{2.96}$$

au sens de la convergence simple des opérateurs dans $\mathscr{S}(\mathbf{R}^N)$ uniformément en τ et t pris dans tout intervalle fini $0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant \mathscr{T} \leqslant T$. Ce qui prouve le théorème 2.2.

§ 3. Suppression des crochets autonomes

Parallèlement au produit des opérateurs $e^{[\![A(x, t_N, D)]\!]\Delta t_N} \times \ldots \times e^{[\![A(x, t_1, D)]\!]\Delta t_1}$ on peut envisager un produit de la forme $\prod_{i=1}^{N} e^{A\left(x, t_i, \frac{\eta}{D}\right)\Delta t_i}$.

Ces opérateurs sont généralement différents, mais, lorsque $\max_{1\leqslant i\leqslant N}\Delta t_i\to 0$, les opérateurs limites, s'ils existent, peuvent être confondus. Désignons les opérateurs limites respectifs par $e^{\int_{t_0}^{\tau}[\![A(x,\tau,D)]\!]\,d\tau}$ et $e^{\int_{t_0}^{\tau}A(x,\tau,D)\,d\tau}$. Il s'avère que l'existence du T-produit d'opérateurs hypoelliptiques entraîne l'égalité

$$e^{\int_{t_0}^{\tau}[\![A(x,\tau,D)]\!]\,d\tau}=e^{\int_{t_0}^{\tau}A(x,\tau,D)\,d\tau} \tag{3.1}$$

La dernière relation joue un rôle important, car elle permet de ramener le T-produit à une intégrale de Feynman et constitue le premier pas dans l'introduction d'une mesure opératorielle dans le T-produit.

Dans ce paragraphe nous prouverons la formule (3.1). Nous serons très brefs, car les raisonnements sont exactement les mêmes que ceux utilisés au § 2.

Considérons une subdivision de l'intervalle $[\tau,\ \mathscr{T}]$: t_j, $j=0,\ 1,\ldots,\ n+1$, $t_0=\tau$, $t_{n+1}=\mathscr{T}$, $t_j\in[t_j,\ t_{j+1}]$ et pour tout $t\in]t_j,\ t_{j+1}]$, $j=0,\ 1,\ldots,n$, considérons la fonction

$$v(x,\ t)=e^{a(t_j)(t-t_j)}\cdot e^{a(t_{j-1})\Delta t_{j-1}}\cdot\ldots\cdot e^{a(t_0)\Delta t_0}u_0 \tag{3.2}$$

ou

$$v(x,\ t)=e^{a(x,\ t_j,\ \eta)(t-t_j)}\cdot v(x,\ t_j),\qquad t\in]t_j,\ t_{j+1}]; \tag{3.3}$$

$a(t_j)$ est la notation abrégée de la fonction $a(x,\ t_j,\ \eta)$ dont le point t_i de l'intervalle $[t_i,\ t_{i+1}]$ a été gelé. Calculons

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-A(t)\right)v(x,\ t)=$$

$$=a(t_j)\,e^{a(t_j)(t-t_j)}v(x,\ t_j)-(a*e^{a(t_j)(t-t_j)})\,v(x,\ t_j)=$$

$$=[a(t_j)\,e^{a(t_j)(t-t_j)}a*e^{a(t_j)(t-t_j)}]\,v(x,\ t_j)\equiv H_1(t)\,Zv \tag{3.4}$$

pour $t\in]t_j,\ t_{j+1}]$, $j=0,\ 1,\ldots,\ n$, où Z est l'opérateur de translation défini au § 2 et l'opérateur H_1 a, sur $]t_j,\ t_{j+1}]$, le noyau

$$h_1(x,\ t,\ t,\ \eta,\ t_j)=[a(t)-a(t)]\,e^{a(t)(t-t_j)}+$$

$$+[a(t)\,e^{a(t)(t-t_j)}-a*e^{a(t)(t-t_j)}]\sim[a(x,\ t,\ \eta)-$$

$$-a(x,\ t,\ \eta)]\,e^{a(t)(t-t_j)}\sum_{|\alpha|=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha}\,a^{(\alpha)}(x,\ t,\ \eta)\,(e^{a(t)(t-t_j)})_{(\alpha)}. \tag{3.5}$$

De (2.68), grâce à (2.24) et (1.30), on déduit la majoration suivante pour le noyau h_1 sur l'intervalle $[t_j, t_{j+1}]$:

$$\left|h_{1(\beta)}^{(\alpha)}\right| \leqslant c_{\alpha\beta}\,(1+|\eta|)^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} f^{|\alpha|+|\beta|} \times$$

$$\times e^{(1-\varepsilon)\,b(x,\,t,\,\eta)\,(t-t_j)} \left|a(x,\,t,\,\eta)\right| (1+|\eta|)^{\delta-\rho} \Delta \max_{t_j \leqslant s \leqslant t_{j+1}} \left|a(x,\,s,\,\eta)\right|,$$

$$\Delta = \max_{0 \leqslant j \leqslant n} (t_{j+1} - t_j). \tag{3.6}$$

Considérons maintenant le problème

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial t} - A(t) - H_1(t)\,Z\right) u(x,\,t) = 0 \\ u\big|_{t=\tau} = u_0(x) \end{cases} \tag{3.7}$$

sur l'intervalle $t \in [\tau, \mathscr{T}]$, où par $\dfrac{\partial}{\partial t}$ on comprend $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{u(x,\,t+\Delta t) - u(x,\,t)}{\Delta t}$.

Construisons le symbole $p_2(x, t, \eta, \tau, \Delta)$ du problème (3.7) comme au § 2. Commençons par

$$r_0(x,\,t;\,\eta,\,\tau) = e^{\int_\tau^t a(x,\,s,\,\eta)\,ds}, \qquad v_0(x,\,t) = r_0\left(\begin{matrix}2\\x,\,t;\end{matrix}\ \begin{matrix}1\\\eta,\,\tau\end{matrix}\right) u_0. \tag{3.8}$$

En portant $v_0(x, t)$ dans (3.7), on trouve

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - A(t)\right) v_0 - H_1 Z v_0 = -K_0 u_0 - G_0 u_0, \tag{3.9}$$

où les opérateurs K_0 et G_0 ont pour noyaux

$$k_0 = (x,\,t;\,\eta,\,\tau) \sim \sum_{|\alpha|=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha!}\, a^{(\alpha)}(x,\,t,\,\eta)\, r_{0(\alpha)}(x,\,t;\,\eta,\,\tau) \tag{3.10}$$

et

$$g_0(x,t,t_j,\eta,\tau) \sim \sum_{|\alpha|=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha!}\, h_1^{(\alpha)}(x,t,t,\eta,t_j)\, r_{0(\alpha)}(x,t_j;\eta,\tau) \tag{3.11}$$

pour $t \in]t_j, t_{j+1}]$. Le noyau k_0 satisfait l'ancienne majoration, quant à g_0, il s'estime comme suit:

$$\left(g_{0(\beta)}^{(\alpha)}(x,\,t,\,t_j;\,\eta,\,\tau)\right| \leqslant$$

$$\leqslant c_{\alpha\beta}\,(1+|\eta|)^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} f^{|\alpha|+|\beta|} e^{(1-\varepsilon)\int_\tau^t b(x,\,s,\,\eta)\,ds} \times$$

$$\times \left|a(x,\,t,\,\eta)\right| (1+|\eta|)^{\delta-\rho} \Delta \max_{s \in [t_j,\,t_{j+1}]} \left|a(x,\,s,\,\eta)\right|. \tag{3.12}$$

On s'est servi de la condition (2.24) et du fait que $\Delta>0$ est assez petit. Raisonnons maintenant par récurrence: si r_p a déjà été défini, alors

$$k_p(x, t; \eta, \tau)\sim \sum_{|\alpha|=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} a^{(\alpha)}(x, t, \eta)\, r_{p(\alpha)}(x, t; \eta, \tau), \tag{3.13}$$

$$g_p(x, t, t_j, \eta, \tau)\sim \sum_{|\alpha|=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} h_1^{(\alpha)}(x, t, t, \eta, t_j)\, r_{p(\alpha)}(x, t_j; \eta, \tau) \tag{3.14}$$

pour $t\in]t_j, t_{j+1}]$, $j=0, 1, \ldots, n$,

$$r_{p+1}(x, t; \eta, \tau)=\int_{\tau}^{t} [k_p(x, \sigma; \eta, \tau)+g_p(x, \sigma, t_j, \eta, \tau)]\, e^{\int_{\sigma}^{t} a(x, s, \eta) ds}\, d\sigma. \tag{3.15}$$

Lemme 3.1. *Supposons que le symbole $a(x, t, \eta)$ de l'opérateur pseudo-différentiel $A(t)$ satisfait les conditions* (1.30), (2.24). *Alors, les noyaux k_p, g_p et r_p sont de classe $C^{\infty}(\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N)$ par rapport à x et à η et ils sont justiciables des majorations*

$$\left|k_{p(\beta)}^{(\alpha)}(x, t; \eta, \tau)\right| \leqslant c_{\alpha\beta\varepsilon}(1+|\eta|)^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} f^{|\alpha|+|\beta|}\times$$

$$\times e^{(1-\varepsilon)\int_{\tau}^{t} b(x, s, \eta) ds}[(1+|\eta|)^{\delta-\rho} f^2]^p (1+\Delta \max_{\tau\leqslant s\leqslant t+\Delta} |b(x, s, \eta)|)^p \times$$

$$\times |a(x, t, \eta)|(1+|\eta|)^{\delta-\rho} f; \tag{3.16}$$

$$\left|g_{p(\beta)}^{(\alpha)}(x, t, t_j; \eta, \tau)\right| \leqslant c_{\alpha\beta\varepsilon}(1+|\eta|)^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} f^{|\alpha|+|\beta|}\times$$

$$\times e^{(1-\varepsilon)\int_{\tau}^{t} b(x, s, \eta) ds}(1+|\eta|)^{\delta-\rho}|a(x, t, \eta)|[(1+|\eta|)^{\delta-\rho} f^2]^p \times$$

$$\times (1+\Delta \max_{\tau\leqslant s\leqslant t+\Delta} |b(x, s, \eta)|)^p \Delta \max_{s\in[t_j, t_{j+1}]} |a(x, s, \eta|,$$

$$t_j\leqslant t, \quad t\leqslant t_{j+1}, \quad j=0, 1, 2, \ldots, n; \tag{3.17}$$

$$\left|r_{p(\beta)}^{(\alpha)}(x, t; \eta, \tau)\right| \leqslant c_{\alpha\beta\varepsilon}(1+|\eta|^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} f^{|\alpha|+\beta|}\times$$

$$\times e^{(1-\varepsilon)\int_{\tau}^{t} b(x, s, \eta) ds}[(1+|\eta|)^{\delta-\rho} f^2]^p (1+\Delta \max_{\tau\leqslant s\leqslant t+\Delta} |b(x, s, \eta)|)^p. \tag{3.18}$$

Démonstration. Les majorations (3.16), (3.17) et (3.18) sont valables pour $p=0$. Supposons que r_p satisfait la majoration (3.18). Alors k_p vérifie la majoration (3.16) en vertu de (3.13), (3.18) et de (1.30). La majoration (3.17) pour g_p résulte de (3.14) et (3.18). Enfin, en portant (3.16) et (3.17) dans (3.15) et en estimant l'intégrale comme dans le lemme 2.2, on obtient (3.18), puisque $\dfrac{\max_s a(x, s, \eta)}{\max_s b(x, s, \eta)}\leqslant f$ en vertu de (1.30). Ce qui prouve le lemme.

Les raisonnements ultérieurs reprennent intégralement ceux du § 2. On a ainsi prouvé le

Théorème 3.1. *Supposons que le symbole d'un opérateur pseudo-différentiel $A(t)$ vérifie les conditions* (1.30), (2.24) *et* (2.64) *avec* $m_1 \geqslant \frac{\rho-\delta}{2}$. *On a alors l'égalité opératorielle suivante*

$$\lim_{\Delta\to 0} e^{[\![A(t_n)]\!]\Delta t_N} \cdot \ldots \cdot e^{[\![A(t_0)]\!]\Delta t_0} = \lim_{\Delta\to 0} e^{a\left(\overset{2n+1}{x},\ t^n,\ \overset{2n+1}{\eta}\right)\Delta t_n} \cdot \ldots \cdot e^{a\left(\overset{2}{x},\ i_0,\ \overset{1}{\eta}\right)\Delta t_0}. \tag{3.19}$$

La limite de (3.19) *est égale à l'opérateur* $u(\mathscr{T}, \tau)$.

Par convergence des opérateurs dans (3.19), on comprend une convergence opératorielle simple dans l'espace $\mathscr{S}(\mathbf{R}^N)$ uniformément en τ et $\mathscr{T}$ tels que $0 \leqslant \tau < \mathscr{T} \leqslant T$, où T est un nombre fini quelconque. Vu que les expressions sous le signe lim de (3.19) peuvent être représentées par des sommes intégrales

$$e^{\sum_{j=0}^{n} [\![a\left(\overset{2}{x},\ i_j,\ \overset{1}{p}\right)]\!]\Delta t_j} \quad \text{et} \quad e^{\sum_{j=0}^{n} a\left(\overset{2j+2}{x},\ i_j,\ \overset{2j+1}{p}\right)\Delta t_j}.$$

la relation (3.19) peut être interprétée comme l'existence et l'égalité des intégrales suivantes :

$$e^{\int_{\tau}^{\mathscr{T}} [\![a\left(\overset{2}{x},\ s,\ \overset{1}{p}\right)]\!]\,ds} = e^{\int_{\tau}^{\mathscr{T}} a\left(\overset{1}{x},\ s,\ \overset{s-0}{p}\right)ds} \tag{3.20}$$

§ 4. *T*-produit d'opérateurs dans la représentation de l'interaction

Le T-produit d'opérateurs est généralement utilisé en électrodynamique quantique pour la représentation de l'interaction. Si un opérateur $\hat{H}_0$ est un hamiltonien libre et $\hat{H}_1$ un hamiltonien d'interaction, le T-produit des opérateurs dans la représentation de l'interaction est de la forme

$$e^{\int_{0}^{\tau} [\![H_1\left(\overset{1}{\hat{p}}(\tau),\ \overset{2}{\hat{x}}(\tau)\right)]\!]\,d\tau},$$

où les fonctions opératorielles $\hat{p}(\tau)$ et $\hat{x}(\tau)$ sont solutions du système d'équations de Heisenberg

$$\dot{x} = -\frac{\partial H_0\left(\overset{1}{p},\ \overset{2}{x}\right)}{\partial p},$$

$$\dot{p} = \frac{\partial H_0\left(\overset{1}{p},\ \overset{2}{x}\right)}{\partial x},$$

$$x(0) = x, \qquad p(0) = D.$$

Le hamiltonien $\hat{H}_1$ ne dépend généralement que de x et le problème de la suppression des crochets autonomes se résout alors trivialement. Mais

dans de nombreuses théories physiques contemporaines émergent des interactions dépendant de l'impulsion, ce qui rend nécessaire l'examen du cas général. Dans ce paragraphe on prouvera le théorème de suppression des crochets autonomes dans le T-produit dans la représentation de l'interaction, c'est-à-dire qu'on prouvera la formule

$$\overset{\tau}{\underset{e^0}{\int}} [\![H_1(\overset{1}{p}(\tau), \overset{2}{x}(\tau))]\!]\, d\tau \underset{=e^0}{\overset{t}{\int}} H_1(\overset{1-0}{p}(\tau), \overset{2}{x}(\tau))\, d\tau$$

Supposons que les opérateurs hypoelliptiques pseudo-différentiels $H_0 = h_0\left(\overset{2}{x}, \overset{1}{D}\right)$ et $H_1 = h_1\left(\overset{2}{x}, \overset{1}{D}\right)$ ne dépendent pas du temps t et que leurs symboles $h_0(x, \xi)$ et $h_1(x, \xi)$ sont respectivement de classes $S^0_{\rho,\delta}$ et $S^m_{\rho,\delta}$, $m > 0$ (cf. § 1). On admettra aussi que l'opérateur H_1 satisfait les conditions (1.30) et (2.64). Désignons par $U(t, \tau)$ l'opérateur résolvant du problème de Cauchy

$$\begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial t} - (H_1 + iH_0)u = 0, \\ u|_{t=\tau} = u_0(x), \end{gathered} \tag{4.1}$$

et par $p(x, t; \eta, \tau)$ le symbole de cet opérateur. Le théorème 1.1 affirme l'existence de $U(t, \tau)$ et de $p(x, t; \eta, \tau)$ et de plus $U(t, \tau) = e^{[H_1 + iH_0](t-\tau)}$. Des résultats du § 1 il s'ensuit que $p(x, t; \eta, \tau) \in S^0_{\rho', \delta'}$, $0 \leqslant \delta' < \rho' \leqslant 1$ pour tous les $t \geqslant \tau$ et $(x, \eta) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$, ce qui à son tour entraîne, en vertu d'un théorème de Hermander, que l'opérateur $U(t, \tau)$ peut être traité comme un opérateur de $L_2(\mathbf{R}^N)$ dans $L_2(\mathbf{R}^N)$ et de plus

$$\|U(t, \tau)\|_{L_2 \to L_2} \leqslant c_0. \tag{4.2}$$

où $c_0 > 0$ est indépendant de t, $\tau \leqslant t \leqslant \mathscr{T} < \infty$. Introduisons encore l'opérateur suivant de L_2 dans L_2 :

$$\tilde{U}(t, \tau) = e^{H_1(t-\tau)} e^{iH_0(t-\tau)}. \tag{4.3}$$

Le premier opérateur du second membre de (4.3) existe en vertu du théorème 1.1, quant au second, il est borné dans L_2, car $h_0 \in S^0_{\rho,\delta}$ (cf. plus bas (4.53) et (4.49)). Donc l'opérateur $\tilde{U}(t, \tau)$ satisfait la majoration (4.2) avec une certaine constante $\tilde{c}_0 > 0$. Considérons la subdivision de l'intervalle $[\tau, t]$ par les points t_j, $j = 0, 1, \ldots, n$: $t_0 = \tau < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = t$, $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j = \Delta = 1/n$. Posons

$$\begin{gathered} U(t_{j+1}, t_j) \equiv U_{j+1,j},\ \tilde{U}(t_{j+1}, t_j) \equiv \tilde{U}_{j+1,j}, \\ U_{j+1,k} \equiv U_{j+1,j} \cdot U_{j,j-1} \cdot \ldots \cdot U_{k+1,k}, \\ \tilde{U}_{j+1,k} \equiv \tilde{U}_{j+1,j} \cdot \tilde{U}_{j,j-1} \cdot \ldots \cdot \tilde{U}_{k+1,k}. \end{gathered} \tag{4.4}$$

On a le

Lemme 4.1.

$$\|U(t, \tau) - \tilde{U}_{n,0}\|_{L_2 \to L_2} = 0(1) \quad \textit{lorsque } n \to \infty \tag{4.5}$$

Démonstration. Le problème de Cauchy (4.1) admettant une solution unique, il vient $U(t, \tau) = U_{n,0}$, donc

$$U(t, \tau) - \tilde{U}_{n,0} = \sum_{k=1}^{n} U_{n,k}[\tilde{U}_{k,k-1} - U_{k,k-1}]\, \tilde{U}_{k-1,0}. \tag{4.6}$$

Considérons la différence des opérateurs $\tilde{U}_{k,k-1} - U_{k,k-1}$. Posons $\psi = U(t, \tau)\varphi$, $\varphi \in \mathscr{S}$. Alors $\dfrac{\partial \psi}{\partial t} = H_1 \psi + iH_0 \psi$, d'où

$$\psi = e^{H_1(t-\tau)}\varphi + \int_{\tau}^{t} e^{H_1(t-s)} iH_0 U(s, \tau)\, \varphi\, ds.$$

Donc

$$U(t, \tau) = e^{H_1(t-\tau)} + \int_{\tau}^{t} e^{H_1(t-s)} iH_0(s, \tau)\, ds. \tag{4.7}$$

Si $\tilde{\psi} = \tilde{U}(t, \tau)\varphi = e^{H_1(t-\tau)} e^{iH_0(t-\tau)}$, alors $\dfrac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} = H_1 \tilde{\psi} + \tilde{U}(t, \tau) iH_0 \psi$, donc

$$\tilde{\psi} = e^{H_1(t-\tau)}\varphi + \int_{\tau}^{t} e^{H_1(t-s)} \tilde{U}(s, \tau) iH_0 \varphi\, ds,$$

$$\tilde{U}(t, \tau) = e^{H_1(t-\tau)} + \int_{\tau}^{t} e^{H_1(t-s)} \tilde{U}(s, \tau) iH_0\, ds. \tag{4.8}$$

De (4.7) et (4.8) il vient

$$\tilde{U}_{k,k-1} - U_{k,k-1} = \int_{t_{k-1}}^{t} e^{H_1(t_k - s)}[\tilde{U}(s, t_{k-1}) iH_0 - iH_0 U(s, t_{k-1})]\, ds. \tag{4.9}$$

L'egalité (4.9) nous permet d'évaluer la norme de l'opérateur:

$$\|\tilde{U}_{k,k-1} - U_{k,k-1}\|_{L_2 \to L_2} \leqslant$$

$$\leqslant c \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\tilde{U}(s, t_{k-1}) iH_0 - iH_0 U(s, t_{k-1})\|_{L_2 \to L_2}\, ds, \tag{4.10}$$

car l'opérateur $e^{H_1(t_k - s)}$ est pour les mêmes raisons que $U(t, \tau)$ justiciable de la majoration

$$\|e^{H_1(t_k - s)}\|_{L_2 \to L_2} \leqslant c. \tag{4.11}$$

Evaluons la norme de l'opérateur $\tilde{U}(s, t_{k-1}) iH_0 - iH_0 U(s, t_{k-1})$. Par souci de commodité on posera $\sigma = s - t_{k-1}$ et on supprimera les crochets autonomes de l'exposant de l'exponentielle. Pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{S}$, on a

$$[\tilde{U}(s, t_{k-1}) iH_0 - iH_0 U(s, t_{k-1})]\, \varphi =$$

$$= [e^{iH_1\sigma} iH_0 - iH_0 e^{(H_1 + iH_0)\sigma}]\, \psi(\sigma) + iH_0 e^{(H_1 + iH_0)\sigma}[e^{iH_0\sigma} - I]\varphi, \tag{4.12}$$

où $\psi(\sigma)=e^{iH_0\sigma}\varphi$, et I est l'opérateur identique. Considérons séparément les deux termes du second membre de l'égalité (4.12); commençons par le premier. Le symbole de l'opérateur $e^{(H_1+iH_0)\sigma}$ est $p(x, \sigma; \xi, 0)\equiv p(x, \sigma, \xi)$, celui de l'opérateur $e^{H_1\sigma}$, $q(x, \sigma; \xi, 0)\equiv q(x, \sigma, \xi)$. Si par $k(x, \sigma, \xi)$ on désigne le symbole de l'opérateur $e^{H_1\sigma}iH_0$, on aura

$$k(x, \sigma, \xi)\sim i\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha!}q^{(\alpha)}(x, \sigma, \xi)h_{0(\alpha)}(x, \xi)= \\ =iq(x, \sigma, \xi)\,h_0(x, \xi)+m(x, \sigma, \xi), \qquad (4.13)$$

où

$$m(x, \sigma, \xi)\equiv i\sum_{|\alpha|=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha!}q^{(\alpha)}(x, \sigma, \xi)h_{0(\alpha)}(x, \xi). \qquad (4.14)$$

De façon analogue, le symbole $l(x, \sigma, \xi)$ de l'opérateur $iH_0e^{(H_1+iH_0)\sigma}$ est égal à

$$l(x, \sigma, \xi)\sim ip(x, \sigma, \xi)h_0(x, \xi)+n(x, \sigma, \xi), \qquad (4.15)$$

où

$$n(x, \sigma, \xi)\equiv i\sum_{|\alpha|=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha!}h_0^{(\alpha)}(x, \xi)\,p_{(\alpha)}(x, \sigma, \xi). \qquad (4.16)$$

Donc le symbole $j(x, \sigma, \xi)$ de l'opérateur $e^{H_1\sigma}iH_0-iH_0e^{(H_1+iH_0)\sigma}$ est égal à

$$j(x, \sigma, \xi)=ih_0(x, \xi)[q(x, \sigma, \xi)-p(x, \sigma, \xi)]+ \\ +m(x, \sigma, \xi)-n(x, \sigma, \xi). \qquad (4.17)$$

Considérons le symbole $m(x, \sigma, \xi)$. Comme $h_0(x, \xi)\in S^0_{\rho,\delta}$ et que $q(x, \sigma, \xi)$ est justiciable de la représentation (1.61) dans laquelle les fonctions r et Φ se majorent conformément aux lemmes 1.4 et 1.7, il vient que $m\in S^0_{\rho',\delta'}$ pour $\rho'=\frac{\rho+\delta}{2}+\varepsilon$, $\delta'=\frac{\rho+\delta}{2}-\varepsilon$, ε est un nombre choisi arbitrairement dans l'intervalle $\left]0, \frac{\rho-\delta}{2}\right[$. Plus exactement, $m(x, \sigma, \xi)$ satisfait la majoration

$$\left|m^{(\alpha)}_{(\beta)}(x, \sigma, \xi)\right|\leqslant \\ \leqslant c_{\alpha\beta}e^{(1-\varepsilon_1)\mathrm{Re}h_1(x, \xi)\sigma}\mathrm{Re}h_1(x, \xi)\left|f(1+|\xi|)^{\delta-\rho}\cdot f^{|\alpha|+|\beta|}(1+|\xi|)^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}\sigma, \right. \qquad (4.18)$$

où β et α sont des indices multiples quelconques, $\varepsilon_1>0$ un nombre fixe arbitraire. Comme

$$|\mathrm{Re}\,h_1(x, \xi)|\leqslant c(1+|\xi|)^m, \qquad f=0(1+|\xi|)^{\frac{\rho-\delta}{2}-\varepsilon},$$

l'inégalité (4.18) peut être mise sous la forme

$$\left|m_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, \sigma, \xi)\right| \leqslant c_{\alpha\beta}(1+|\xi|)^{-\beta'|\alpha|+\delta'|\beta|}\sigma^{\gamma}, \tag{4.19}$$

où $\gamma=\min\left\{1, \dfrac{\rho-\delta}{2m}\right\}$, car $e^{(1-\varepsilon_1)\operatorname{Re}h_1(x,\xi)\sigma}\sigma\left|\operatorname{Re}h_1(x, \xi)\right|f(1+|\xi|)^{\delta-\rho}\leqslant c\sigma^{\gamma}$, $(x, \xi)\in\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N$. Par des raisonnements analogues on arrive à montrer que $n(x, \sigma, \xi)\in S^0_{\rho',\delta'}$ et en outre on a la majoration

$$\left|n_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, \sigma, \xi)\right| \leqslant c_{\alpha\beta}\sigma^{\gamma}(1+|\xi|)^{-\rho'|\alpha|+\delta'|\beta|}, \tag{4.20}$$

où α et β sont des indices multiples quelconques.

Etudions le reste de la formule (4.17), c'est-à-dire la fonction $h_0(x, \xi)\times$ $\times[q(x, \sigma, \xi)-p(x, \sigma, \xi)]$. Etant donné que, d'après les résultats du § 1, $q(x, \sigma, \xi)=e^{h_1(x,\xi)\sigma}+q_0(x, \sigma, \xi)$ et que $p(x, \sigma, \xi)=e^{(h_1(x,\xi)+ih_0(x,\xi))\sigma}+$ $+p_0(x, \sigma, \xi)$, cette fonction est égale à

$$h_0(x, \xi)e^{h_1(x,\xi)\sigma}[1-e^{ih_0(x,\xi)\sigma}]+h_0(x, \xi)[q_0(x, \sigma, \xi)-p_0(x, \sigma, \xi)]. \tag{4.21}$$

Il est évident que

$$j_1(x, \sigma, \xi)\equiv h_0(x, \xi)e^{h_1(x,\xi)\sigma}[1-e^{ih_0(x,\xi)\sigma}]\in S^0_{\rho',\delta'}, \tag{4.22}$$

$$(x, \xi)\in\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N$$

et de plus on a la majoration

$$\left|j_{1(\beta)}^{(\alpha)}(x, \sigma, \xi)\right| \leqslant c_{\alpha\beta}\sigma(1+|\xi|)^{-\rho'|\alpha|+\delta'|\beta|} \tag{4.23}$$

pour tous indices multiples α et β. Par ailleurs, comme $q_0(x, \sigma, \xi)$ (resp. $p_0(x, \sigma, \xi)$) satisfait la majoration

$$\left|q_0(x, \sigma, \xi)\right| \leqslant ce^{(1-\varepsilon_1)\operatorname{Re}h_1(x,\xi)\sigma}\sigma\left|\operatorname{Re}h_1(x, \xi)\right|[(1+|\xi|)^{\delta-\rho}f^2]$$

et les dérivées $q_{0(\beta)}^{(\alpha)}$ (resp. $p_{0(\beta)}^{(\alpha)}$), une majoration analogue pour tous α et β (cf. lemme 1.4), il vient que $h_0(x, \xi)\times q_0(x, \xi)\in S^0_{\rho',\delta'}$ et $h_0(x, \xi)\times$ $\times p_0(x, \xi)\in S^0_{\rho',\delta'}$, $(x, \xi)\in\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N$ et en outre on a l'inégalité

$$\left|[h_0(x, \xi)\, q_0(x, \sigma, \xi)]_{(\beta)}^{(\alpha)}\right| \leqslant c_{\alpha\beta}\sigma^{\gamma_1}(1+|\xi|)^{-\rho'|\alpha|+\delta'|\beta|}, \tag{4.24}$$

$\gamma_1=\min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{m}\right\}$, ainsi qu'une inégalité analogue pour h_0p_0 (ε est ici le même que dans la majoration de la fonction f). En combinant les formules (4.17), (4.19), (4.20), (4.23) et (4.24), on voit que le symbole $j(x, \sigma, \xi)\in S^0_{\rho',\delta'}$, $(x, \xi)\in\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N$, et qu'il vérifie la majoration

$$\left|j_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, \sigma, \xi)\right| \leqslant c_{\alpha\beta}\sigma^{\gamma_0}(1+|\xi|)^{-\rho'|\alpha|+\delta'|\beta|}, \tag{4.25}$$

où α et β sont des indices multiples, $\gamma_0=\min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{m}, \dfrac{\rho-\delta}{2m}\right\}$. La majoration

(4.25) et le théorème de Hermander signalé plus haut montrent que la norme de l'opérateur $e^{H_1\sigma} iH_0 - iH_0 e^{(H_1+iH_0)\sigma}$ dans L_2 est $\leqslant c\sigma^{\gamma_0}$, car

$$\left\| e^{H_1\sigma} iH_0 - iH_0 \dots e^{(H_1+H_0)\sigma}\varphi \right\| \leqslant c\sigma^{\gamma_0} \|\varphi\|_{L_2}, \quad \varphi \in \mathscr{S}. \tag{4.26}$$

Considérons maintenant l'opérateur $iH_0 e^{(H_1+iH_0)\sigma}[e^{iH_0\sigma} - I]$. L'opérateur H_0 étant borné dans L_2, si l'on pose $\psi = (e^{iH_0\sigma} - I)\varphi$, $\varphi \in \mathscr{S}$, on obtient la majoration suivante pour ψ :

$$\|\psi\|_{L_2} \leqslant c\sigma \|\varphi\|_{L_2}. \tag{4.27}$$

Par ailleurs, le symbole de l'opérateur $iH_0 e^{(H_1+iH_0)\sigma}$ est égal à

$$i \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} h_0^{(\alpha)}(x, \xi)\, p_{(\alpha)}(x, \sigma, \xi), \tag{4.28}$$

donc il appartient à $S^0_{\rho',\delta'}$, $(x, \xi) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$. De là et de (2.27) on déduit que

$$\left\| iH_0 e^{(H_1+iH_0)\sigma}[e^{iH_0\sigma} - I]\varphi \right\|_{L_2} \leqslant c\sigma \|\varphi\|_{L_2}. \tag{4.29}$$

En combinant maintenant les formules (4.12), (4.26), (4.29) et comme $\|\psi(\sigma)\|_{L_2} = \|e^{iH_0\sigma}\varphi\|_{L_2} \leqslant c\|\varphi\|_{L_2}$ (cf. la majoration (4.53)), on trouve en définitive

$$\begin{gathered} \left\| [\tilde{U}(s, t_{k-1}) iH_0 - iH_0 U(s, t_{k-1})]\varphi \right\|_{L_2} \leqslant c\sigma^{\gamma_0} \|\varphi\|_{L_2}, \\ \sigma = s - t_{k-1}. \end{gathered} \tag{4.30}$$

La majoration (4.30) et (4.9) entraînent à leur tour la majoration

$$\left\| \tilde{U}_{k,k-1} - U_{k,k-1} \right\|_{L_2 \to L_2} \leqslant c\Delta^{1+\gamma_0}. \tag{4.31}$$

Montrons maintenant que l'opérateur $\tilde{U}_{n,0} = \tilde{U}_{n,n-1} \cdot \dots \cdot \tilde{U}_{1,0}$ est borné pour tous les τ et t, $0 \leqslant \tau < t \leqslant \tau < \infty$ et tous les n. Supposons que $\|\tilde{U}_{j,0}\| \leqslant A$ pour $j = 0, 1, \dots, k-1$ et prouvons que

$$\|\tilde{U}_{k,0}\| \leqslant A. \tag{4.32}$$

La relation (4.6) nous donne

$$\tilde{U}_{k,0} = U_{k,0} - \sum_{j=1}^{k} U_{k,j}[\tilde{U}_{j,j-1} - U_{j,j-1}]\tilde{U}_{j-1,0}. \tag{4.33}$$

L'opérateur $U_{j,0}$ vérifie la majoration (4.2)

$$\|U_{j,0}\| \leqslant c_0 \tag{4.34}$$

pour tous les $j \in [0, n]$. De (4.33), (4.32), (4.34) et (4.31), on obtient

$$\|\tilde{U}_{k,0}\| \leqslant c_0(1 + Ack\Delta^{1+\gamma_0}). \tag{4.35}$$

On peut admettre que $A \leqslant 2c_0$ et que le second membre de (4.35) est $\leqslant$ à la quantité suivante (puisque $\Delta = \frac{1}{n}$, $k \leqslant n$):

$$c_0 + 2c_0^2 c \frac{1}{n^{\gamma_0}} \leqslant 2c_0 \tag{4.36}$$

si $n \geqslant (2c_0 c)^{1/\gamma_0}$. On a ainsi prouvé que

$$\|\tilde{U}_{k,0}\| \leqslant 2c_0 \text{ pour tous les } k \in [0, n]. \tag{4.37}$$

En revenant à la formule (4.6), on obtient grâce à (4.31), (4.34) et (4.37)

$$\|U(t, \tau) - \tilde{U}_{n,0}\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|U_{n,k}\| \, \|\tilde{U}_{k,k-1} - U_{k,k-1}\| \, \|\tilde{U}_{k-1,0}\| \leqslant$$

$$\leqslant n c_0 c \Delta^{1+\gamma_0} 2c_0 = c_1 \frac{1}{n^{\gamma_0}} \tag{4.38}$$

ce qui prouve le lemme 4.1. La démonstration produite entraîne le

Lemme 4.2. *Pour tout $t \geqslant s$ désignons par $\hat{U}(t, s)$ l'opérateur*

$$\hat{U}(t, s) = e^{h_1\left(\begin{smallmatrix}2 & 1\\ x, & D\end{smallmatrix}\right)(t-s)} e^{iH_0(t-s)} \tag{4.39}$$

et posons $\hat{U}(t_{j+1}, t_j) = \hat{U}_{j+1,j}$, $j = 0, 1, \ldots, n$, $\hat{U}_{j+1,k} = \hat{U}_{j+1,j} \cdot \ldots \cdot \hat{U}_{k+1,k}$. Alors

$$\|U(t, \tau) - \hat{U}_{n,0}\|_{L_2 \to L_2} = O(1) \quad \textit{lorsque } n \to \infty. \tag{4.40}$$

Prouvons maintenant le résultat fondamental de ce paragraphe.

Théorème 4.1. *Si $H_0 = h_0\left(\begin{smallmatrix}2 & 1\\ x, & D\end{smallmatrix}\right)$ et $H_1 = h_1\left(\begin{smallmatrix}2 & 1\\ x, & D\end{smallmatrix}\right)$ sont des opérateurs pseudo-différentiels hypoelliptiques dont les symboles sont respectivement de classes $S^0_{\rho,\delta}$ et $S^m_{\rho,\delta}$ et si h_1 satisfait les conditions* (1.30) *et* (2.64), *alors on a la formule de suppression des crochets autonomes dans la T-exponentielle*

$$e^{\int_t^s [\![H_1\left(\begin{smallmatrix}2 & 1\\ x(s), & p(s)\end{smallmatrix}\right) ds]\!]} = e^{\overleftarrow{\int_t^s} H_1\left(\begin{smallmatrix}2 & 1\\ X(s), & P(s)\end{smallmatrix}\right) ds}, \tag{4.41}$$

où les opérateurs $P(t)$ et $X(t)$ sont solutions du système d'équations d'Heisenberg

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= -\frac{\partial H_0}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}2 & 1\\ X, & P\end{smallmatrix}\right), \\ \dot{X}(t) &= \frac{\partial H_0}{\partial p}\left(\begin{smallmatrix}2 & 1\\ X, & P\end{smallmatrix}\right), \\ P(0) &= D, \quad X(0) = x. \end{aligned} \tag{4.42}$$

Démonstration. Soit $\varphi(x, t) \in \mathscr{S}$ la solution du problème de Cauchy

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - (H_1 + iH^0)\varphi = 0, \quad \varphi\big|_{t=\tau} = \varphi_0, \quad \varphi_0 \in \mathscr{S}. \tag{4.43}$$

Posons $\psi = e^{-iH_0 t}\varphi$. Le lemme 4.1 et le fait que $e^{iH_0 t}$ est un groupe d'opérateurs bornés dans L_2 entraînent

$$\psi = e^{-iH_0 t}\varphi = e^{-iH_0 t} U(t, \tau)\varphi_0 =$$

$$= e^{-iH_0 t} \lim_{\Delta \to 0} \prod_{k=0}^{n-1} e^{H_1^{k+1/2} \Delta t_k + iH_0^k \Delta t_k} \varphi_0 =$$

$$= \lim_{\Delta \to 0} \prod_{k=0}^{n} [\![e^{-iH_0 t_k} e^{H_1 \Delta t_k} e^{iH_0 t_k}]\!] \cdot e^{-iH_0 \tau} \varphi_0. \tag{4.44}$$

Considérons l'opérateur

$$J = e^{-iH_0 t_j} e^{H_1 \Delta t_{j-1}} e^{iH_0 t_j}. \tag{4.45}$$

Il est immédiat de voir qu'il est égal à l'opérateur

$$J = \exp\{[e^{-iH_0 t_j} H_1 e^{iH_0 t_j}] \Delta t_j\}. \tag{4.46}$$

En effet, désignons par $L = L(t_j)$ l'opérateur $e^{iH_0 t_j}$ pour tout $\varphi_0 \in \mathscr{S}$ et posons $\psi = L^{-1} e^{H_1 t} L\varphi_0$ et $\psi_1 = L\psi$. La fonction ψ_1 est (l'unique) solution du problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi_1}{\partial t} = H_1 \psi_1 \\ \psi_1\big|_{t=0} = L\varphi_0. \end{cases} \tag{4.47}$$

De façon analogue, si l'on pose $\overline{\psi} = e^{[L^{-1} H_1 L]t} \varphi_0$, $\overline{\psi}_1 = L\overline{\psi}$, alors $\overline{\psi}_1$ est solution du même problème (4.47), donc $\psi_1 = \overline{\psi}_1$ et $\psi = \overline{\psi}$. Considérons maintenant l'opérateur

$$e^{-iH_0 t_j} H_1 e^{iH_0 t_j} \equiv L^{-1} h_1 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ x, & D \end{pmatrix} L. \tag{4.48}$$

Le domaine de définition de l'opérateur (4.48) contient l'espace $\mathscr{S}$. En effet, soient φ une fonction quelconque de $\mathscr{S}$, α_0 et β_0 des nombres naturels arbitraires. L'opérateur H_0 étant borné dans L_2, il vient

$$L = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} t^k H_0^k. \tag{4.49}$$

Posons $\varphi_k = H_0^k \varphi$, $k = 1, 2, \ldots$ Pour tous indices multiples α et β tels que $0 \leqslant |\alpha| \leqslant \alpha_0$, $0 \leqslant |\beta| \leqslant \beta_0$, on a

$$\varphi_k = H_0 \varphi_{k-1} = \int e^{i(x, \xi)} h_0(x, \xi) \tilde{\varphi}_{k-1}(\xi) \, d\xi$$

et alors

$$x^\beta D^\alpha \varphi_k(x) = (-i)^\beta \int e^{i(x,\xi)} \sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2=\alpha \\ \beta_1+\beta_2+\beta_3=\beta}} e^{\alpha_1\alpha_2}_{\beta_1\beta_2\beta_3} \times \\ \times \xi^{\alpha_1-\beta_1}_{\beta_1\beta_2\beta_3} h_0^{(\beta_2)}_{(\alpha_2)}(x,\xi)\, \tilde{\varphi}^{(\beta_3)}_{k-1}(\xi)\, d\xi. \tag{4.50}$$

Comme $h_0 \in S^0_{\rho,\delta}$, en sommant (4.50) sur α et β tels que $0 \leqslant |\alpha| \leqslant \alpha_0$, $0 \leqslant |\beta| \leqslant \beta_0$ et en estimant le second membre de (4.50) pour la norme de L_2 à l'aide du théorème de Hermander, on trouve

$$\|\varphi_k\|_{\alpha_0,\beta_0} \equiv \sum_{\substack{0\leqslant|\alpha|\leqslant\alpha_0 \\ 0\leqslant|\beta|\leqslant\beta_0}} \|x^\beta D^\alpha \varphi_k(x)\|_{L_2} \leqslant c_{\alpha_0,\beta_0} \|\varphi_{k-1}\|_{\alpha_0,\beta_0}. \tag{4.51}$$

D'où

$$\|\varphi_k\|_{\alpha_0,\beta_0} \leqslant c^k_{\alpha_0\beta_0} \|\varphi\|_{\alpha_0,\beta_0}. \tag{4.52}$$

La relation (4.49) et la majoration (4.52) entraînent la majoration suivante pour $\psi = L\varphi$:

$$\|\psi\|_{\alpha_0,\beta_0} \leqslant e^{Ic_{\alpha_0\beta_0}} \|\varphi\|_{\alpha_0,\beta_0}. \tag{4.53}$$

Ceci prouve l'existence des opérateurs $h_1\binom{2\ 1}{x, D} L$ et $L^{-1} h_1\binom{2\ 1}{x, D} L$. Ce que nous voulions.

Par définition de la fonction d'opérateurs ordonnés, pour tout $\varphi \in \mathscr{S}$ et toute fonction $g(x_1, x_2) \in C^\infty$ croissant à l'infini par rapport à x_1 et x_2 moins vite qu'une puissance quelconque de $|x|$, on a

$$g\binom{2\ 1}{x, D} \varphi \equiv (|x|^2+1)^M g_0\binom{2\ 1}{x, D} (-\Delta+1)^K \varphi, \tag{4.54}$$

où

$$g_0\binom{2\ 1}{x, D} = \int e^{ixt_1}\, e^{iDt_2}\, \tilde{g}_0(t_1, t_2)\, dt_1\, dt_2 \tag{4.55}$$

et

$$\tilde{g}_0(t_1, t_2) = \int e^{-i(t_1x_1+t_2x_2)}\, g_0(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2, \tag{4.56}$$

$$g_0(x_1, x_2) = \frac{g(x_1, x_2)}{(1+|x_1|^2)^M (1+|x_2|^2)^K}, \tag{4.57}$$

où M et K sont des nombres naturels assez grands, de sorte que toutes les définitions ont un sens. S'agissant de l'opérateur pseudo-différentiel H_1, la définition (4.54) est confondue avec celle dont on s'est servi plus haut, car si $\varphi \in \mathscr{S}$, alors

$$h_1\binom{2\ 1}{x_1, D} \varphi = \{(|x|^2+1)^M \int e^{ixt_1}\, e^{iDt_2} (-\Delta+1)^K \tilde{h}(t_1, t_2)\, dt_1\, dt_2\} \varphi = \\ = (|x|^2+1)^M \int e^{ixt_1}\, \tilde{h}(t_1, t_2)\, dt_1\, dt_2 \int e^{i(x,\xi)+i(\xi,t_2)} (|\xi|^2+1)^K \tilde{\varphi}(\xi)\, d\xi = \\ \int e^{i(x,\xi)} (|x|^2+1)^M (|\xi|^2+1)^K h(x, \xi) \tilde{\varphi}(\xi)\, d\xi = \int e^{i(x,\xi)} h_1(x, \xi) \tilde{\varphi}(\xi)\, d\xi,$$

$$M > \frac{N+1}{2}, \quad K > \frac{m+N+1}{2} \tag{4.58}$$

On a par ailleurs

$$L^{-1}h_1\left(\overset{2}{x},\overset{1}{D}\right)L=$$

$$=L^{-1}(|x|^2+1)^M L\int\{L^{-1}e^{ixt_1}L\}\{L^{-1}e^{iDt_2}L\}\{L^{-1}(-\Delta+1)^K L\}\times$$
$$\times\hat{h}(t_1,t_2)\,dt_1\,dt_2. \qquad (4.59)$$

Comme $L^{-1}(A^2+1)^k L=[L^{-1}AL+1]^k$ pour tout opérateur A (lorsque ces expressions ont un sens) et que les opérateurs figurant entre accolades sous le signe d'intégration de (4.59) vérifient l'égalité (4.46), la formule (4.59) nous conduit à l'égalité

$$L^{-1}h_1\left(\overset{2}{x},\overset{1}{D}\right)L=h_1(L^{-1}\overset{2}{x}L,\ L^{-1}\overset{1}{D}L). \qquad (4.60)$$

Considérons maintenant les opérateurs

$$X(t)=e^{-iH_0t}xe^{iH_0t} \quad \text{et} \quad P(t)=e^{-iH_0t}De^{iH_0t} \qquad (4.61)$$

dont le domaine de définition, comme nous l'avons signalé plus haut, contient l'espace $\mathscr{S}$ pour tous les $t\geqslant 0$. Une dérivation immédiate par rapport à t nous montre que les opérateurs $X(t)$ et $P(t)$ sont solutions du système d'équations de Heisenberg

$$\begin{cases} \dot{X} &= -i\left[H_0\left(\overset{2}{X},\overset{1}{P}\right),X(t)\right],\\ \dot{P} &= -i\left[H_0\left(\overset{2}{X},\overset{1}{P}\right),P(t)\right],\\ X(0)=x,\ P(0)=D, \end{cases} \qquad (4.62)$$

le crochet désigne le commutateur des opérateurs. Les opérateurs (4.61) sont solutions du système (4.42), car nous avons la chaîne suivante d'égalités opératorielles:

$$\left[H_0\left(\overset{2}{X},\overset{1}{P}\right),X\right]=H_0\left(\overset{2}{X},\overset{1}{P}\right)X-XH_0\left(\overset{2}{X}_1,\overset{1}{P}\right)=$$
$$=H_0\left(L^{-1}\overset{2}{X}L,L^{-1}\overset{1}{P}L\right)X-XH_0\left(L^{-1}\overset{2}{x}L,L^{-1}\overset{1}{P}L\right)=$$
$$=L^{-1}h_0\left(\overset{2}{x},D\right)LL^{-1}xL-L^{-1}xLL^{-1}h_0\left(\overset{2}{x},\overset{1}{D}\right)L=$$
$$=L^{-1}\left[h_0\left(\overset{2}{x},\overset{1}{D}\right),x\right]L=-iL^{-1}\frac{\partial h_0}{\partial p}\left(\overset{2}{x},\overset{1}{D}\right)L=-i\frac{\partial H_0}{\partial p}\left(\overset{2}{X},\overset{1}{P}\right) \qquad (4.63)$$

(on s'est servi de la formule (4.60) pour transformer les opérateurs H_0 et $\frac{\partial H_0}{\partial p}$). L'égalité (4.63) et la première équation (4.62) nous donnent $\dot{X}=-\frac{\partial H_0}{\partial p}\left(\overset{2}{X},\overset{1}{P}\right)$. L'équation $\dot{P}=\frac{\partial H_0}{\partial x}\left(\overset{2}{X},\overset{1}{P}\right)$ s'obtient de façon analogue.

Montrons que les systèmes d'équations de Heisenberg (4.42) et (4.62) n'admettent qu'une seule solution analytique en t au voisinage de $t=0$. Considérons le système (4.42) (le système (4.62) se traite de façon analogue). La solution analytique en t du système (4.42) est de la forme

$$X(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}X^{(k)}(0)\,t^k,\quad P(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}P^{(k)}(0)\,t^k \tag{4.64}$$

et il nous suffit de montrer que les opérateurs $X^{(k)}(0)$ et $P^{(k)}(0)$ se définissent de façon unique à partir du système (4.42). On montrera en outre que tous les $X^{(k)}(0)$ et $P^{(k)}(0)$, $k=0, 1, 2, \ldots$, ont des domaines de définition qui contiennent l'espace $\mathscr{S}$ et qu'ils sont des opérateurs bornés de $\mathscr{H}_{1,1}$ dans L_2 (la classe $\mathscr{H}_{1,1}$ est composée des fonctions φ de norme $\|\varphi\|_{1,1}<\infty$ (cf. (4.51)).

Les opérateurs $X^{(k)}(0)$ et $P^{(k)}(0)$ se déterminent par une dérivation successive des équations du système (4.42) par rapport à t en faisant ensuite $t=0$. On a

$$\begin{aligned} X(0) &= x,\ P(0)=D,\\ X'(0) &= \frac{\partial H_0}{\partial p}\left(\overset{2}{x},\overset{1}{D}\right),\\ P'(0) &= -\frac{\partial H_0}{\partial x}\left(\overset{2}{x},\overset{1}{D}\right). \end{aligned} \tag{4.65}$$

Pour trouver les dérivées suivantes, exprimons les fonctions des opérateurs ordonnés $\frac{\partial H_0}{\partial p}\left(\overset{2}{X}(t),\overset{1}{P}(t)\right)$ et $\frac{\partial H_0}{\partial x}\left(\overset{2}{X}(t),\overset{1}{P}(t)\right)$ à l'aide des formules (4.54) et (4.55), plus exactement

$$\frac{\partial H_0}{\partial p}\left(\overset{2}{X}(t),\overset{1}{P}(t)\right)=$$

$$=(|X(t)|^2+1)^M\int e^{iX(t)y_1}e^{iP(t)y_2}\frac{\partial\widetilde{H}_{00}(y_1,y_2)}{\partial y_2}\,dy_1\,dy_2\,(|P(t)|^2+1)^K, \tag{4.66}$$

où

$$\frac{\partial H_{00}(y_1,y_2)}{\partial y_2}=(|y_1|^2+1)^{-K}(|y_2|^2+1)^{-N}\frac{\partial H_0(y_1,y_2)}{\partial y_2}; \tag{4.67}$$

la même formule est valable pour $\frac{\partial H_0}{\partial x}\left(\overset{2}{X}(t),\overset{1}{P}(t)\right)$ avec la substitution de $\frac{\partial\widetilde{H}_{00}}{\partial y_1}$ à $\frac{\partial\widetilde{H}_{00}}{\partial y_2}$. Dérivons maintenant le second membre de (4.66) par rapport à t et utilisons les égalités opératorielles suivantes:

$$\frac{d}{dt}(|A(t)|^2+1)^M=\sum_{l=0}^{M-1}(|A(t)|^2+1)^l[(A,\dot{A})+(\dot{A},A)](|A(t)|^2+1)^{M-1-l}, \tag{4.68}$$

$$\frac{d}{dt}e^{A(t)}=\int_0^1 e^{(1-\tau)A(t)}\dot{A}(t)\,e^{\tau A(t)}\,d\tau; \tag{4.69}$$

où $A(t)$ est un opérateur dépendant du temps t, $(A,\dot{A})=\sum_{i=1}^{n}A_i(t)\dot{A}_i(t)$, le produit scalaire. En faisant ensuite $t=0$, on obtient

$$X''(0)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H_0}{\partial p}\left({}^2X(t),\,{}^1P(t)\right)\right)\Big|_{t=0}=$$

$$=\sum_{l=0}^{M-1}(|x|^2+1)^l\left(x\frac{\partial H_0}{\partial p}\left({}^2x,{}^1D\right)+\frac{\partial H_0}{\partial p}\left({}^2x,{}^1D\right)x\right)(|x|^2+1)^{M-1-l}\times$$

$$\times\int\frac{\partial\widetilde{H}_{00}(y_1,y_2)}{\partial y_2}e^{ixy_1}e^{iDy_2}(-\Delta+1)^K dy_1\,dy_2+$$

$$+(|x|^2+1)^M\int\frac{\partial\widetilde{H}_{00}(y_1,y_2)}{\partial y_2}\times$$

$$\times\left\{iy_1\int_0^1 e^{(1-\tau)iy_1x}\frac{\partial H_0}{\partial p}\left({}^2x,{}^1D\right)e^{\tau iy_1x}\,d\tau e^{iDy_2}+\right.$$

$$\left.+e^{ixy_1}iy_2\int_0^1 e^{(1-\tau)iy_2D}\left(-\frac{\partial H_0}{\partial x}\left({}^2x,{}^1D\right)e^{\tau iy_2D}\right)d\tau\right\}\times dy_1\,dy_2+(-\Delta+1)^K+$$

$$+(|x|^2+1)^M\int\frac{\partial\widetilde{H}_{00}(y_1,y_2)}{\partial y_2}dy_1\,dy_2\,e^{ixy_1}\times$$

$$\times e^{iDy_2}\sum_{l=0}^{k-1}(-\Delta+1)^l\left[-D\frac{\partial H_0}{\partial x}\left({}^2x,{}^1D\right)-\frac{\partial H_0}{\partial x}\left({}^2x,{}^1D\right)D\right](-\Delta+1)^{K-1-l}.$$

on a la même formule pour $P''(0)$. Sur la formule (4.70) on voit que l'opérateur $X''(0)$ est défini de façon unique et que son domaine de définition contient l'espace $\mathscr{S}$. Comme $h_0(x,\xi)\in S^0_{\rho,\delta}$, il est aisé de déduire de (4.70) que $X''(0)$ est borné en tant qu'opérateur de $\mathscr{H}_{1,1}$ dans L_2. Ces assertions sont valables aussi pour l'opérateur $P''(0)$. Prouvons-les par récurrence pour les dérivées suivantes $X^{(k)}(0)$ et $P^{(k)}(0)$, $k=3,4,\ldots$ On aura ainsi prouvé l'unicité de la solution analytique en t du système de

Heisenberg (4.42) (idem pour le système (4.62)). Assurons-nous que les opérateurs (4.61) sont la solution cherchée. En effet, d'après la majoration (4.52), les opérateurs $X(t)=e^{-[iH_0]t}\,x\,e^{[iH_0]t}$ et $P(t)=e^{-[iH_0]t}\,De^{[iH_0]t}$ peuvent être représentés par des séries entières convergentes de t:

$$X(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(it)^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-H_0)^k\,xH_0^{n-k},$$
$$P(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(it)^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-H_0)^k\,DH_0^{n-k}. \tag{4.71}$$

Ceci étant, les opérateurs $X(t)$ et $P(t)$ sont définis sur les fonctions $\varphi\in\mathscr{H}_{1,1}$ et bornés en tant qu'opérateurs de $\mathscr{H}_{1,1}$ dans L_2, quant à la convergence des séries de (4.71), c'est une convergence uniforme pour la topologie opératorielle.

Revenons à l'égalité (4.44). Grâce aux formules (4.46), (4.60) et (4.61), on peut mettre l'égalité (4.44) sous la forme suivante:

$$\varphi=\lim_{\Delta\to 0}e^{\left[H_1\left(\overset{2}{X}(t_n),\overset{1}{P}(t_n)\right)\right]\Delta t_{n-1}}\ldots e^{\left[H_1\left(\overset{2}{X}(t_1),\overset{1}{P}(t_1)\right)\right]\Delta t_0}\psi_0\equiv$$
$$\equiv e^{\int_\tau^{\mathscr{T}}\left[H_1\left(\overset{2}{X}(s),\overset{1}{P}(s)\right)\right]ds}\psi_0, \tag{4.72}$$

où $\psi_0=e^{-[iH_0]\tau}\varphi_0$ et $X(t)$ et $P(t)$ sont solutions du système de Heisenberg (4.42) ou (4.62).

Par ailleurs, le lemme 4.2 nous permet de représenter la fonction $\psi=e^{-[iH_0]\mathscr{T}}\varphi$ par la limite suivante:

$$\psi=e^{-[iH_0]\mathscr{T}}\lim_{\Delta\to 0}\prod_{k=0}^{n-1}e^{h_1\left(\overset{2}{X},\overset{1}{D}\right)\Delta t_k}e^{[iH_0]\Delta t_k}=$$
$$=\lim\left\{\left(e^{-[iH_0]t_n}e^{h_1\left(\overset{2}{X},\overset{1}{D}\right)\Delta t_{n-1}}e^{[iH_0]t_n}\right)\left(e^{-[iH_0]t_{n-1}}e^{h_1\left(\overset{2}{X},\overset{1}{D}\right)\Delta t_{n-1}}\right)\times\ldots\right.$$
$$\left.\ldots\times\left(e^{-[iH_0]t_1}e^{h_1\left(\overset{2}{X},\overset{1}{D}\right)\Delta t_0}e^{[iH_0]t_1}\right)\right\}e^{-[iH_0]\tau}\varphi. \tag{4.73}$$

Chaque parenthèse du produit (4.73) peut être transformée à l'aide de la formule (4.60) qui est valable pour toute fonction d'opérateurs ordonnés croissant à l'infini par rapport à ses arguments moins vite qu'une puissance de ces arguments; on obtient en définitive

$$e^{-[iH_0]t_j}e^{h_1\left(\overset{2}{X},\overset{1}{D}\right)t_{j-1}}e^{[iH_0]t_j}=e^{h_1\left(\overset{2}{X}(t_j),\overset{1}{P}(t_j)\right)\Delta t_{j-1}}, \tag{4.74}$$

$j=1,\ldots,n-1$, où les opérateurs $X(t_j)$ et $P(t_j)$ sont solutions du système (4.42). En portant (4.74) dans (4.73), on trouve

$$\psi=\lim e^{h_1\left(\overset{t_n+\frac{\Delta}{2}}{X}(t_n),\ \overset{t_n-\frac{\Delta}{2}}{P}(t_n)\right)\Delta t_{n-1}}\ldots e^{h_1\left(\overset{t_1+\frac{\Delta}{2}}{X}(t_1),\ \overset{t_1-\frac{\Delta}{2}}{P}(t_1)\right)\Delta t_0}\psi_0\equiv$$

$$\equiv e^{\int_\tau^t H_1\left(\overset{s+0}{X}(s),\ \overset{s-0}{P}(s)\right)ds}\psi_0,\qquad \psi_0=e^{-[iH_0]^\tau}\varphi_0. \tag{4.75}$$

En combinant les formules (4.72) et (4.75) on voit que l'égalité (4.41) est prouvée.

§ 5. Décomposition spectrale du T-produit

Dans ce paragraphe on étudiera le T-produit dans une algèbre de Banach abstraite d'opérateurs.

La possibilité de décomposer l'unité dans l'algèbre des opérateurs agissant dans un espace hilbertien permet de relier au T-produit l'intégration de fonctionnelles définies sur l'espace des trajectoires. Quand on aura établi les propriétés de cette intégration on verra que c'est en fait la décomposition spectrale du T-produit dans la représentation de l'interaction.

1. Définition du T-produit. Conditions d'existence. Soit φ_τ une fonction définie sur $[0,\ \infty[=\mathbf{R}_+$, à valeurs dans l'algèbre de Banach Op des opérateurs. On admettra dans la suite que φ_τ est douée des propriétés suivantes :

(T.1) La fonction φ_τ est Bochner-intégrable sur $[0,\ \infty[$ et pour tout $T>0$

$$\int_0^T \|\varphi_\tau\|\,d\tau<\infty.$$

(T.2) Pour tous $0\leqslant t_0<t<\infty$ il existe une constante c_{t_0t} telle que

$$\frac{1}{v-s}\int_s^v \|\varphi_\tau\|\,d\tau\leqslant c_{t_0t}<\infty$$

pour tous les $t_0\leqslant s<v\leqslant t$.

La condition (T.1) définit pour tous $0\leqslant t_0<t<\infty$ l'opérateur $a_{t_0t}=\int_{t_0}^t \varphi_\tau\,d\tau$, donc une famille d'opérateurs jouissant de la propriété suivante :

$$a_{t_0s}+a_{st}=a_{t_0t},\ a_{tt}=0\quad\text{pour tous}\quad 0\leqslant t_0\leqslant s\leqslant t<\infty, \tag{5.1}$$

autrement dit la famille d'opérateurs a_{t_0t} est un *semi-groupe additif*.

Associons à chaque opérateur de ce semi-groupe l'opérateur

$$V^t_{t_0}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_{t_0t})^k}{k!}. \tag{5.2}$$

Si les opérateurs du semi-groupe additif ne sont pas commutables, la famille d'opérateurs $V_{t_0}^t$ est un *semi-groupe multiplicatif*, c'est-à-dire que

$$V_{t_0}^t = V_s^t V_{t_0}^s, \quad V_t^t = I \quad \text{pour tous} \quad 0 \leqslant t_0 \leqslant s \leqslant t < \infty. \tag{5.3}$$

Dans le cas contraire, la famille d'opérateurs $V_{t_0}^t$ n'est pas un semi-groupe multiplicatif. Mais à partir d'un semi-groupe additif on peut construire un semi-groupe multiplicatif si l'on définit l'opérateur $V_{t_0}^t$ autrement que par la formule (5.2).

Considérons une suite $\pi(0, \infty)$ illimitée strictement croissante de points $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots$ que nous appellerons subdivision. Désignons par $\pi(t_0, t)$ la réunion des sous-ensembles de points de la subdivision $\pi(0, \infty)$ contenus dans l'intervalle $]t_0, t[$ avec les points t_0 et t et appelons-la subdivision de l'intervalle $]t_0, t[$. Appelons pas de la subdivision le nombre

$$|\pi(t_0, t)| = \max_{t_k \in \pi(t_0, t)} (t_k - t_{k-1}).$$

Construisons sur la subdivision $\pi(t_0, t)$ l'opérateur

$$\Pi(\pi(t_0, t)) = e^{a_{s_k t}} \cdot e^{a_{s_{k-1} s_k}} \cdot \ldots \cdot e^{a_{t_0 s_1}}, \tag{5.4}$$

où s_i sont les points de la subdivision $\pi(t_0, t)$.

Appelons *T-produit* (engendré par le semi-groupe additif $a_{t_0 t}$) la limite de la famille d'opérateurs $\Pi(\pi(t_0, t))$ lorsque $|\pi(t_0, t)| \to 0$.

Dans la suite on conviendra de désigner le T-produit par

$$e^{a_{t_0 t}} = e^{\int_{t_0}^{t} \varphi_\tau d\tau} = \lim_{|\pi(t_0, t)| \to 0} \Pi(\pi(t_0, t))$$

et l'opérateur défini par la formule (5.2) par

$$e^{[\![\int_{t_0}^{t} \varphi_\tau d\tau]\!]} = e^{[\![a_{t_0 t}]\!]} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_{t_0 t})^k}{k!}$$

Lemme 5.1. *Si les conditions* (T. 1) *et* (T.2) *sont remplies, le T-produit existe et l'on a la majoration*

$$\left\| e^{\int_{t_0}^{t} \varphi_\tau d\tau} \right\| \leqslant e^{\int_{t_0}^{t} \|\varphi_\tau\| d\tau}, \tag{5.5}$$

$$\left\| e^{\int_{t_0}^{t} \varphi_\tau d\tau} - \left(I + \int_{t_0}^{t} \varphi_\tau d\tau \right) \right\| \leqslant \frac{1}{2} \left(\int_{t_0}^{t} \|\varphi_\tau\| d\tau \right)^2 e^{\int_{t_0}^{t} \|\varphi_\tau\| d\tau}. \tag{5.6}$$

Démonstration. *Soit* $\pi(t_0, t)$ une subdivision quelconque. Evaluons la différence $\| e^{[\![\int_{t_0}^{t} \varphi_\tau d\tau]\!]} - \Pi(\pi(t_0, t)) \|$. Remarquons à cet effet que dans une algèbre de Banach, on a l'inégalité

$$\left\| e^{A_1} e^{A_2} \dots e^{A_n} - \left(I + \sum_{k=1}^{n} A_i \right) \right\| \leqslant e^{\|A_1\| + \dots + \|A_n\|} - \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \|A_k\| \right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{n} \|A_k\| \right)^2 e^{\sum_{k=1}^{n} \|A_k\|}.$$

Cette inégalité entraîne immédiatement

$$\left\| \Pi(\pi(t_0 t)) - \left(I + \int_{t_0}^{t} \varphi_\tau \, d\tau \right) \right\| \leqslant \frac{1}{2} \left(\int_{t_0}^{t} \|\varphi_\tau\| \, d\tau \right)^2 e^{\int_{t_0}^{t} \|\varphi_\tau\| \, d\tau}. \tag{5.7}$$

D'où

$$\left\| e^{\left[\!\left[\int_{t_0}^{t} \varphi_\tau d\tau \right]\!\right]} - \Pi(\pi(t_0, t)) \right\| \leqslant \left\| e^{\left[\!\left[\int_{t_0}^{t} \varphi_\tau d\tau \right]\!\right]} - \right.$$

$$\left. - \left(I + \int_{t_0}^{t} \varphi_\tau d\tau \right) \right\| + \left\| \Pi(\pi(t_0, t)) - \left(I + \int_{t_0}^{t} \varphi_\tau \, d\tau \right) \right\| \leqslant \left(\int_{t_0}^{t} \|\varphi_\tau\| \, d\tau \right)^2 e^{\int_{t_0}^{t} \|\varphi_\tau\| d\tau}. \tag{5.8}$$

Appliquons (5.8) pour démontrer l'existence du T-produit. Soient $\pi(t_0, t)$ et $\pi'(t_0, t)$ deux subdivisions et $\tilde{\pi}(t_0, t)$ leur réunion. On a alors la majoration

$$\| \Pi(\pi(t_0, t)) - \Pi(\tilde{\pi}(t_0, t)) \| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} e^{\int_{s_k}^{t} \|\varphi_\tau\| d\tau} \left\| e^{\left[\!\left[\int_{s_{k-1}}^{s_k} \varphi_\tau d\tau \right]\!\right]} - e^{\left[\!\left[\int_{s_{k_p}}^{s_k} \varphi_\tau d\tau \right]\!\right]} \dots e^{\left[\!\left[\int_{s_{k-1}}^{s_{k_1}} \varphi_\tau d\tau \right]\!\right]} \right\| e^{\int_{t_0}^{s_{k-1}} \|\varphi_\tau\| d\tau}, \tag{5.9}$$

où $s_1, \dots, s_n$ sont les points de la subdivision $\pi(t_0, t)$ et s_{k_i} les points de la subdivision $\pi'(s_{k-1}, s_k)$. On s'est servi de la majoration évidente pour toute subdivision

$$\| \Pi(\pi(t_0, t)) \| \leqslant e^{\int_{t_0}^{t} \|\varphi_\tau\| d\tau}. \tag{5.10}$$

En appliquant maintenant la majoration (5.8) et la condition (T.2) à chaque terme de la somme du second membre de (5.9) on trouve

$$\| \Pi(\pi(t_0, t)) - \Pi(\tilde{\pi}(t_0, t)) \| \leqslant$$

$$\leqslant e^{\int_{t_0}^{t} \|\varphi_\tau\| d\tau} \sum_{k=1}^{n} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\varphi_\tau\| \, d\tau \right)^2 \leqslant c_{t_0 t} \left(\int_{t_0}^{t} \|\varphi_\tau\| \, d\tau \right) \cdot |\pi(t_0, t)| \cdot e^{\int_{t_0}^{t} \|\varphi_\tau\| d\tau}$$

Donc

$$\| \Pi(\pi(t_0, t)) - \Pi(\pi'(t_0, t)) \| \leqslant$$

$$\leqslant c_{t_0 t} \left(\int_{t_0}^{t} \|\varphi_\tau\| \, d\tau \right) \cdot e^{\int_{t_0}^{t} \|\varphi_\tau\| d\tau} \{ |\pi(t_0, t)| + |\pi'(t_0, t)| \},$$

ce qui exprime que la suite d'opérateurs $\Pi(\pi(t_0, t))$ est de Cauchy lorsque $|\pi(t_0, t)| \to 0$, donc qu'existe le T-produit. Les majorations (5.5) et (5.6) résultent désormais immédiatement de (5.7) et (5.10).

Une importante propriété du T-produit consiste en ce que la fonction $v(t|t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} \varphi_\tau d\tau}$ est solution de l'équation intégrale

$$v(t|t_0) = I + \int_{t_0}^{t} \varphi_\tau \, v(\tau|t_0) \, d\tau. \tag{5.11}$$

Prouvons cette assertion. Remarquons tout d'abord que la solution de l'équation (5.11) se représente par la série

$$v(t|t_0) = I + \int_{t_0}^{t} \varphi_\tau d\tau + \sum_{k=2}^{\infty} \int_{t_0}^{t} \dots \int_{t_0}^{\tau_2} \varphi_{\tau_k} \cdot \varphi_{\tau_1} d\tau_1 \dots d\tau_k \tag{5.12}$$

qui converge, puisque la condition (T.2) entraîne la majoration

$$\left\| \int_{t_0}^{t} \dots \int_{t_0}^{\tau_2} \varphi_{\tau_k} \dots \varphi_{\tau_1} d\tau_1 \dots d\tau_k \right\| \leqslant \frac{c_{t_0 t}^k}{k!} (t - t_0)^k. \tag{5.13}$$

De (5.12) et (5.13) en déduit les majorations immédiates

$$\|v(t|t_0)\| \leqslant e^{c_{t_0 t}(t - t_0)},$$

$$\left\| v(t|t_0) - \left(I + \int_{t_0}^{t} \varphi_\tau d\tau \right) \right\| \leqslant \frac{1}{2} c_{t_0 t}^2 (t - t_0)^2 e^{c_{t_0 t}(t - t_0)},$$

ainsi que la propriété suivante des solutions de l'équation (5.11):

$$v(t|s) v(s|t_0) = v(t|t_0) \text{ pour tous } 0 \leqslant t_0 \leqslant s \leqslant t < \infty. \tag{5.14}$$

Comme

$$\left\| v(t|t_0) - e^{[\![\int_{t_0}^{t} \varphi_\tau d\tau]\!]} \right\| \leqslant c_{t_0 t}^2 (t - t_0)^2 e^{c_{t_0 t}(t - t_0)}$$

pour tous $0 \leqslant t_0 \leqslant t < \infty$, de l'inégalité

$$\|v(t|t_0) - \Pi(\pi(t_0, t))\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left\| v(t|t_k) \left(v(t_k|t_{k-1}) - e^{[\![\int_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi_\tau d\tau]\!]} \right) \Pi(\pi(t_0, t_{k-1})) \right\|$$

il vient

$$\|v(t|t_0) - \Pi(\pi(t_0, t))\| \leqslant |\pi(t_0, t)| c_{t_0 t}^2 (t - t_0) e^{c_{t_0 t}(t - t_0)},$$

ce qui nous conduit à l'égalité

$$v(t|t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} \varphi_\tau d\tau}. \tag{5.15}$$

La formule (5.15) et la propriété (5.14) nous disent que la famille d'opérateurs $V_{t_0}^t = e^{\int_{t_0}^{t} \varphi_\tau d\tau}$ est un semi-groupe multiplicatif, c'est-à-dire que

$$e^{\int_{t_0}^{t} \varphi_\tau d\tau} = e^{\int_{s}^{t} \varphi_\tau d\tau} \cdot e^{\int_{t_0}^{s} \varphi_\tau d\tau}$$

pour tous $0 \leqslant t_0 \leqslant s \leqslant t < \infty$.

2. Intégration associée au T-produit. Dans ce numéro on admettra que Op est l'algèbre de Banach des opérateurs d'un espace hilbertien $\mathscr{H}$ dans lui-même.

Soit E une décomposition de l'unité, c'est-à-dire une application de la tribu $\mathscr{B}$ des boréliens de la droite réelle $\mathbf{R}$ dans l'ensemble des orthoprojecteurs, douée des propriétés suivantes:

(i) $E(\Delta)E(\Delta')=E(\Delta')E(\Delta)=E(\Delta\cap\Delta')$ pour tous $\Delta, \Delta'\in\mathscr{B}$;
(ii) $E(\mathbf{R})=I$;
(iii) Pour toute famille d'ensembles disjoints $(\Delta_n)_{n\geqslant 1}\subset\mathscr{B}$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} E(\Delta_n)$ converge fortement et $\sum_{n=1}^{\infty} E(\Delta_n)=E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\Delta_n\right)$.

Une conséquence immédiate des propriétés (i), (ii) et (iii) est l'assertion suivante: *pour toute fonction $f(x)$ $\mathscr{B}$-mesurable bornée existe l'opérateur*

$$\hat{f}=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,E(dx). \tag{5.16}$$

Ceci étant, pour tous $h, g\in\mathscr{H}$

$$(\hat{f}h, g)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,(E(dx)\,h, g).$$

Désignons par $\mathscr{P}(0, \infty)$ l'ensemble de toutes les fonctions définies sur $[0, \infty[$ continues à droite, possédant une limite à gauche et bornées sur tout sous-ensemble borné.

Les éléments de l'ensemble $\mathscr{P}(0, \infty)$ seront appelés *trajectoires* et désignés par x_τ; la restriction de cet ensemble à $[t_0, t[$ sera notée $\mathscr{P}(t_0, t)$. On dit qu'une fonctionnelle f sur $\mathscr{P}[t_0, t[$ est *cylindrique* s'il existe une fonction φ mesurable à n variables et un ensemble de points $t_0\leqslant t_1<t_2<\ldots<t_n<t$ tels que

$$f(x_\tau)=\varphi(x_{t_1}, \ldots, x_{t_n}). \tag{5.17}$$

Soit $e_\Delta(x)$ l'indicateur d'un ensemble $\Delta\in\mathscr{B}$. Associons à chaque fonction cylindrique de la forme

$$f(x_\tau)=e_{\Delta_1}(x_{t_1})\,e_{\Delta_2}(x_{t_2})\ldots e_{\Delta_n}(x_{t_n});\quad \Delta_i\in\mathscr{B}, \tag{5.18}$$

l'opérateur

$$J^t_{t_0}(f)=\hat{f}=e^{\int_{t_n}^{t}\varphi_\tau\,d\tau}E(\Delta_n)\,e^{\int_{t_{n-1}}^{t_n}\varphi_\tau\,d\tau}\ldots E(\Delta_1)\,e^{\int_{t_0}^{t_1}\varphi_\tau\,d\tau}. \tag{5.18'}$$

Prolongeons $J^t_{t_0}$ par linéarité en des fonctionnelles représentables par une combinaison linéaire de fonctionnelles de la forme (5.18) que nous appellerons *simples*, et désignons l'espace vectoriel qu'elles engendrent par $\overset{\circ}{\mathscr{F}}(t_0, t)$.

De par sa définition, toute fonctionnelle simple peut être mise sous la forme

$$f(x_\tau)=\sum_{i_1,\dots,i_N}\lambda_{i1\dots i_N}e_{\Delta_{i_1}}(x_{t_1})\cdot\dots\cdot e_{\Delta_{i_N}}(x_{t_N}), \tag{5.19}$$

où la somme est finie, Δ_{i_k} sont des ensembles deux à deux disjoints de $\mathscr{B}$, et $t_0\leqslant t_1<t_2<\dots<t_N\leqslant t$. La décomposition de l'unité E étant additive et le T-produit multiplicatif, la valeur de $J^t_{t_0}$ sur les fonctions simples ne dépend pas de leur représentation sous la forme (5.19). Soient h, $h_1\in\mathscr{H}$. Alors

$$\left|((J^t_{t_0}f)\,h,h_1)\right|\leqslant$$

$$\max_{i_1,\dots,i_N}|\lambda_{i_1\dots i_N}|\sum_{i_1,\dots,i_N}\left|\left(e^{\int_{t_N}^{t}\varphi_\tau\,d\tau}E(\Delta_{i_N})\dots E(\Delta_{i_1})\,e^{\int_{t_0}^{t_1}\varphi_\tau\,d\tau}h,h_1\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\max_{x_\tau}|f(x_\tau)|e^{\int_{t_0}^{t}\|\varphi_\tau\|\,d\tau}\|h\|\cdot\|h_1\|. \tag{5.20}$$

De cette inégalité il s'ensuit qu'il est possible *primo* de prolonger $J^t_{t_0}$ en des fonctions de la forme (5.19), où la somme est déjà infinie, et *secundo* de prolonger $J^t_{t_0}$ à l'adhérence $\mathscr{F}(t_0,t)$ de l'espace vectoriel des fonctions (5.19) pour la norme

$$\|f(x_\tau)\|=\sup_{x_\tau\in\mathscr{P}(t_0,t)}|f(x_\tau)|.$$

Les fonctions de $\mathscr{F}(t_0,t)$ seront dites *intégrables*. L'inégalité (5.20) entraîne la majoration

$$\|J^t_{t_0}(f)\|\leqslant\|f(x_\tau)\|\cdot e^{\int_{t_0}^{t}\|\varphi_\tau\|\,d\tau} \tag{5.21}$$

pour toute fonction $f\in\mathscr{F}(t_0,t)$.

La valeur de $J^t_{t_0}$ sur la fonctionnelle $f\in\mathscr{F}(t_0,t)$ sera appelée *intégrale* et cette application, *intégration*.

Attirons l'attention sur le fait que $\mathscr{F}(t_0,t)$ est une algèbre de Banach et que $\mathscr{F}(s,v)$ peut pour $t_0\leqslant s<v\leqslant t$ être identifiée à la sous-algèbre de $\mathscr{F}(t_0,t)$ composée de toutes les fonctionnelles dont les valeurs ne sont définies que sur la restriction à $[s,v]$ des trajectoires de $\mathscr{P}(t_0,t)$.

Dans la suite nous aurons besoin de certaines «intégrales» que nous allons définir sans tarder. Considérons l'ensemble des fonctions de la forme

$$q(x_0,x_1,\dots,x_n;\tau_1,\dots,\tau_n)=\lambda(\tau_1,\dots,\tau_n)\,e_{\Delta_0}(x_0)\dots e_{\Delta_n}(x_n), \tag{5.22}$$

où $e_{\Delta_i}(x_i)$ sont les indicateurs des ensembles $\Delta_i\in\mathscr{B}$ et $\lambda(\tau_1,\dots,\tau_k)$ des fonctions bornées intégrables sur $[t_0,t]^k$. A chaque fonction de la forme (5.22) associons l'opérateur

$$I^{(k)}_{t_0t}(q)=\int_{t_0}^{t}\dots\int_{t_0}^{\tau_2}\lambda(\tau_1,\dots,\tau_k)\,E(\Delta_k)\,\varphi_{\tau_k}\cdot\dots\cdot E(\Delta_1)\,\varphi_{\tau_1}\,E(\Delta_0)\,d\tau_1\dots d\tau_k.$$

L'existence de cette intégrale résulte de la Bochner-intégrabilité de la fonction opératorielle $E(\Delta_k)\varphi_{\tau_k}\dots\varphi_{\tau_1}E(\Delta_0)$ et de l'intégrabilité de la fonction $\lambda(\tau_1,\dots,\tau_k)$.

Désignons par $\overset{\circ}{\mathscr{F}}{}^{(k)}(t_0,t)$ l'enveloppe linéaire des fonctions (5.22) et munissons-la de la norme

$$\|q\| = \sup_{\substack{(x_0,\dots,x_k)\in\mathbf{R}^{k+1}\\(\tau_1,\dots,\tau_k)\in[t_0,t]^k}} |q(x_0,\dots,x_k;\tau_1,\dots,\tau_k)|.$$

En prolongeant $I^{(k)}_{t_0t}$ par linéarité à $\overset{\circ}{\mathscr{F}}{}^{(k)}(t_0,t)$ en vertu de l'additivité de la décomposition de l'unité, on voit que la valeur de $I^{(k)}_{t_0t}$ sur les fonctions de $\overset{\circ}{\mathscr{F}}{}^{(k)}(t_0,t)$ ne dépend pas de leur représentation par telle ou telle combinaison linéaire de fonctions (5.22). Donc, toute fonction de $\overset{\circ}{\mathscr{F}}{}^{(k)}(t_0,t)$ peut être mise sous la forme

$$q(x_0,\dots,x_k;\tau_1,\dots,\tau_k) = \sum_{i_0,\dots,i_k} \lambda_{i_0\dots i_k}(\tau_1,\dots,\tau_k)\, e_{\Delta_{i_0}}(x_0)\dots e_{\Delta_{i_k}}(x_k), \qquad 5.23)$$

où Δ_i est une famille d'ensembles disjoints de $\mathscr{B}$. D'où, pour tous $h, h_1\in\mathscr{H}$,

$$|(I^{(k)}_{t_0t}(q)h,h_1)| \leqslant \sup_{\tau_1\dots\tau_k} |\lambda_{i_0,\dots,i_k}(\tau_1,\dots,\tau_k)| \int_{t_0}^{t}\dots\int_{t_0}^{\tau_2} \sum_{i_0,\dots,i_k} |(E(\Delta_{i_k})\varphi_{\tau_k}\cdot$$

$$\dots E(\Delta_{i_1})\varphi_{\tau_1}E(\Delta_{i_0})h,h_1)|\,d\tau_1,\dots,d\tau_k \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(t-t_0)^k}{k!}\, c^k_{t_0t} \sup_{\substack{x_0\dots x_k\\ \tau_1\dots\tau_k}} |q(x_0,\dots,x_k;\tau_1,\dots,\tau_k)|.$$

De cette majoration il résulte *primo* qu'il est possible de prolonger $I^{(k)}_{t_0t}$ à des sommes de la forme (5.23), puisque la décomposition de l'unité est fortement σ-additive, *secundo* de prolonger ensuite $I^{(k)}_{t_0t}$ à l'adhérence de $\overset{\circ}{\mathscr{F}}{}^{(k)}(t_0,t)$ pour la norme $\|q\|$ définie plus haut, adhérence que nous désignerons par $\mathscr{F}^{(k)}(t_0,t)$. L'espace $\mathscr{F}^{(k)}(t_0,t)$ est par construction une algèbre de Banach. Convenons de comprendre par «intégrale» $I^{(k)}_{t_0t}(q)$ l'expression

$$I^{(k)}_{t_0t}(q) = \int_{t_0}^{t}\dots\int_{t_0}^{\tau_2}\int_{\mathbf{R}^{k+1}} q(x_0,\dots,x_k;\tau_1,\dots,\tau_k)\,E(dx_k)\varphi_{\tau_k},\dots,\varphi_{\tau_1}E(dx_1)\,d\tau_1,\dots,d\tau_k.$$

3. Fonctionnelles sur l'espace des trajectoires constantes par morceaux. Dans ce numéro, on construit les projecteurs de l'algèbre des fonctionnelles intégrables $\mathscr{F}(t_0,t)$ dans l'algèbre des fonctionnelles non nulles uniquement sur les trajectoires constantes par morceaux présentant exactement k sauts.

Soit π une subdivision, $t_0 \leqslant s < v \leqslant t$. Introduisons la notation

$$p(\Delta;\, \pi(s,\, v)\,|x_\tau) = \prod_{s' \in \pi(s,\, v)} e_\Delta(x_{s'}).$$

Les trajectoires de $\mathscr{P}(t_0,\, t)$ étant continues à droite, la suite de fonctionnelles cylindriques $p(\Delta;\, \pi(s,\, v)\,|x_\tau)$ converge simplement mais pas uniformément vers la fonctionnelle

$$p(\Delta;\, (s,\, v)\,|x_\tau) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_\tau \in \Delta \text{ pour tout } s \leqslant \tau < v, \\ 0 & \text{s'il existe un } \tau_0 \in [s,\, v[\text{ tel que } x_{\tau_0} \notin \Delta. \end{cases}$$

Donc, $p(\Delta;\, (s,\, v)\,|x_\tau) \notin \mathscr{F}(t_0,\, t)$.

Soit Δ_i^ε un recouvrement de Δ par des ensembles disjoints de $\mathscr{B}$ où diam $\Delta_i^\varepsilon = \sup\limits_{x,\, y \in \Delta_i^\varepsilon} |x - y| < \varepsilon$. Alors, la série $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p(\Delta_i^\varepsilon;\ (s,\, v)\,|x_\tau)$ converge simplement, et de plus existe la limite

$$p^{(0)}(\Delta;\, (s,\, v)\,|x_\tau) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} p(\Delta_i^\varepsilon;\, (s,\, v)\,|x_\tau). \tag{5.24}$$

Prouvons l'existence de cette limite et établissons ses propriétés. Soit $\bar{x}_\tau$ une trajectoire telle qu'il existe des points $s \leqslant \tau_1 < \tau_2 < v$ tels que $\bar{x}_{\tau_1} \neq \bar{x}_{\tau_2}$. Alors $p(\Delta_i^\varepsilon;\ (s,\, v)\,|\bar{x}_\tau) = 0$ pour $\varepsilon < |\bar{x}_{\tau_1} - \bar{x}_{\tau_2}|/2$ et pour tout i. Si $\bar{x}_\tau = \text{const} \in \Delta$ pour tous $s \leqslant \tau < v$, il est alors évident que $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p(\Delta_i^\varepsilon;\ (s,\, v)\,|\bar{x}_\tau) = 1$ pour tout $\varepsilon > 0$. Donc, la fonctionnelle $p^{(0)}(\Delta;\ (s,\, v)\,|x_\tau)$ est l'indicateur de l'ensemble de toutes les trajectoires constantes sur $[s,\, v[$ et prenant leurs valeurs dans l'ensemble Δ_0 pour $\tau \in [s,\, v[$.

La fonctionnelle $p^{(0)}(\Delta;\ (s,\, v)\,|x_\tau)$ est essentielle pour la construction des fonctionnelles qui nous intéressent.

Soit $\pi(s,\, v)$ une subdivision. Numérotons les points de cette subdivision $s \leqslant s_1 < s_2 < \ldots < s_n < v$ et construisons la fonctionnelle

$$p(\Delta_0, \ldots, \Delta_k;\, \pi(s,\, v)\,|x_\tau) =$$

$$= \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant N} p^{(0)}(\Delta_0;\, (s,\, s_{i_1})\,|x_\tau)\, p^{(0)}(\Delta_1;\, (s_{i+1},\, s_{i_2})\,|x_\tau) \cdot$$

$$\ldots p^{(0)}(\Delta_k;\, (s_{i_k+1},\, v)\ (x_\tau)), \tag{5.25}$$

où $\Delta_{i-1} \cap \Delta_i = \varnothing$ pour tout $i \in [1,\, k]$.

Montrons que lorsque $|\pi(s,\, v)| \to 0$, la suite de fonctionnelles $p(\Delta_0, \ldots, \Delta_k;\, \pi(s,\, v)\,|x_\tau)$ converge vers la fonctionnelle $p(\Delta_0, \ldots, \Delta_k;\, (s,\, v)\,|x_\tau)$ qui est l'indicateur de l'ensemble des trajectoires constantes par morceaux présentant exactement k sauts sur $[s,\, v[$ et prenant leurs valeurs dans Δ_0 avant le premier saut, dans Δ_1 avant le second, et ainsi de suite.

La fonctionnelle $p(\Delta_0, \ldots, \Delta_k;\, \pi(x,\, s)\,|x_\tau)$ prend les valeurs 0 et 1 par construction. Supposons que pour une subdivision $\bar{\pi}(s,\, v)$ et une trajectoire

$\bar{x}_\tau$ l'on ait $p(\Delta_0, \ldots, \Delta_k; \bar{\pi}(s, v)|\bar{x}_\tau) = 1$ et en même temps $p(\Delta_0, \ldots, \Delta_k; (s, v)|x_\tau) = 0$.

Montrons qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que pour toutes les subdivisions vérifiant l'inégalité $|\pi(s, v)| < \varepsilon$ l'on ait

$$p(\Delta_0, \ldots, \Delta_k; \pi(s, v)|\bar{x}_\tau) = 0.$$

Par hypothèse il existe des points $s_{i_1}, s_{i_2}, \ldots, s_{i_k}$ tels que $\bar{x}_\tau$ est constante sur les ensembles $[s, s_{i_1}[, [s_{i_1} + \delta_1, s_{i_2}[, \ldots, [s_{i_k} + \delta_{i_k}, v[$, où $\delta_1, \ldots, \delta_k \leqslant |\bar{\pi}(s, v)|$ et prend respectivement ses valeurs dans $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_k$. Il existe en même temps un intervalle $[s_{i_p}, s_{i_p} + \delta_p]$, $1 \leqslant p \leqslant k$, et deux points $\tau_p^1 < \tau_p^2$ de cet intervalle tels que $\bar{x}_{s_{i_p}-0} \neq \bar{x}_{\tau_p^1}$; $\bar{x}_{\tau_p^1} \neq \bar{x}_{\tau_p^2}$; $\bar{x}_{\tau_p^2-0} \neq \bar{x}_{s_{i_p}} + \delta_p$. Alors la fonctionnelle $p(\Delta_0, \ldots, \Delta_k; \pi(s, v)|\bar{x}_\tau) = 0$ pour toute subdivision telle que $|\pi(s, v)| < \varepsilon = (\tau_p^2 - \tau_p^1)/2$. Il est évident que de $p(\Delta_0, \ldots, \Delta_k; (s, v)|x_\tau) = 1$ il s'ensuit que $p(\Delta_0, \ldots, \Delta_k; \pi(s, v)|x_\tau) = 1$ aussi pour toutes les subdivisions telles que $|\pi(s, v)|$ soit inférieure au plus petit écart entre les dates des sauts de la trajectoire x_τ. Ce qui prouve l'assertion annoncée.

Si $(\Delta_i)_{i \geqslant 1}$ est un recouvrement de $\mathbf{R}$ par des ensembles disjoints de $\mathscr{B}$, alors la fonctionnelle

$$p^{(k)}((\Delta_i)_{i \geqslant 1}; (s, v)|x_\tau) = \sum_{\substack{i_p \neq i_{p+1} \\ 0 \leqslant p \leqslant k-1}} p(\Delta_{i_0}, \ldots, \Delta_{i_k}; (s, v)|x_\tau) \qquad (5.26)$$

est la fonctionnelle caractéristique de l'ensemble de toutes les trajectoires constantes par morceaux sur $[s, v[$ présentant exactement k sauts, ces sauts ayant lieu uniquement d'un ensemble à l'autre du recouvrement $(\Delta_i)_{i \geqslant 1}$. Soit $(\Delta_i^\varepsilon)_{i \geqslant 1}$ une famille de recouvrements tels que $\operatorname{diam} \Delta_i^\varepsilon < \varepsilon$ pour tout $i \geqslant 1$. Montrons que la fonctionnelle caractéristique $p^{(k)}((s, v)|x_\tau)$ de l'ensemble de toutes les trajectoires constantes par morceaux sur $[s, v[$ présentant exactement k sauts sur $[s, v[$ se représente par la limite suivante :

$$p^{(k)}((s, v)|x_\tau) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} p^{(k)}((\Delta_i^\varepsilon); (s, v)|x_\tau), \qquad (5.27)$$

la convergence étant simple. Il nous suffit pour cela de montrer que si $p^{(k)}((s, v)|\bar{x}_\tau) = 1$, il existe un ε_0 tel que pour tous les $\varepsilon < \varepsilon_0$ l'on a $p^{(k)}((\Delta_i^\varepsilon)_{i \geqslant 1}; (s, v)|\bar{x}_\tau) = 1$. En posant par exemple $\varepsilon_0 = \frac{1}{4} \sup_{s \leqslant \tau < v} (\bar{x}_\tau - \bar{x}_{\tau-0})$, on est conduit à la proposition annoncée.

Considérons l'application qui à chaque fonctionnelle $f \in \mathscr{F}(t_0, t)$ associe la fonctionnelle

$$P^{(k)} f(x_\tau) = p^{(k)}((t_0, t)|x_\tau) f(x_\tau). \qquad (5.28)$$

Désignons par $\mathscr{F}_0^{(k)}(t_0, t)$ l'algèbre des fonctions obtenue à partir de l'algèbre $\mathscr{F}^{(k)}(t_0, t)$ par une application définie comme suit : soit $(\Delta_i^\varepsilon)_{i \geqslant 1}$ la famille de recouvrements envisagée ci-dessus. Pour toute fonction $f \in \mathscr{F}^{(k)}(t_0, t)$ la fonction $f_\varepsilon(x_0, \ldots, x_k; \tau_1, \ldots, \tau_k) = f(x_0, \ldots, x_k; \tau_1, \ldots, \tau_k \times$

$\times \sum_{i_0,\ldots,i_k} e_{\Delta_{i_0}^{\varepsilon}}(x_0)\ldots e_{\Delta_{i_k}^{\varepsilon}}(x_k)$ appartient de nouveau à $\mathscr{F}^{(k)}(t_0, t)$ quel que soit l'ensemble des indices A_k. Soit $A_k = \bigcap_{p=1}^{k} A_k^p$, où $A_k^p = \{(i_0, \ldots, i_k) : i_p \neq i_{p-1}\}$, $1 \leqslant p \leqslant k$. Lorsque $\varepsilon \downarrow 0$ la fonction f_ε tend visiblement vers une limite qui est confondue avec f partout sauf aux points de l'ensemble $\bigcup_{p=1}^{k} (x_0, \ldots, x_k; \tau_1, \ldots, \tau_k) : x_p = x_{p-1}\}$, où cette fonction est nulle. Posons

$$P_0^{(k)}(f) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} f \cdot \Sigma e_{\Delta_{i_0}^{\varepsilon}}(x_0) \ldots e_{\Delta_{i_k}^{\varepsilon}}(x_k). \tag{5.29}$$

Alors $\mathscr{F}_0^{(k)} = P_0^{(k)} \mathscr{F}^{(k)}(t_0, t)$ et $P_0^{(k)}$ est un homomorphisme continu de l'algèbre $\mathscr{F}^{(k)}(t_0, t)$ dans l'algèbre $\mathscr{F}_0^{(k)}(t_0, t)$ munie d'une convergence uniforme.

Lemme 5.2. *L'application $P^{(k)}$ est un homomorphisme continu de l'algèbre $\mathscr{F}(t_0, t)$ dans l'algèbre $\mathscr{F}_0^{(k)}(t_0, t)$.*

Démonstration. Montrons que $P^{(k)}$ applique $\overset{\circ}{\mathscr{F}}(t_0, t)$ dans $\mathscr{F}_0^{(k)}(t_0, t)$. Le lemme sera prouvé lorsqu'on aura établi la continuité de cette application.

Supposons que la fonctionnelle $f(x_\tau)$ est définie par la formule (5.18). Comme $[p^{(k)}((t_0, t)|x_\tau)]^2 = p^{(k)}(t_0, t)|x_\tau)$ et que $\mathscr{F}_0^{(k)}(t_0, t)$ est une algèbre, il nous suffit de montrer que pour la fonctionnelle

$$f(x_\tau) = e_\Delta(x_s), \qquad t_0 \leqslant s < t$$

on a $P^{(k)}(e_\Delta(x_s)) \in \mathscr{F}_0^{(k)}(t_0, t)$. De (5.27) et (5.28), on déduit par un calcul immédiat que

$$P^{(k)}(e_\Delta(x_s)) = P_0^{(k)}\left(\sum_{i=1}^{k+1} H(\tau_i - s)\, H(s - \tau_{i-1})\, e_\Delta(x_{i-1})\right),$$

où $H(\xi) = 0$ pour $\xi < 0$ et $H(\xi) = 1$ pour $\xi \geqslant 0$, $\tau_0 = t_0$, $\tau_{k+1} = t$ et $\tau_1, \ldots, \tau_k$ sont les dates des sauts d'une trajectoire constante par morceaux prenant respectivement les valeurs $x_0, x_1, \ldots, x_k$. La fonction $\sum_{i=1}^{k+1} H(\tau_1 - s) H(s - \tau_{i-1}) e_\Delta(x_{i-1})$ appartient par définiton à $\mathscr{F}^{(k)}(t_0, t)$, donc $P^{(k)}(e_\Delta(x_s)) \in \mathscr{F}_0^{(k)}(t_0, t)$. Reste maintenant à prouver la continuité de $P^{(k)}$. Or de (5.28) il vient pour toute fonctionnelle

$$\|P^{(k)} f\| = \sup_{x_\tau \in \mathscr{P}(t_0, t)} |p^{(k)}((t_0, t)|x_\tau) f|(x_\tau)| \leqslant \sup_{x_\tau \in \mathscr{P}(t_0, t)} |f|(x_\tau)| = \|f\|.$$

Ce qui prouve le lemme.

Convenons de désigner par $\mathscr{P}^{(k)}(t_0, t)$ l'ensemble des trajectoires constantes par morceaux sur $[t_0, t[$ et présentant exactement k sauts, et par

$\mathscr{P}^{(\infty)}(t_0, t)$ l'ensemble des trajectoires constantes par morceaux sur $[t_0, t[$, c'est-à-dire que

$$\mathscr{P}^{(\infty)}(t_0, t) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathscr{P}^{(k)}(t_0, t).$$

Ces définitions entraînent aussitôt que $\operatorname{supp} P^{(k)} f \subset \mathscr{P}^{(k)}(t_0, t)$ pour tout $f \in \mathscr{F}(t_0, t)$.

En conclusion, considérons l'application

$$(P^{(\infty)} f)(x_\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} (P^{(k)} f)(x_\tau) \tag{5.30}$$

qui à toute fonctionnelle intégrable $f \in \mathscr{F}(t_0, t)$ associe une fonctionnelle confondue avec f sur les trajectoires constantes par morceaux et égale à 0 sur toutes les autres trajectoires de $\mathscr{P}(t_0, t)$. La série (5.30) converge simplement de toute évidence. Désignons par $\mathscr{F}^{(\infty)}(t_0, t)$ l'algèbre $P^{(\infty)} \mathscr{F}(t_0, t)$.

4. Intégration sur les algèbres $\mathscr{F}_0^{(k)}(t_0, t)$ induite par l'intégration sur $\mathscr{F}(t_0, t)$. La définition de l'intégration nous donne

$$J_{t_0}^t(p(\Delta; \pi(s, v)|x_\tau)) = e^{\int_{s_N}^{t} \varphi_\tau d\tau} E(\Delta) e^{\int_{s_{N-1}}^{s_N} \varphi_\tau d\tau} \dots E(\Delta) e^{\int_{t_0}^{s_1} \varphi_\tau d\tau}, \tag{5.31}$$

où $s_1 < \dots < s_N$ sont les points de la subdivision $\pi(s, v)$.

Lemme 5.3. *On a la formule*

$$\lim_{|\pi(s, v)| \to 0} J_{t_0}^t(p(\Delta; \pi(s, v)|x_\tau)) = e^{\int_{v}^{t} \varphi_\tau d\tau} e^{\int_{s}^{v} E(\Delta) \varphi_\tau E(\Delta) d\tau} E(\Delta) e^{\int_{t_0}^{s} \varphi_\tau d\tau}. \tag{5.32}$$

Démonstration. Sur la formule (5.31) on voit que pour prouver la formule (5.32) il suffit d'établir que

$$\lim_{|\pi(s, v)| \to 0} J_s^v(p(\Delta; \pi(s, v)|x_\tau)) = e^{\int_{s}^{v} E(\Delta) \varphi_\tau E(\Delta) d\tau} E(\Delta). \tag{5.33}$$

Remarquons tout d'abord que la fonction $\varphi_\tau(\Delta) = E(\Delta) \varphi_\tau E(\Delta)$ vérifie avec φ_τ les conditions (T.1) et (T.2), donc le lemme 5.1 affirme l'existence du T-produit $v_\Delta(v|s) = e^{\int_{s}^{v} \varphi_\tau(\Delta) d\tau}$ qui est solution de l'équation

$$v_\Delta(v|s) = I + \int_s^v \varphi_\tau(\Delta) v_\Delta(\tau|s) d\tau. \tag{5.34}$$

Evaluons la différence $v_\Delta(v|s) E(\Delta) - E(\Delta) e^{\int_{s}^{v} \varphi_\tau d\tau} E(\Delta)$. La majoration (5.6) nous donne

$$\left\| \left(v_\Delta(v|s) - \left(I + \int_s^v \varphi_\tau(\Delta) d\tau \right) \right) E(\Delta) \right\| \leqslant \frac{1}{2} \left(\int_s^v \|\varphi_\tau\| d\tau \right)^2 e^{\int_{s}^{v} \|\varphi_\tau\| d\tau}$$

On s'est servi du fait que $\varphi_\tau(\Delta)\,E(\Delta)=\varphi_\tau(\Delta)$ et que $\|\varphi_\tau(\Delta)\|\leqslant\|\varphi_\tau\|$.

De façon analogue

$$\left\|E(\Delta)\left[e^{\int_s^v \varphi_\tau\,d\tau}-\left(I+\int_s^v \varphi_\tau\,d\tau\right)\right]E(\Delta)\right\|\leqslant\frac{1}{2}\left(\int_s^v \|\varphi_\tau\|\,d\tau\right)^2 e^{\cdots}$$

Or, comme $E^2(\Delta)=E(\Delta)$ et que $\varphi_\tau(\Delta)=E(\Delta)\,\varphi_\tau\,E(\Delta)$, il vient

$$\|v_\Delta(v|s)\,E(\Delta)-E(\Delta)\,e^{\int_s^v \varphi_\tau\,d\tau}\,E(\Delta)\|\leqslant\left(\int_s^v \|\varphi_\tau\|\,d\tau\right)^2 e^{\cdots}$$

Comme $v_\Delta(v|s)=E(\Delta)\,v_\Delta(v|s)\,E(\Delta)$, on est immédiatement conduit à la majoration

$$\|J^t_{t_0}(p(\Delta;\,\pi(s,\,v)|x_\tau))-e^{\int_s^v \varphi_\tau(\Delta)\,d\tau}\,E(\Delta)\|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{N} e^{\int_{s_k}^{v}\|\varphi_\tau(\Delta)\|\,d\tau}\cdot\|v_\Delta(s_k|s_{k-1})\,E(\Delta)-E(\Delta)\,e^{\int_{s_{k-1}}^{s_k}\varphi_\tau\,d\tau}\,E(\Delta)\|\cdot e^{\int_s^{s_{k-1}}\|\varphi_\tau\|\,d\tau}\leqslant$$

$$\leqslant e^{\int_s^v\|\varphi_\tau\|\,d\tau}\int_s^v\|\dot\varphi_\tau\|\,d\tau\cdot c_{sv}\,|\pi(s,v)|,$$

qui entraîne la proposition du lemme.

Vu que $p(\Delta;\,\pi(s,\,v)|x_\tau)\to p(\Delta;\,(s,\,v)|x_\tau)$ lorsque $|\pi(s,\,v)|\to 0$, nous posons

$$J^t_{t_0}(p(\Delta;\,(s,\,v)|x_\tau))=e^{\int_v^t\varphi_\tau\,d\tau}\,e^{\int_s^v\varphi_\tau(\Delta)\,d\tau}\,e^{\int_{t_0}^s\varphi_\tau\,d\tau}. \tag{5.34}$$

Prouvons une relation limite analogue à (5.24), c'est-à-dire calculons $J^t_{t_0}$ sur la fonctionnelle $p^{(0)}(\Delta;\,(s,\,v)|x_\tau)$.

On admettra qu'en plus des conditions (T.1) et (T.2) la fonction opératorielle φ_τ satisfait la condition : pour tous $0\leqslant s<v<\infty$, il existe une fonction strictement positive $\omega_{sv}(\xi)\downarrow 0$ lorsque $\xi\downarrow 0$ telle que

$$\text{(M)}\qquad\int_s^v\|E(\Delta)\,\varphi_\tau\,E(\Delta)\|\,d\tau\leqslant\omega_{sv}(\operatorname{diam}\Delta).$$

Lemme 5.4. *La série* $\sum_{i=1}^{\infty} J^t_{t_0}(p(\Delta_i^\varepsilon;\,(s,\,v)|x_\tau))$ *converge fortement pour tout* $\varepsilon>0$ *et*

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\sum_{i=1}^{\infty} J^t_{t_0}(p(\Delta_i^\varepsilon;\,(s,\,v)|x_\tau))=e^{\int_v^t\varphi_\tau\,d\tau}\,E(\Delta)\,e^{\int_{t_0}^s\varphi_\tau\,d\tau}. \tag{5.35}$$

pour la norme opératorielle.

Démonstration. Prouvons la convergence de la série $\sum_{i=1}^{\infty} e^{\int_v^s\varphi_\tau(\Delta_i)\,d\tau}\,E(\Delta_i)$ où $(\Delta_i)_{i\geqslant 1}$ est une famille quelconque d'ensembles

disjoints de $\mathscr{B}$. Remarquons que l'opérateur $\exp\left(\int_s^v \varphi_\tau(\Delta)\, d\tau\right)$ est invariant sur le sous-espace $E(\Delta)\mathscr{H}$. Donc, pour tout $h \in \mathscr{H}$

$$\left\| \sum_{i=k}^{N} e^{\int_s^v \varphi_\tau(\Delta)\, d\tau} E(\Delta_i)\, h \right\|^2 = \sum_{i=k}^{N} \left\| e^{\int_s^v \varphi_\tau(\Delta_i)\, d\tau} E(\Delta_i)\, h \right\|^2$$

Comme $\left\| e^{\int_s^v \varphi_\tau(\Delta)\, d\tau} \right\| \leqslant e^{\int_s^v \|\varphi_\tau\|\, d\tau}$, on obtient la majoration

$$\left\| \sum_{i=k}^{N} e^{\int_s^v \varphi_\tau(\Delta_i)\, d\tau} E(\Delta_i)\, h \right\| \leqslant e^{\int_s^v \|\varphi_\tau\|\, d\tau} \left\| \sum_{i=k}^{N} E(\Delta_i)\, h \right\|$$

qui entraîne la convergence de la série étudiée et la majoration uniforme par rapport à tout recouvrement $(\Delta_i^\varepsilon)_{i \geqslant 1}$ de l'ensemble Δ:

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} J_{t_0}^t \left(p\left(\Delta_i^\varepsilon;\, (s, v) \middle| x_\tau\right) h \right) \right\| \leqslant e^{\int_{t_0}^t \|\varphi_\tau\|\, d\tau} \left\| E(\Delta)\, h \right\|.$$

Evaluons maintenant la différence $\left\| E(\Delta)\, h - \sum_{i=1}^{\infty} e^{\int_s^v \varphi_\tau(\Delta_i^\varepsilon)\, d\tau} E(\Delta_i^\varepsilon)\, h \right.$. Comme $E(\Delta)\, h = \sum_{i=1}^{\infty} E(\Delta_i^\varepsilon)\, h$, il nous faut estimer la norme de l'opérateur $e^{\int_s^v \varphi_\tau(\Delta_i^\varepsilon)\, d\tau} E(\Delta_i^\varepsilon) - E(\Delta_i^\varepsilon)$. La condition (M) et la majoration (5.6) nous donnent

$$\left\| \left(e^{\int_s^v \varphi_\tau(\Delta_i^\varepsilon)\, d\tau} - I\right) E(\Delta_i^\varepsilon) \right\| \leqslant \frac{1}{2} \left(\int_s^v \left\| \varphi_\tau(\Delta_i^\varepsilon) \right\| d\tau \right)^2 e^{\int_s^v \|\varphi_\tau\|\, d\tau} \leqslant \frac{1}{2}\, \omega_{sv}(\varepsilon) \int_s^v \left\| \varphi_\tau \right\| d\tau \cdot e^{\int_s^v \|\varphi_\tau\|\, d\tau}.$$

Donc

$$\left\| E(\Delta)\, h - \sum_{i=1}^{\infty} e^{\int_s^v \varphi_\tau(\Delta_i^\varepsilon)\, d\tau} E(\Delta_i^\varepsilon)\, h \right\| \leqslant \frac{1}{2}\, \omega_{sv}(\varepsilon) \int_s^v \left\| \varphi_\tau \right\| d\tau\, e^{\int_s^v \|\varphi_\tau\|\, d\tau} \tag{5.36}$$

et, par suite, la somme de la serie $\sum_{i=1}^{\infty} e^{\int_s^v \varphi_\tau(\Delta_i^\varepsilon)\, d\tau} E(\Delta_i^\varepsilon)$ converge pour la norme opératorielle vers l'opérateur $E(\Delta)$ et ce uniformément en tous les $\Delta \in \mathscr{B}$, ce qui résulte de (5.36). Le lemme est prouvé.

La formule (5.35) combinée à la formule (5.24) nous permet de poser

$$J_{t_0}^t \left(p^{(0)}\left(\Delta;\, (s, v) \middle| x_\tau\right) \right) = e^{\int_s^t \varphi_\tau\, d\tau} E(\Delta)\, e^{\int_{t_0}^s \varphi_\tau\, d\tau}. \tag{5.37}$$

Trouvons, en calculant les limites correspondantes, la valeur de $J_{t_0}^t$ sur la fonctionnelle définie par la formule (5.25), ensuite sur la fonctionnelle $p\left(\Delta_0, \ldots, \Delta_k;\, (s, v) \middle| x_\tau\right)$ et enfin sur la fonctionnelle $p^{(k)}\left((s, v) \middle| x_\tau\right)$.

De la définition de l'intégration de $J^t_{t_0}$ il s'ensuit que pour une fonctionnelle $f \in \mathscr{F}(t_0, t)$ représentable sous la forme

$$f(x_\tau) = g(x_\tau)\,\varphi(x_\tau),$$

où $g \in \mathscr{F}(s, s')$, $\varphi \in \mathscr{F}(v, v')$, $t_0 \leqslant s < s' \leqslant v \leqslant v' \leqslant t$, on a

$$J^t_{t_0}(f) = e^{\int_{t_0}^{s} \varphi_\tau\, d\tau} J^{v'}_{v}(\varphi)\, e^{\int_{s'}^{v} \varphi_\tau\, d\tau} J^{s'}_{s}(g)\, e^{\int_{t_0}^{s} \varphi_\tau\, d\tau}.$$

De cette formule on déduit grâce aux lemmes 5.3 et 5.4 et à la formule (5.37) que

$$J^t_{t_0}(p(\Delta_0, \ldots, \Delta_k;\, \pi(s, v)\,|\,x_\tau)) =$$

$$= \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant N} e^{\int_{t_0}^{s} \varphi_\tau\, d\tau} E(\Delta)\, e^{\int_{\tau_k}^{s_{i_k+1}} \varphi_\tau\, d\tau} E(\Delta_{k-1}) \cdot \ldots \cdot e^{\int_{s_{i_1}}^{s_{i_1+1}} \varphi_\tau\, d\tau} E(\Delta_0)\, e^{\int_{t_0}^{s} \varphi_\tau\, d\tau}. \qquad (5.38)$$

L'opérateur $E(\Delta_j)\, e^{\int_{s_{ij}}^{s_{ij+1}} \varphi_\tau\, d\tau} E(\Delta_{j-1})$ est justiciable de la majoration

$$\left\| E(\Delta_j)\, e^{\int_{s_{ij}}^{s_{ij+1}} \varphi_\tau\, d\tau} E(\Delta_{j-1}) - \int_{s_{ij}}^{s_{ij+1}} E(\Delta_j)\, \varphi_\tau\, E(\Delta_{j-1})\, d\tau \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \int_{s_{ij}}^{s_{ij+1}} \|\varphi_\tau\|\, d\tau \cdot |\pi(s, v)|\, c_{sv}\, e^{\int_{s_{ij}}^{s_{ij+1}} \|\varphi_\tau\|\, d\tau}$$

qui découle de (5.6), de la condition (T.2) et du fait que

$$E(\Delta_j)\, E(\Delta_{j-1}) = 0 \quad \text{et} \quad \|E(\Delta_j)\, \varphi_\tau\, E(\Delta_{j-1})\| \leqslant \|\varphi_\tau\|.$$

D'où il vient pour l'opérateur (5.38)

$$\left\| J^t_{t_0}(p(\Delta_0, \ldots, \Delta_k;\, \pi(s, v)\,|\,x_\tau)) - \right.$$

$$\left. - e^{\int_{v}^{s} \varphi_\tau\, d\tau} \int_{s}^{v} \ldots \int_{s}^{\tau_2} E(\Delta_k)\, \varphi_{\tau_k} \cdot \ldots \cdot \varphi_{\tau_1} E(\Delta_0)\, d\tau_1 \ldots d\tau_k\, e^{\int_{t_0}^{s} \varphi_\tau\, d\tau} \right\| \leqslant$$

$$\leqslant e^{\int_{t_0}^{s} \|\varphi_\tau\|\, d\tau} (e^{|\pi(s, v)|} - 1) \int_{s}^{v} \cdots \int_{s}^{\tau_2} \|\varphi_{\tau_k}\| \cdot \ldots \cdot \|\varphi_{\tau_1}\|\, d\tau_1 \ldots d\tau_k,$$

inégalité qui montre que

$$\lim_{|\pi(s, v)| \to 0} J^t_{t_0}(p(\Delta_0, \ldots, \Delta_k;\, \pi(s, v)\,|\,x_\tau)) =$$

$$= e^{\int_{v}^{s} \varphi_\tau\, d\tau} \left(\int_{s}^{v} \cdots \int_{s}^{\tau_2} E(\Delta_k)\, \varphi_{\tau_k} \ldots E(\Delta_1)\, \varphi_{\tau_1} E(\Delta_0)\, d\tau_1 \ldots d\tau_k \right) e^{\int_{t_0}^{s} \varphi_\tau\, d\tau}.$$

la convergence étant une convergence pour la norme opératorielle. Donc

$$J^t_{t_0}(p(\Delta_0, \ldots, \Delta_k; (s, v)|x_\tau)) =$$

$$= e^{\int_s^v \varphi_\tau d\tau} \left(\int_s^v \ldots \int_s^{\tau_2} E(\Delta_k)\, \varphi_{\tau_k} \ldots E(\Delta_0)\, d\tau_1 \quad . d\tau_k \right) e^{\int_{t_0}^s \varphi_\tau d\tau}. \tag{5.39}$$

La condition (M) permet de définir l'intégrale de fonctions de l'algèbre $\mathscr{F}_0^{(k)}(t_0, t)$, c'est-à-dire de prouver l'existence de la limite

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} I^{(k)}_{t_0 t} \left(f \sum_{(i_0, \ldots, i_k) \in A_k} e_{\Delta^\varepsilon_{i_0}}(x_0) \ldots e_{\Delta^\varepsilon_{i_k}}(x_k) \right).$$

On peut alors en vertu de la formule (5.29) définir sur $\mathscr{F}_0^{(k)}(t_0, t)$ une intégration induite à partir de l'intégration de $I^{(k)}_{t_0 t}$.

Lemme 5.5. *Si la condition* (M) *est remplie, on a l'égalité*

$$\int_{t_0}^t \ldots \int_{t_0}^{\tau_2} f(x_0, \ldots, x_k; \tau_1, \ldots, \tau_k)\, E(dx_k)\, \varphi_{\tau_k} \ldots \varphi_{\tau_1} E(dx_0)\, d\tau_1 \ldots d\tau_k =$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} I^{(k)}_{t_0 t}(f \sum_{(i_0, \ldots, i_k) \in A_k} e_{\Delta^\varepsilon_{i_0}} \ldots e_{\Delta^\varepsilon_{i_k}}). \tag{5.40}$$

Démonstration. Pour établir cette formule il suffit de montrer qu'elle est valable pour les fonctions (5.22). Supposons que $\overline{A}_k = \bigcup_{p=1}^k \overline{A}_p^k$, où $\overline{A}_p^k = \{(i_0, \ldots, i_k) : i_p = i_{p-1}\}$, $1 \leqslant p \leqslant k$. On a alors

$$I^{(k)}_{t_0 t}(f) = \int_{t_0}^t \ldots \int_{t_0}^{\tau_2} \lambda(\tau_1, \ldots, \tau_k)\, E(\Delta_k)\, \varphi_{\tau_k} \ldots \varphi_{\tau_1} E(\Delta_0) d\tau_1 \ldots d\tau_k =$$

$$= I^{(k)}_{t_0 t}(f \sum_{(i_0, \ldots, i_k) \in A_k} e_{\Delta^\varepsilon_{i_k}} \ldots e_{\Delta^\varepsilon_{i_0}}) + I^{(k)}_{t_0 t}(f \sum^{\cdot}_{(i_0, \ldots, i_k) \in A_k} e_{\Delta^\varepsilon_{i_k}} \ldots e_{\Delta^\varepsilon_{i_0}})$$

Evaluons le second terme. Pour tous $h, h_1 \in \mathscr{H}$, on a

$$\left| (I^{(k)}_{t_0 t}(f \sum_{(i_0, \ldots, i_k) \in A_k} - e_{\Delta^\varepsilon_{i_k}} \ldots e_{\Delta^\varepsilon_{i_0}})\, h, h_1) \right| \leqslant \sup_{t_0 \leqslant \tau_1 \leqslant \ldots \leqslant \tau_k \leqslant t} |\lambda(\tau_1, \ldots, \tau_k)| \cdot$$

$$\int_{t_0}^t \ldots \int_{t_0}^{\tau_2} \sum_{p=1}^k \sum_{i_0, \ldots, i_{p-1}, i_{p+1}, \ldots, i_k} \left| \left(E(\Delta^\varepsilon_{i_k}) \varphi_{\tau_k} \ldots E(\Delta^\varepsilon_{i_{p-1}}) \varphi_{\tau_p} E\left|\Delta^\varepsilon_{i_{p-1}}\right.\right) \times \right.$$

$$\left. \ldots \times \varphi_{\tau_1} E(\Delta_{i_0}) h, h_1) \right| d\tau_1 \ldots d\tau_k \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{t_0 \leqslant \tau_1 \leqslant \ldots \leqslant \tau_k \leqslant t} |\lambda|\tau_1, \ldots, \tau_k)| \int_{t_0}^t \ldots \int_{t_0}^{\tau_2} \sum_{p=1}^k \|\varphi_{\tau_k}\| \ldots$$

$$\cdot (\sup_{i_{p-1}} \|E(\Delta^\varepsilon_{i_{p-1}}) \varphi_{\tau_p} E(\Delta^\varepsilon_{i_{p-1}})\| \cdot \ldots \cdot \|\varphi_{\tau_1}\| \cdot \|h\| \cdot \|h_1\|\, d\tau_1 \quad .. d\tau_k \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{t_0 \leqslant \tau_1 \leqslant \ldots \leqslant \tau_k \leqslant t} |\lambda|\tau_1, \ldots, \tau_k)| \frac{(t-t_0)^{k-1}}{(k-1)!} c^{k-1}_{t_0 t}(t-t_0)\, \omega_{t_0 t}(\varepsilon) \cdot \|h\|\, \|h_1\|$$

Nous avons ainsi prouvé que pour toute fonction $f \in \mathscr{F}^{(k)}_{t_0 t}$

$$\left\| I^{(k)}_{t_0 t}(f) - I^{(k)}_{t_0 t}\left(f \sum_{(i_0,\dots,i_k)\in A_k} e_{\Delta^{\varepsilon}_{i_0}} \dots e_{\Delta^{\varepsilon}_{i_k}}\right)\right\| \leqslant \|f\|_{\mathscr{F}^{(k)}_{(t_0 t)}} \omega_{t_0 t}(\varepsilon) \frac{c^{k-1}_{t_0 t}}{(k-1)!}(t-t_0)^k .$$

Donc, lorsque $\varepsilon \downarrow 0$, on obtient la formule (5.40), ce qui prouve le lemme.

La formule (5.40) nous permet de définir l'intégration de fonctions de $\mathscr{F}^{(k)}_0(t_0, t)$ en posant pour tout $f_0 \in \mathscr{F}^{k}_0(t_0, t)$

$$I^{(k)}_{t_0 t}(f_0) = I^{(k)}_{t_0 t}(f),$$

où f est une fonction arbitraire de $\mathscr{F}^{(k)}(t_0, t)$ telle que $P^{(k)}_0 f = f_0$. Donc, pour tous $\Delta_0, \dots, \Delta_k$

$$J^t_{t_0}\left(p(\Delta_0, \dots, \Delta_k\ (s, v)|x_\tau)\, p^{(k)}((s, v)|x_\tau)\right) =$$

$$= e^{\int_v^t \varphi_\tau d\tau} \int_s^v \dots \int_s^{\tau_2} E(\Delta_k)\, \varphi_{\tau_k} \dots \varphi_{\tau_1} E(\Delta_0)\, d\tau_1 \dots d\tau_k \cdot e^{\int_{t_0}^s \varphi_\tau d\tau}. \quad (5.41)$$

Mais contrairement à (5.39), la fonctionnelle $p(\Delta_0, \dots, \Delta_k\ (s, v)|x_\tau)$ est dans ce cas fonctionnelle caractéristique de toutes les trajectoires constantes par morceaux présentant au plus k sauts et prenant leurs valeurs successivement dans les ensembles $\Delta_0, \dots, \Delta_k$.

Lemme 5.6. *Si la condition* (M) *est remplie, on a la formule*

$$J^t_{t_0}\left(p^{(k)}((t_0, t)|x_\tau)\, f(x_\tau)\right) = I^{(k)}_{t_0 t}(P^{(k)} f) \quad (5.42)$$

pour toute fonction $f \in \mathscr{F}(t_0, t)$ *et tout* k *naturel.*

Démonstration. Dans le lemme 5.2, nous avons établi la continuité de l'application $P^{(k)}: \mathscr{F}(t_0, t) \to \mathscr{F}^{(k)}_0(t_0, t)$, donc la formule (5.42) sera prouvée lorsqu'on l'aura établie pour les fonctions de $\overset{\circ}{\mathscr{F}}(t_0, t)$. Supposons que $f(x_\tau)$ est définie par la formule (5.18). Considérons la fonctionnelle

$$\varphi_\delta(x_\tau) = f(x_\tau) \prod_{i=1}^{N-1} p^{(k_i)}((t_i + \delta, t_{i+1} - \delta)|x_\tau) \times$$

$$\times\, p^{(k_0)}((t_0, t_1 - \delta)(x_\tau)\, p^{(k_N)}((t_N + \delta, t)|x_\tau).$$

Par analogie avec la formule (5.38) il vient

$$J^t_{t_0}(\varphi_\delta(x_\tau)) =$$

$$= J^t_{t_N+\delta}\left(p^{(k_N)}((t_N + \delta, t)|z_\tau)\right) \prod_{i=1}^{N-1} \left[\left[J^{t_i+1-\delta}_{t_i+\delta}\left(p^{(k_i)}((t_i + \delta, t_i - \delta)|x_\tau)\right) \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times\, e^{\int_{t_i}^{t_i+\delta} \varphi_\tau d\tau} E(\Delta_i)\, e^{\int_{t_i-\delta}^{t_i} \varphi_\tau d\tau} \right]\right] \cdot J^{t_1-\delta}_{t_0}\left(p^{(k_0)}((t_0, t_1 - \delta)|x_\tau)\right).$$

(Les opérateurs des crochets autonomes se multiplient ici dans l'ordre de croissance de l'indice i.)

Lorsque $\delta \downarrow 0$, la fonctionnelle $\varphi_\delta(x_\tau)$ tend vers la fonctionnelle caractéristique de l'ensemble de toutes les trajectoires constantes par morceaux présentant k_i sauts sur $[t_i+\delta,\ t_{i+1}-\delta[$. Les dates t_i sont soit des points de continuité, soit des dates de saut, et $x_{t_i} \in \Delta_i$. Dans le même temps

$$\lim_{\delta \downarrow 0} J_{t_0}^t(\varphi_\delta(x_\tau)) =$$

$$= \prod_{i=0}^{N} {}^{i} [\![J_{t_i}^{t_{i+1}} (p^{(k_i)}((t_i, t_{i+1})|x_\tau))\, E(\Delta_i)]\!], \tag{5.43}$$

où $\Delta_0 = \mathbf{R}$.

En effet, lorsque $\delta \downarrow 0$ l'opérateur $e^{\int_{t_i}^{t_i+\delta} \varphi_\tau d\tau} E(\Delta_i) e^{\int_{t_i-\delta}^{t_i} \varphi_\tau d\tau}$ converge en norme vers $E(\Delta_i)$, et la fonction opératorielle $J_s^v(p^{(k)}((s,v)|x_\tau))$ est une fonction continue en s et v, ainsi qu'il résulte de la formule (5.41) et des conditions (T.1) et (T.2). Montrons maintenant que

$$\lim_{\delta \downarrow 0} J_{t_0}^t(\varphi_\delta(x_\tau)\, p^{(k)}((t_0, t)|x_\tau)) = \lim_{\delta \downarrow 0} J_{t_0}^t(\varphi_\delta(x_\tau)),$$

où $k = k_0 + k_1 + \ldots + k_N$. Considérons à cet effet les fonctionnelles

$$p^{(k)}((s,v)|\Delta, \Delta'|x_\tau) = p(\Delta, \mathbf{R}, \ldots, \mathbf{R}, \Delta';\ (s,v)|x_\tau) \cdot p^{(k)}((s,v)|x_\tau),$$

La fonctionnelle caractéristique de l'ensemble de toutes les trajectoires constantes par morceaux sur $[s, v[$ présentant exactement k sauts sur $[s, v[$ telles que $x_s \in \Delta$, $x_{v-0} \in \Delta'$, ainsi que la fonctionnelle

$$\varphi_{\varepsilon,\delta}(x_\tau) = f(x_\tau) \sum_{l_1, \ldots, l_N} \prod_{i=1}^{N-1} p^{(k_i)}((t_i+\delta,\ t_{i+1}-\delta)|\Delta_{l_i}^\varepsilon,\ \Delta_{l_{i+1}}^\varepsilon|x_\tau) \times$$

$$\times\, p^{(k_0)}((t_0, t_1-\delta|\mathbf{R},\ \Delta_{l_1}^\varepsilon|x_\tau))\, p^{(k_N)}((t_N+\delta, t)|\Delta_{l_N}^\varepsilon,\ \mathbf{R}|x_\tau).$$

La fonctionnelle $\varphi_{\varepsilon,\delta}(x_\tau)$ est la fonctionnelle caractéristique de l'ensemble des trajectoires douées des propriétés suivantes: sur les intervalles $[t_i+\delta,\ t_{i+1}-\delta[$, les trajectoires sont constantes par morceaux et présentent k sauts: pour $\tau = t_i$, $x_{t_i} \in \Delta_i$, $x_{t_i-\delta-0} \in \Delta_{l_i}^\varepsilon$ et $x_{t_i+\delta} \in \Delta_{l_i}^\varepsilon$.

Calculons $J_{t_0}^t(\varphi_{\varepsilon,\delta})$:

$$J_{t_0}^t(\varphi_{\varepsilon,\delta}) = \sum_{l_1, \ldots, l_N} \prod_{i=1}^{N-1} {}^{i} [\![J_{t_i+\delta}^{t_{i+1}-\delta} (p^{(k_i)}(t_i+\delta, t_{i+1}-\delta)|x_\tau)) \times$$

$$\times E(\Delta_{l_i}^\varepsilon)\, e^{\int_{t_i}^{t_i+\delta} \varphi_\tau d\tau} E(\Delta_i)\, e^{\int_{t_i-\delta}^{t_i} \varphi_\tau d\tau} E(\Delta_{l_i}^\varepsilon)]\!] \times$$

$$\times\, {}^{N} [\![J_{t_N+\delta}^{t} (p^{(k_N)}((t_N+\delta, t)|x_\tau)\, E(\Delta_{l_N}^\varepsilon)\, e^{\int_{t_N}^{t_N+\delta} \varphi_\tau d\tau} E(\Delta_N)\, e^{\int_{t_N-\delta}^{t_N} \varphi_\tau d\tau} E(\Delta_{l_N}^\varepsilon)] \times$$

$$\times [\![J_{t_0}^{t_1-\delta} (p^{(k_0)}((t_0, t_1-\delta)|x_\tau))]\!].$$

Signalons que pour tout $h \in \mathscr{H}$

$$\left\| \left(\sum_{l_i=1}^{\infty} E(\Delta_{l_i}^{\varepsilon}) e^{\int_{t_i}^{t_i+\delta} \varphi_\tau d\tau} E|\Delta_i \right) e^{\int_{t_i-\delta}^{t_i} \varphi_\tau d\tau} E(\Delta_{l_i}^{\varepsilon}) - E(\Delta_i) h \right\|^2 =$$

$$= \sum_{l_i=1}^{\infty} \| E(\Delta_{l_i}^{\varepsilon}) [e^{\int_{t_i}^{t_i+\delta} \varphi_\tau d\tau} E(\Delta_i) e^{\int_{t_i-\delta}^{t_i} \varphi_\tau d\tau} - E(\Delta_i)] E(\Delta_{l_i}^{\varepsilon}) h \|^2.$$

Or, la norme de l'opérateur $e^{\int_{t_i}^{t_i+\delta} \varphi_\tau d\tau} E(\Delta_i) e^{\int_{t_i-\delta}^{t_i} \varphi_\tau d\tau} - E(\Delta_i)$ tend vers 0, puisque la formule (5.6) entraîne la majoration

$$\| e^{\int_s^v \varphi_\tau d\tau} - I \| \leqslant \int_s^v \| \varphi_\tau \| d\tau + \frac{1}{2} \left(\int_s^v \| \varphi_\tau \| d\tau \right)^2 e^{\int_s^v \| \varphi_\tau \| d\tau},$$

donc

$$\left\| E(\Delta_i) - \sum_{l_i=1}^{\infty} E(\Delta_{l_i}^{\varepsilon}) e^{\int_{t_i}^{t_i+\delta} \varphi_\tau d\tau} E(\Delta_i) e^{\int_{t_i-\delta}^{t_i} \varphi_\tau d\tau} E(\Delta_{l_i}^{\varepsilon}) \right\| \to 0$$

lorsque $\delta \to 0$. Ainsi nous avons obtenu l'égalité suivante:

$$\lim_{\delta \downarrow 0} J_{t_0}^{t} (\varphi_{\varepsilon, \delta}(x_\tau)) = \lim_{\delta \downarrow 0} J_{t_0}^{t} (\varphi_\delta(x_\tau)).$$

En outre, la fonctionnelle $\lim_{\delta \to 0} \varphi_{\varepsilon, \delta}(x_\tau)$ est la fonctionnelle caractéristique de l'ensemble des trajectoires constantes par morceaux sur $[t_i, t_{i+1}[$ et à l'instant t_i on a $x_{t_i - 0} \in \Delta_{l_i}^{\varepsilon}$ et $x_{t^i} \in \Delta_{l_i}^{\varepsilon}$. En faisant $\varepsilon \downarrow 0$, on trouve que

$$\lim_{\varepsilon, \delta \downarrow 0} J_{t_0}^{t} (\varphi_{\varepsilon, \delta}(x_\tau)) = \lim_{\delta \to 0} J_{t_0}^{t} (\varphi_\delta(x_\tau)). \tag{5.44}$$

Mais la fonctionnelle $\lim_{\varepsilon, \delta \to 0} \varphi_{\varepsilon, \delta}(x_\tau)$ sera déjà fonctionnelle caractéristique de l'ensemble des trajectoires constantes par morceaux présentant k_i sauts sur les intervalles $[t_i, t_{i+1}[$, les points t_i étant des points de continuité et $x_{t_i} \in \Delta_i$. Signalons que les fonctionnelles $\varphi_\delta(x_\tau)$ et $\varphi_{\varepsilon, \delta}(x_\tau)$ dépendent aussi du choix des nombres $k_0, k_1, \ldots, k_N$. Traduisons cette dépendance dans les notations. Au lieu de φ_δ et $\varphi_{\varepsilon, \delta}$ on écrira respectivement $\varphi_\delta(x_\tau; k_0, \ldots, k_N)$ et $\varphi_{\varepsilon, \delta}(x; k_0, \ldots, k_N)$. De la définition de $\varphi_{\varepsilon, \delta}(x_\tau; k_0, \ldots, k_N)$ il vient

$$f(x_\tau) p^{(k)}((t_0, t)|x_\tau) = \sum_{k_0 + \ldots + k_N = k} \lim_{\varepsilon, \delta \downarrow 0} \varphi_{\varepsilon, \delta}(x_\tau; k_0, \ldots, k_N).$$

Donc

$$J_{t_0}^{t} (f(x_\tau) p^{(k)}((t_0, t)|x_\tau)) = \sum_{k_0 + \ldots + k_N = k} \lim_{\varepsilon, \delta \downarrow 0} J_{t_0}^{t} (\varphi_{\varepsilon, \delta}(x_\tau)).$$

Mais grâce aux formules (5.44) et (5.43) on voit que

$$J_{t_0}^{t}\left(f(x_\tau)\, p^{(k)}\left((t_0,t)\middle|x_\tau\right)\right)=$$

$$=\sum_{k_0+\ldots+k_N=k}\prod_{i=0}^{N}\left[\!\left[J_{t_i}^{t_{i+1}}\left(p^{(k_i)}\left((t_i,t_{i+1})\middle|x_\tau\right)E(\Delta_i)\right)\right]\!\right]. \tag{5.45}$$

La formule (5.41) nous donne

$$J_{t_i}^{t_{i+1}}\left(p^{(k_i)}\left((t_i,t_{i+1})\middle|x_\tau\right)\right)=\int_{t_i}^{t_{i+1}}\ldots\int_{t_i}^{\tau_2}\varphi_{\tau_{k_i}}\cdot\ldots\cdot\varphi_{\tau_1}\,d\tau_1\ldots d\tau_{k_i}.$$

En portant la valeur de $J_{t_i}^{t_{i+1}}\left(p^{(k_i)}\left((t_i,t_{i+1})\middle|x_\tau\right)\right)$ dans (5.45) et en comparant la valeur obtenue à celle de $I_{t_0t}^{(k)}(P^{(k)}f)$ qui est donnée par la formule

$$\int_{t_0}^{t}\ldots\int_{t_0}^{t_2}(P^{(k)}f)(x_0,\ldots,x_k;\tau_1,\ldots,\tau_k)\,E(dx_k)\,\varphi_{\tau_k}\ldots\varphi_{\tau_1}\,E(dx_0)\,d\tau,$$

où en vertu du lemme 5.2

$$P^{(k)}\left(f(x_\tau)\right)=\prod_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{k+1}H(\tau_j-t_i)\,H(t_i-\tau_{j-1})\,e_{\Delta_i}(x_{j-1}),$$

on voit que la formule (5.42) est valable pour $f(x_\tau)=e_{\Delta_1}(x_{t_1})\ldots e_{\Delta_N}(x_{t_N})$, donc pour les fonctions de $\overset{\circ}{\mathscr{F}}(t_0,t)$, ce qui achève la démonstration du lemme.

La formule (5.42) peut être traitée comme une formule définissant une intégrale sur l'ensemble des trajectoires constantes par morceaux présentant k sauts.

Une conséquence importante de la formule (5.42) est la proposition suivante.

Théorème 5.1. *La série*

$$\sum_{k=0}^{\infty}J_{t_0}^{t}\left(p^{(k)}\left((t_0,t)\middle|x_\tau\right)f(x_\tau)\right)$$

converge pour toute fonction $f\in\overset{\circ}{\mathscr{F}}(t_0,t)$ *et l'on a l'égalité*

$$J_{t_0}^{t}\left(f(x_\tau)\right)=\sum_{k=0}^{\infty}J_{t_0}^{t}\left(p^{(k)}\left((t_0,t)\middle|x_\tau\right)f(x_\tau)\right). \tag{5.46}$$

Démonstration. De la formule (5.42) et de la définition de l'intégration $I_{t_0t}^{(k)}$ il vient

$$\left\|J_{t_0}^{t}\left(p^{(k)}\left((t_0,t)\middle|x_\tau\right)f(x_\tau)\right)\right\|=\left\|I_{t_0t}^{(k)}(P^{(k)}f)\right\|\leqslant$$

$$\leqslant\left\|f(x_\tau)\right\|\int_{t_0}^{t}\ldots\int_{t_0}^{\tau_2}\left\|\varphi_{\tau_k}\right\|\ldots\left\|\varphi_{\tau_1}\right\|d_{\tau_1}\ldots d\tau_k\leqslant\left\|f(x_\tau)\right\|\frac{c_{t_0t}^{k}}{k!}(t-t_0)^k.$$

Donc, la série $\sum_{k=0}^{\infty} \left\| J_{t_0}^{t} \left(p^{(k)} \left((t_0, t) | x_\tau \right) \right) \right\|$ converge et, partant, la série $\sum_{k=0}^{\infty} J_{t_0}^{t} \left(p^{(k)} \left((t_0, t) | x_\tau \right) \right)$ et l'on a la majoration

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} J_{t_0}^{t} \left(P^{(k)} \left((t_0, t) | x_\tau \right) f(x_\tau) \right\| \leqslant \left\| f(x_\tau) \right\| e^{c_{t_0 t} (t - t_0)}.$$

Passons maintenant à la démonstration de la formule (5.46). Cette majoration nous dit qu'il suffit de démontrer la formule (5.46) pour les fonctionnelles $\overset{\circ}{\mathscr{F}}(t_0, t)$, donc, en vertu de la linéarité de $J_{t_0}^{t}$, uniquement pour les fonctionnelles (5.18). Bien plus, il suffit de prouver que

$$J_{t_0}^{t} \left(1 (x_\tau) \right) = \sum_{k=0}^{\infty} J_{t_0}^{t} \left(p^{(k)} (x_\tau) \right), \tag{5.47}$$

où $1 (x_\tau)$ est une fonctionnelle identiquement égale à 1. La formule (5.18′) nous donne

$$J_{t_0}^{t} \left(1 (x_\tau) \right) = e^{\int_{t_0}^{t} \varphi_\tau \, d\tau},$$

et la formule (5.41)

$$J_{t_0}^{t} \left(p^{(k)} \left((t_0, t) | x_\tau \right) \right) = \int_{t_0}^{t} \ldots \int_{t_0}^{\tau_2} \varphi_{\tau_k} \ldots \varphi_{\tau_1} \, d\tau_1 \ldots d\tau_k.$$

D'autre part, en comparant la formule obtenue avec la formule (5.12), on constate que la formule (5.47) a bien lieu. La formule (5.42) appliquée à une fonctionnelle (5.18) nous donne

$$J_{t_0}^{t} \left(f(x_\tau) \, p^{(k)} (t_0, t) \right) =$$

$$= \sum_{k_0 + \ldots + k_N = k} J_{t_N}^{t} \left(p^{(k_N)} \left((t_N, t) | x_\tau \right) \right) E (\Delta_N) \ldots E (\Delta_1) J_{t_0}^{t_1} \left(p^{(k_0)} \left((t_0, t_1) | x_\tau \right) \right).$$

Considérons la somme suivante dont chaque terme est défini par la formule précédente:

$$S_1 = \sum_{k=0}^{M} J_{t_0}^{t} \left(f | x_\tau \right) p^{(k)} \left((t_0, t) | x_\tau \right) \tag{5.48}$$

et le produit

$$S_2 = \sum_{k_N=0}^{M_N} J_{t_N}^{t} \left(p^{(k_N)} \left((t_N, t) | x_\tau \right) \right) E (\Delta_N) \sum_{k_{N-1}}^{M_{N-1}} J_{t_{N-1}}^{t_N} \left(p^{(k_{N-1})} \left((t_{N-1}, t_N) | x_\tau \right) \right)$$

$$\ldots E (\Delta_1) \sum_{k_0=0}^{M_0} J_{t_2}^{t_1} \left(p^{(k_0)} \left((t_0, t) | x_\tau \right) \right). \tag{5.49}$$

La formule (5.47) nous dit que l'opérateur défini par la formule (5.49) converge en norme vers l'opérateur $J^t_{t_0}(f(x_\tau))$ lorsque $M_0, \ldots, M_N \to \infty$. Prenons M_i tel que $(N+1)M \leqslant \min(M_0, \ldots, M_N)$. La différence des opérateurs définis par les formules (5.48) et (5.49) se majore alors comme suit:

$$\|S_1 - S_2\| \leqslant \left\| \sum_{k_N = M}^{M_N} J^t_{t_N} \left(p^{(kN)}((t_N, t)|x_\tau)\right) \right\| \cdot \ldots \cdot \left\| \sum_{k_0 = M}^{M_0} J^{t_1}_{t_0} \left(p^{(k_0)}((t_0, t_1)|x_\tau)\right) \right\|.$$

Ce qui prouve la formule (5.46).

Traitons la formule (5.42) comme une formule définissant l'intégration sur l'ensemble des trajectoires constantes par morceaux présentant k sauts. Le théorème peut être interprété de la manière suivante: la série $\sum_{k=0}^{\infty} J^t_{t_0}\left(p^{(k)}((t_0, t)|x_\tau) f(x_\tau)\right)$ définit l'intégration sur l'ensemble de toutes les trajectoires constantes par morceaux et de plus les intégrales de toute fonctionnelle intégrable $f(x_\tau)$ prennent la même valeur sur l'ensemble de toutes les trajectoires et sur l'ensemble des trajectoires constantes par morceaux. Donc, l'intégrale est définie uniquement par les valeurs des fonctionnelles sur les trajectoires constantes par morceaux et ne dépend pas des valeurs prises par la fonctionnelle sur les autres trajectoires.

5. Incompatibilité du spectre et la condition (M). Dans ce numéro on se propose d'étudier quelques propositions entraînant la condition (M). Supposons que la fonction φ_τ envisagée au n° 1 prend ses valeurs dans une algèbre de Banach $\mathscr{B}_{s,l}(\mathbf{R}^2)$ et satisfait les conditions (T.1) et (T.2). Soient C et B des générateurs dans un espace hilbertien $\mathscr{H}$, C étant de degré s et commutant à la décomposition de l'unité E, B vérifiant une condition que nous appellerons *condition d'incompatibilité du spectre*. L'opérateur hermitien $A = \int_{-\infty}^{\infty} x\, E(dx)$ est relié de façon naturelle à la décomposition de l'unité E.

Définition. On dira que les opérateurs A et B possèdent un *spectre incompatible* s'il existe une fonction positive $\omega(\varepsilon, \delta) \downarrow 0$ lorsque $\varepsilon \downarrow 0$ pour tout $\delta > 0$ telle que

$$\sup_{p:|p| \geqslant \delta > 0} \|E(\Delta) e^{ipB} E(\Delta)\| \leqslant \omega(\operatorname{diam} \Delta, \delta)(1 + |p|)^l.$$

L'incompatibilité du spectre et les propriétés du symbole $\varphi_\tau(x, y)$ nous conduisent à des conditions qui entraînent la condition (M). Désignons par $\mathbf{C}^\delta_{s,l}$ le sous-espace de $\mathbf{C}_{s,l}$ des fonctions q telles que $\operatorname{supp} q \subset \Pi_\delta = \{(x, y) | |y| \leqslant \delta\}$.

Lemme 5.7. *Si les opérateurs A et B possèdent un spectre incompatible, si une fonction $\varphi_\tau(x, y)$ vérifie les conditions* (T.1) *et* (T.2) *en tant que fonction à valeurs dans $\mathscr{B}_{s,l}$ et si pour presque tous les $\tau \in [0, \infty[$*

$$\langle \tilde{\varphi}_\tau, q \rangle \to 0 \text{ lorsque } \delta \downarrow 0$$

uniformément en $q \in \mathbf{C}^{\delta}_{s,l} \cap \{q: \|q\|_{\mathbf{C}_{s,l}} \leqslant 1\}$, *alors l'opérateur* $\varphi_\tau\left(\begin{smallmatrix}1 & 2\\ C, & B\end{smallmatrix}\right)$ *satisfait la condition* (M).

Démonstration. Soit q_δ une fonction de classe C^∞ telle que $0 \leqslant q_\delta(x, y) \leqslant 1$, $q_\delta(x, y) = 1$ pour $|y| \leqslant \delta/2$ et $q_\delta(x, y) = 0$ pour $|y| \geqslant \delta > 0$. Pour tous $h, h_1 \in \mathscr{H}$ on a

$$\left(E(\Delta)\varphi_\tau\left(\begin{smallmatrix}1 & 2\\ C, & B\end{smallmatrix}\right)E(\Delta)h, h_1\right) = \langle \tilde{\varphi}_\tau\left(E(\Delta)e^{ipB}e^{itC}E(\Delta)h, h_1\right)\rangle.$$

L'opérateur C commutant à la décomposition de l'unité, il vient

$$E(\Delta)e^{ipB}E(\Delta)e^{itC} = E(\Delta)e^{ipB}e^{itC}E(\Delta).$$

Par ailleurs, la fonction $q(t, p) = (E(\Delta)e^{ipB}E(\Delta)e^{itC}h, h_1) \in \mathbf{C}_{s,l}$, puisque C et B sont des générateurs de degré s et l respectivement. Estimons le terme du second membre de l'égalité

$$\langle \tilde{\varphi}_\tau, q\rangle = \langle \tilde{\varphi}_\tau, (1 - q_\delta)q\rangle + \langle \tilde{\varphi}_\tau, q_\delta q\rangle, \tag{5.50}$$

où $q \in \mathbf{C}_{s,l}$. La fonction $q_\delta q \in \mathbf{C}^{\delta}_{s,l}$ et, par suite,

$$|\langle \tilde{\varphi}_\tau, q_\delta q\rangle| \leqslant \|q\|_{\mathbf{C}_{s,l}} \cdot \sup|\langle \tilde{\varphi}_\tau, q'\rangle|, \tag{5.51}$$

où sup est pris sur tous les $q' \in \mathbf{C}^{\delta}_{s,l} \cap \{q \in \mathbf{C}_{s,l}: \|q\|_{\mathbf{C}_{s,l}} \leqslant 1\}$. Le premier terme satisfait la majoration suivante:

$$|\langle \tilde{\varphi}_\tau, (1 - q_\delta)q\rangle| \leqslant \|\varphi_\tau\|_{\mathscr{B}_{s,l}} \sup_{t, |p| \geqslant \delta > 0} \frac{|(E(\Delta)e^{ipB}E(\Delta)e^{itC}h_1 h_1)|}{(1 + |t|^s)(1 + |p|)^l} \leqslant$$

$$\leqslant \omega(\operatorname{diam}\Delta, \delta/2) \cdot \|\varphi_\tau\|_{\mathscr{B}_{s,l}} \operatorname{const}\|h\| \cdot \|h_1\|,$$

où const dépend seulement de l'opérateur C. Par hypothèse, la fonction

$$\omega_1(\delta) = \sup_{q \in \mathbf{C}^{\delta}_{s,l} \cap \{q: \|q\|_{\mathbf{C}_{s,l}} \leqslant 1\}} |\langle \tilde{\varphi}_\tau, q\rangle| \to 0 \text{ lorsque } \delta \to 0.$$

Dans (5.50) et (5.51), en remplaçant q par la fonction $(E(\Delta)e^{ipB}E(\Delta)e^{itC}h, h_1)$, on obtient en définitive:

$$|\langle \tilde{\varphi}_\tau, (E(\Delta)e^{ipB}E(\Delta)e^{itC}h, h_1)\rangle| \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname{const}\|h\| \cdot \|h_1\| \{\omega_1(\delta) + \|\varphi_\tau\|_{\mathscr{B}_{s,l}} \omega(\operatorname{diam}\Delta, \delta/2)\}.$$

En prenant $\delta = \operatorname{diam}\Delta$ pour tout Δ, on trouve que, pour presque tous les τ,

$$\|E(\Delta)\varphi_\tau\left(\begin{smallmatrix}1 & 2\\ C, & B\end{smallmatrix}\right)E(\Delta)\| \to 0$$

lorsque $\operatorname{diam}\Delta \to 0$ uniformément en tous les Δ. Ce qui prouve le lemme.

6. Lemme de suppression des crochets autonomes. Supposons qu'une fonction φ_τ satisfait les conditions du lemme 5.7. L'opérateur φ_τ vérifie alors les conditions (T.1) et (T.2), et donc existe le T-produit

$$e^{\int_{t_0}^{t} \varphi_\tau d\tau} = \lim_{|\pi(t_0, t)| \to 0} \prod_{k=0}^{N} e^{\left[\!\left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} \varphi_\tau\left(\begin{smallmatrix}1 & 2\\ C, & B\end{smallmatrix}\right)d\tau\right]\!\right]}, \quad t_{N+1} = t.$$

Le produit figurant sous le signe lim peut être écrit sous la forme

$$e^{\sum_{k=0}^{N}\int_{t_k}^{t_{k+1}}[\![\varphi_\tau(\overset{1}{C},\overset{2}{B})\,d\tau]\!]}$$

et il est alors naturel de désigner l'opérateur $e^{\int_{t_0}^{t}\varphi_\tau d\tau}$ comme $e^{\int_{t_0}^{t}\varphi_\tau d\tau}=e^{\int_{t_0}^{t}[\![\varphi_\tau(\overset{1}{C},\overset{2}{B})]\!]\,d\tau}$.

Parallèlement à l'opérateur $e^{\int_{s}^{v}[\![\varphi_\tau(\overset{1}{C},\overset{2}{B})]\!]\,d\tau}$ considérons l'opérateur $[\![e^{\int_{s}^{v}\varphi_\tau(\overset{1}{C},\overset{2}{B})\,d\tau}]\!]$ et le produit $\prod_{k=0}^{N}[\![e^{\int_{t_k}^{t_{k+1}}\varphi_\tau(\overset{1}{C},\overset{2}{B})\,d\tau}]\!]$ qui peut être récrit comme suit

$$\prod_{k=0}^{N}[\![e^{\int_{t_k}^{t_{k+1}}\varphi_\tau(\overset{1}{C},\overset{2}{B})\,d\tau}]\!]=e^{\sum_{k=0}^{N}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\varphi_\tau(\overset{k}{C},\overset{k+1/2}{B})\,d\tau}$$

Lemme 5.8. *On a la représentation suivante du T-produit*

$$e^{\int_{t_0}^{t}[\![\varphi_\tau(\overset{1}{C},\overset{2}{B})]\!]\,d\tau}=\lim_{|\pi(t_0,t)|\to 0}e^{\sum_{k=0}^{N}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\varphi_\tau(\overset{k}{C},\overset{k+1/2}{B})\,d\tau} \tag{5.52}$$

Démonstration. Estimons la différence des opérateurs $e^{\int_{s}^{v}[\![\varphi_\tau(\overset{1}{C},\overset{2}{B})]\!]\,d\tau}$ et $[\![e^{\int_{s}^{v}\varphi_\tau(\overset{1}{C},\overset{2}{B})\,d\tau}]\!]$. Pour le premier opérateur on a la majoration

$$\left\|e^{\int_{s}^{v}[\![\varphi_\tau(\overset{1}{C},\overset{2}{B})]\!]\,d\tau}-\left(I+\int_{s}^{v}[\![\varphi_\tau(\overset{1}{C},\overset{2}{B})]\!]\,d\tau\right)\right\|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left(\int_{s}^{v}\|\varphi_\tau\|\,d\tau\right)^2\cdot e^{\int_{s}^{v}\|\varphi_\tau\|\,d\tau} \tag{5.53}$$

qui resulte de son développement en série, où $\|\varphi_\tau\|$ est la norme de $\varphi_\tau(\overset{1}{C},\overset{2}{B})$.

En développant la fonction $e^{\int_{s}^{v}\varphi_\tau(x,\,y)\,d\tau}$ en série, on obtient pour le symbole la majoration suivante pour la norme de $\mathscr{B}_{s,t}$:

$$\left\|e^{\int_{s}^{v}\varphi_\tau(x,\,y)\,d\tau}-\left(1+\int_{s}^{v}\varphi_\tau(x,\,y)\,d\tau\right)\right\|_{\mathscr{B}_{s,t}}\leqslant\frac{1}{2}\left(\int_{s}^{v}\|\varphi_\tau(x,\,y)\|_{\mathscr{B}_{s,t}}\right)^2 e^{\int_{s}^{v}\|\varphi_\tau(x,\,y)\|_{\mathscr{B}_{s,t}}\,d\tau}.$$

D'où la majoration du second opérateur

$$\left\|[\![e^{\int_{s}^{v}\varphi_\tau(\overset{1}{C},\overset{2}{B})\,d\tau}]\!]-\left(I+\int_{s}^{v}[\![\varphi_\tau(\overset{1}{C},\overset{2}{B})]\!]\,d\tau\right)\right\|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left(\int_{s}^{v}\|\varphi_\tau(x,\,y)\|_{\mathscr{B}_{s,t}}\right)^2 e^{\int_{s}^{v}\|\varphi_\tau(x,\,y)\|_{\mathscr{B}_{s,t}}\,d\tau}$$

En tenant compte de la continuité de l'application μ et en combinant la majoration obtenue et la majoration (5.52), on trouve

$$\left\| e^{\int_s^v [\![\varphi_\tau(\overset{1}{C}, \overset{2}{B})]\!]\, d\tau} - \left[\!\!\left[e^{\int_s^v \varphi_\tau(\overset{1}{C}, \overset{2}{B})\, d\tau} \right]\!\!\right] \right\| \leqslant \left(\int_s^v |\varphi_\tau|_{\mathfrak{B}_{x,i}}\, d\tau \right)^2 e^{\int_s^v \|\varphi_\tau\|_{\mathfrak{B}_{x,i}} d\tau}.$$

Cette inégalité entraîne aussitôt

$$\lim_{|\pi(t_0, t)| \to 0} \left\| \prod_{k=0}^{N} e^{\int_{t_k}^{t_{k+1}} [\![\varphi_\tau(\overset{1}{C}, \overset{2}{B})]\!]\, d\tau} - e^{\sum_{k=0}^{N} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \varphi_\tau(\overset{k}{C}, \overset{k+1/2}{B})\, d\tau} \right\| = 0,$$

ce qui prouve la formule (5.51).

La formule (5.52) du T-produit nous permet d'introduire la notation

$$e^{\int_{t_0}^{t} [\![\varphi_\tau(\overset{1}{C}, \overset{2}{B})]\!]\, d\tau} = e^{\int_{t_0}^{t} \varphi_\tau(\overset{\tau}{C}, \overset{\tau-0}{B})\, d\tau}.$$

7. Approximation du T-produit par une chaîne discrète. Définissons une chaîne discrète comme il est d'usage en théorie des probabilités.

Soient $t_0 < t_1 < \ldots < t_N$ une suite d'instants, $\{E(i)\}_{i \geqslant 1}$ une famille d'orthoprojecteurs tels que $E(i)\,E(j) = E(j)\,E(i) = 0$ pour tout $i \neq j$ et supposons que la série $\sum_{i=1}^{\infty} E(i)$ converge fortement vers I. Considérons les applications de la suite $\{t_k\}_{1 \leqslant k \leqslant N}$ dans l'ensemble des entiers naturels, appelons-les *trajectoires discrètes* et désignons-les par i_τ où $\tau \in \{t_k\}_{1 \leqslant k \leqslant N}$ et i_k est un nombre naturel.

Un ensemble de trajectoires discrètes est par définition une *chaîne* s'il existe une fonction opératorielle $R(t_k, i \mid t_m, j)$, $t_k > t_m$ jouissant des propriétés suivantes :

(C 1) $$R(t_k, i \mid t_m, j) = \sum_{l=1}^{\infty} R(t_k, i \mid t_p, l)\, R(t_p, l \mid t_m, j)$$

pour tous $t_k > t_p > t_m$ et tous i, j naturels, la série convergeant fortement ;

(C 2) $$R(t_k, i \mid t_m, j)\, E(j) = E(i)\, R(t_k, i \mid t_m, j) = R(t_k, i \mid t_m, j);$$

(C 3) $$\sup_{i,j} \| R(t_k, i \mid t_m, j) \| < \infty \quad \text{pour tous les } t_k > t_m.$$

Considérons une fonctionnelle $f(i_\tau)$ bornée sur l'ensemble des trajectoires discrètes et associons-lui l'opérateur

$$\hat{f} = \sum_{i_\tau} f(i_\tau)\, R(i_{t_N} \mid i_{t_{N-1}}) \ldots R(i_{t_1} \mid i_{t_0}), \tag{5.54}$$

où $R(i_{t_{k+1}} \mid i_{t_k}) = R(t_{k+1}, i_{t_{k+1}} \mid t_k, i_{t_k})$.

Montrons que la série (5.54) converge. En effet, pour tout $h \in \mathscr{H}$, on déduit de (C2) et (C3) que

$$\Big\| \sum_{i_\tau} f(i_\tau)\, R(i_{t_N} | i_{t_{N-1}}) \dots R(i_{t_1} | i_{t_0})\, h \Big\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant (\sup_{i_\tau} |f(i_\tau)|)^2 \sum_{i_\tau} \| R(i_{t_N} | i_{t_{N-1}}) \dots R(i_{t_1} | i_{t_0})\, h \|^2 \leqslant$$

$$\leqslant (\sup_{i_\tau} |f(i_\tau)|)^2 \, (\sup_{i_s,\, k} \| R(i_{t_k} | i_{t_{k-1}}) \|)^{2N} \, \|h\|^2 .$$

Appelons le produit $R(i_{t_N} | i_{t_{N-1}}) \dots R(i_{t_1} | i_{t_0})$ *amplitude* de la trajectoire i_τ et désignons-la par $a(i_\tau)$. Il est naturel d'appeler la somme (5.54) *intégrale de la fonctionnelle* $f(i_\tau)$ sur la chaîne et de noter

$$\hat{f} = \int f(i_\tau)\, a(i_\tau) = \sum_{i_\tau} f(i_\tau)\, a(i_\tau) .$$

Soit φ_τ une fonction vérifiant les conditions (T.1), (T.2) et (M). Considérons la subdivision $\pi(t_0, t)$ et le recouvrement $(\Delta_i^\varepsilon)_{i \geqslant 1}$. Définissons $R(t_k, i | t_m, j)$ et $E(i)$ à l'aide des formules

$$E(i) = E(\Delta_i^\varepsilon), \tag{5.55}$$

$$R(t_k, i | t_m, j) = E(\Delta_i^\varepsilon)\, e^{\sum_{p=m}^{k-1} \int_{t_p}^{t_{p+1}} [\![\varphi_\tau]\!]\, d\tau}\, E(\Delta_j^\varepsilon). \tag{5.56}$$

Les conditions (C1), (C2) et (C3) sont alors remplies. Pour chaque fonctionnelle cylindrique de la forme (5.18), on peut exhiber une subdivision $\pi(t_0, t)$ telle que $t_1, t_2, \dots, t_N \in \pi(t_0, t)$ et cette fonctionnelle peut être identifiée à une fonctionnelle sur une chaîne discrète. Désignons par $a_{\varepsilon,\delta}(i_\tau)$, où $\delta = |\pi(t_0, t)|$, l'amplitude associée à cette chaîne. Les lemmes 5.4, 5.5 entraînent la relation

$$J_{t_0}^t (f(x_\tau)) = \lim_{\varepsilon,\, \delta \downarrow 0} \int f(i_\tau)\, a_{\varepsilon,\delta}(i_\tau)\, d\tau . \tag{5.57}$$

Bien plus, si l'on désigne par $Q^{(k)}$ l'ensemble des trajectoires discrètes changeant de valeurs exactement k fois, on déduit du théorème 5.1 que

$$J_{t_0}^t (f(x_\tau))\, p^{(k)}((t_0, t) | x_\tau) = \lim_{\varepsilon,\, \delta \downarrow 0} \int_{Q^{(k)}} f(i_\tau)\, a_{\varepsilon,\delta}(i_\tau)\, d\tau \tag{5.58}$$

pour toute fonctionnelle cylindrique de la forme (5.18), donc pour tout $f \in \overset{\circ}{\mathscr{F}}(t_0, t)$. Formulons le résultat établi plus haut.

Théorème 5.2. *Pour toute fonctionnelle* $f \in \overset{\circ}{\mathscr{F}}(t_0, t)$ *il existe une famille de chaînes discrètes définies par les formules* (5.55), (5.56) *telle que les formules* (5.57) *et* (5.58) *ont lieu lorsqu'on identifie une fonctionnelle de* $\overset{\circ}{\mathscr{F}}(t_0, t)$ *à une fonctionnelle sur une chaîne.*

En conclusion de ce paragraphe examinons l'exemple suivant. Soit

$\Phi(x, \tau)$ une fonction continue, majorée pour tous les $x \in \mathbf{R}$, et $\tau \in [0, T]$ quel que soit $T>0$. Considérons la fonctionnelle cylindrique de $\overset{\circ}{\mathscr{F}}(t_0, t)$ définie par la formule

$$\varphi_\pi(x_\tau) = e^{\sum_{k=1}^{N} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Phi(x_{t_k}, \tau)\, d\tau},$$

où $t_0 < t_1 < \ldots < t_N = t$ sont les points de la subdivision $\pi(t_0, t)$. Lorsque $\pi(t_0, t) \to 0$, la fonctionnelle $\varphi_\pi(x_\tau)$ converge uniformément vers la fonctionnelle

$$\varphi(x_\tau) = e^{\int_{t_0}^{t} \Phi(x_\tau, \tau)\, d\tau}$$

sur $\mathscr{P}(t_0, t)$.

Donc, $\varphi(x_\tau) \in \mathscr{F}(t_0, t)$. Pour toute trajectoire constante par morceaux présentant k sauts, la valeur de la fonctionnelle est définie naturellement par la formule

$$\varphi(x_\tau) = e^{\sum_{p=0}^{k} \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \Phi(x_p, \tau)\, d\tau},$$

où $\tau_1, \ldots, \tau_k$ sont les instants de sauts, $\tau_0 = t_0$, $\tau_{k+1} = t$, $x_0, \ldots, x_k$ les valeurs prises par la trajectoire entre les sauts. En vertu du théorème 5.1

$$J_{t_0}^{t}(\varphi(x_\tau)) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{t_0}^{t} \ldots \int_{t_0}^{\tau_2} e^{\sum_{p=0}^{k} \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \Phi(x_p, \tau)\, d\tau} E(dx_k)\, \varphi_{\tau_k} \ldots \varphi_{\tau_1} E(dx_0)\, d\tau_1 \ldots d\tau_k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{t_0}^{t} \ldots \int_{t_0}^{\tau_2} e^{\int_{\tau_k}^{t} \Phi(A, \xi)\, d\xi} \varphi_{\tau_k} \cdot e^{\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \Phi(A, \xi)\, d\xi} \varphi_{\tau_{k-1}} \ldots e^{\int_{t_0}^{\tau_1} \Phi(A, \xi)\, d\xi}\, d\tau_1 \ldots d\tau_k, \qquad (5.59)$$

où $e^{\int_{s}^{t} \Phi(A, \xi)\, d\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\int_{s}^{t} \Phi(A, \xi)\, d\xi} E(dx)$.

La formule (5.59) nous donne la solution de l'équation intégrale

$$v(t \mid t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} \Phi(A, \xi)\, d\xi} + \int_{t_0}^{t} e^{\int_{\tau_1}^{t} \Phi(A, \xi)\, d\xi} \varphi_{\tau_1} v(\tau_1 \mid t_0)\, d\tau_1, \qquad (5.60)$$

ce qu'on établit immédiatement par une intégration de l'équation (5.60).

CHAPITRE VI

ÉQUATION DE HAMILTON-JACOBI GÉNÉRALISÉE

La construction des solutions asymptotiques des équations différentielles et des équations de forme plus générale «en approximation zéro» se ramène à l'intégration d'une équation différentielle aux dérivées partielles du premier ordre appelée généralement équation caractéristique ou équation de Hamilton-Jacobi. L'acquisition des solutions générales des équations caractéristiques est une tâche assez ardue qui implique l'usage de méthodes de géométrie différentielle.

Dans ce chapitre, nous étudierons une importante classe d'équations caractéristiques que nous appellerons *équations de Hamilton-Jacobi à dissipation*. A cette classe d'équations est étroitement liée la variété lagrangienne à germe complexe. L'étude des propriétés de cette variété nous permet de déboucher sur une méthode de construction de la solution générale de l'équation de Hamilton-Jacobi à dissipation basée sur le contournement des foyers de Hamilton.

Avant d'entrer dans le vif du sujet, introduisons quelques notations.

Désignons la matrice de Jacobi de l'application différentiable $x \in \mathbf{R}^n \to y(x) \in \mathbf{R}^m$ par $\partial y/\partial x$ ou y_x, et le déterminant $\det \partial y/\partial x$, par Dy/Dx lorsque $m=n$.

Soient $u=(u_1, \ldots, u_n)$ et $v=(v_1, \ldots, v_n)$ deux ensembles indexés, I et K des sous-ensembles disjoints de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$. Désignons par $\{u_I, v_K\}$ l'ensemble indexé $\{w_j\}_{j \in I \cup K} = \{u_i\}_{i \in I} \cup \{v_k\}_{k \in K}$ dans lequel les éléments sont rangés dans l'ordre de croissance de leurs indices. Lorsque $K=\varnothing$ on désignera $\{u_I, v_K\}$ par u_I.

On rappelle que si ξ est une application différentiable de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$, $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ et la matrice $C=\dfrac{\partial \xi}{\partial x}$ est dégénérée, alors les dérivées premières $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \xi}$ et les dérivées secondes $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2}$ sont reliées par les formules respectives

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = {}^t C^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}={}^tC^{-1}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\,C^{-1}+\sum_{m=1}^{n}{}^t\left(C^{-1}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_m {}^tC^{-1}\,\frac{\partial^2\xi m}{\partial x^2}\,C^{-1},$$

où nous avons posé $\dfrac{\partial^2\ddot{\varphi}}{\partial x^2}=\left\|\dfrac{\partial^2\ddot{\varphi}}{\partial x_i\partial x_j}\right\|$.

§ 1. Equations de Hamilton-Jacobi à dissipation

La solution de nombreux problèmes décrivant des processus physiques et, notamment, l'adsorption, peut être représentée par le produit de $\exp\left(\dfrac{i}{h}\,S(x,t)\right)$ par une série asymptotique en un petit paramètre h dans les cas où la fonction $S(x,t)$ est complexe et cette solution tend rapidement vers 0 dans le domaine où $\operatorname{Im} S(x,t)>0$. Introduisons la définition suivante pour évaluer la vitesse de décroissance de telles fonctions lorsque $h\to 0$.

Définition. Soient $f(x)$, $x\in\mathbf{R}^n$, une fonction positive, $r(x)$, $g(x)$ des fonctions différentiables. On écrira $g=O_f(h^\alpha)$ et $r=o_f(h^\alpha)$ si pour tout indice multiple l tel que $\alpha-\dfrac{|l|}{2}>0$, on a la majoration

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^{|l|}g(x)}{\partial x^l}\right|e^{-\frac{f(x)}{h}}&=O\left(h^{\alpha-|l|/2}\right),\\ \left|\frac{\partial^{|l|}r(x)}{\partial x^l}\right|e^{-\frac{f(x)}{h}}&=o\left(h^{\alpha-|l|/2}\right).\end{aligned}\tag{1.1}$$

Donc, la détermination des fonctions $S_1=\operatorname{Re} S$ et $S_2=\operatorname{Im} S$ peut se ramener à l'intégration d'un système d'équations caractéristiques de la forme

$$\begin{aligned}\frac{\partial S_1}{\partial t}+f\left(\frac{\partial S_1}{\partial x},\frac{\partial S_2}{\partial x},x,t\right)&=o_{S_2}(h),\\ \frac{\partial S_2}{\partial t}+\tilde{f}\left(\frac{\partial S_1}{\partial x},\frac{\partial S_2}{\partial x},x,t\right)&=o_{S_2}(h),\end{aligned}\tag{1.2}$$

où $f(p,\tilde{p},x,t)$, $\tilde{f}(p,\tilde{p},x,t)$ sont des fonctions réelles différentiables. Le systéme (1.2) sera appelé *système dissipatif de Hamilton-Jacobi.*

On remarquera que si

$$\hat{f}=\langle\hat{p},H_p\rangle,\quad f=-\langle\tilde{p},H_{pp}\tilde{p}\rangle+H,$$

où $H=H(p,x,t)$ est une fonction réelle, le système (1.2) avec la condition initiale $S_2(x,t)=0$ se ramène à l'équation de Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial S_1}{\partial t}+H\left(\frac{\partial S_1}{\partial x},x,t\right)=0.$$

Il s'avère que le système se réduit à une équation de Hamilton-Jacobi non seulement dans le cas spécial étudié, mais aussi dans le cas général à une nuance près, c'est que le hamiltonien de cette équation est à valeurs complexes. La démonstration de cette assertion repose sur les deux lemmes suivants que nous utiliserons dans la suite.

Lemme 1.1. (Inégalité de Gårding). *Pour toute fonction positive* $F(x)\in C^2(\mathbf{R}^n)$ *on a*

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x}(x)\right|^2 \leqslant cF(x)\sup_{k,x}\left|F_{x_kx_k}(x)\right|, \qquad c=\text{const}.$$

Démonstration. On a

$$0\leqslant F(x_1,\ldots,x_{k-1},x_k+t,x_{k+1},\quad .,x_n)\leqslant$$

$$\leqslant F(x_1,\ldots,x_n)+tF_{x_k}(x_1,\ldots,x_n)+\frac{t^2}{2}\sup_x\left|F_{x_kx_k}\right|.$$

Pour qu'un trinôme du second degré soit positif, il faut que son discriminant soit négatif, donc

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x_k}\right|^2 \leqslant 2F\sup_x\left|F_{x_kx_k}\right|,$$

ce qui prouve le lemme.

Corollaire. *Si* F *est une fonction positive de classe* $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ *et* P_N *un polynôme homogène de degré* N *en* $\partial F/\partial x$ *dont les coefficients dépendent différentiablement de* x, *alors* $P_N=O_F(h^{N/2})$.

Démonstration. Les majorations O_F étant locales, on peut sans nuire à la généralité supposer que $F\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. D'après le lemme 1.1 on a alors

$$|F_x|\leqslant\text{const}\,F^{1/2}.$$

Donc, pour $|l|<N$,

$$\frac{\partial^{|l|}}{\partial x^l}P_N(x)\leqslant\text{const}\,[F(x)]^{\frac{N-|l|}{2}}$$

et l'on obtient la proposition annoncée grâce à la solution du problème 1.1.

Lemme 1.2. (Représentation du reste dans la formule de Taylor). *Si* $f\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, *alors*

$$f(x)=f(0)+\langle x,f_x(0)\rangle+\frac{1}{2}\langle x,f_{xx}(0)\,x\rangle+\sum_{i,j,k=1}^{n}x_ix_jx_kg_{ijk}(x),$$

où $g_{ijk}\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Ce lemme résulte de l'identité

$$f(x)=f(0)+\int_0^1 \frac{df(t\,x)}{dt}\,dt=f(0)+\sum_{i=1}^{n} x_i \int_0^1 \frac{\partial f(t\,x)}{\partial x_i}\,dt. \tag{1.3}$$

Remarque. Le reste d'une formule de Taylor contenant un nombre quelconque de termes peut être mis sous cette forme.

Transformons le système (1.2). Posons

$$r(p, \tilde{p}, x, t)=f(p, \tilde{p}, x, t)-f(p, 0, x, t)-$$
$$-\langle \tilde{p}, f_{\tilde{p}}(p, 0, x, t)\rangle-\frac{1}{2}\langle \tilde{p}, f_{\tilde{p}\tilde{p}}(p, 0, x, t)\,\tilde{p}\rangle,$$

$$\tilde{r}(p, \tilde{p}, x, t)=\tilde{f}(p, \tilde{p}, x, t)-\tilde{f}(p, 0, x, t)-$$
$$-\langle \tilde{p}, \tilde{f}_{\tilde{p}}(p, 0, x, t)\rangle-\frac{1}{2}\langle \tilde{p}, \tilde{f}_{\tilde{p}\tilde{p}}(p, 0, x, t)\,\tilde{p}\rangle.$$

Le lemme 1.2 et le corollaire 1.1 entraînent

$$r\left(\frac{\partial S_1}{\partial x}, \frac{\partial S_2}{\partial x}, x, t\right)=O_{S_2}(h^{3/2}),$$

$$\tilde{r}\left(\frac{\partial S_1}{\partial x}, \frac{\partial S_2}{\partial x}, x, t\right)=o_{S_2}(h^{3/2}).$$

Le système (1.2) est donc équivalent au système

$$\frac{\partial S_1}{\partial t}+f\left(\frac{\partial S_1}{\partial x}, 0, x, t\right)+\left\langle \frac{\partial S_2}{\partial x}, f_{\tilde{p}}\left(\frac{\partial S_1}{\partial x}, 0, x, t\right)\right\rangle+$$
$$+\frac{1}{2}\left\langle \frac{\partial S_2}{\partial x}, f_{\tilde{p}\tilde{p}}\left(\frac{\partial S_1}{\partial x}, 0, x, t\right)\frac{\partial S_2}{\partial x}\right\rangle=O_{S_2}(h),$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial t}+\tilde{f}\left(\frac{\partial S_1}{\partial x}, 0, x, t\right)+\left\langle \frac{\partial S_2}{\partial x}, \tilde{f}_{\tilde{p}}\left(\frac{\partial S_1}{\partial x}, 0, x, t\right)\right\rangle+ \tag{1.4}$$
$$+\frac{1}{2}\left\langle \frac{\partial S_2}{\partial x}, \tilde{f}_{\tilde{p}\tilde{p}}\left(\frac{\partial S_1}{\partial x}, 0, x, t\right)\frac{\partial S_2}{\partial x}\right\rangle=o_{S_2}(h).$$

Posons

$$H(p, x, t)=f(p, 0, x, t),$$
$$\tilde{H}(p, x, t)=\tilde{f}(p, 0, x, t),$$
$$\mathcal{H}(p, x, t)=H(p, x, t)+i\tilde{H}(p, x, t).$$

Multiplions maintenant la deuxième équation par i et ajoutons à la première. Grâce à (1.1), on obtient

$$F_{\mathscr{H}}[S_1+iS_2] \overset{\text{déf}}{=} \frac{\partial (S_1+iS_2)}{\partial t} + \mathscr{H}\left(\frac{\partial S_1}{\partial x}, x, t\right) + i\left\langle \mathscr{H}_p\left(\frac{\partial S_1}{\partial x}, x, t\right), \frac{\partial S_2}{\partial x}\right\rangle -$$

$$-\frac{1}{2}\left\langle \frac{\partial S_2}{\partial x}, \mathscr{H}_{pp}\left(\frac{\partial S_1}{\partial x}, x, t\right)\frac{\partial S_2}{\partial x}\right\rangle = o_{S_2}(h). \qquad (1.5)$$

Il est aisé de voir que le couple de fonctions vérifiant (1.5) vérifient aussi (1.4).

La relation (1.5) sera appelée *équation de Hamilton-Jacobi à dissipation* associée à la fonction $\mathscr{H}(p, q, t)$.

§ 2. Variété lagrangienne à germe complexe

Dans ce paragraphe on développe les éléments de géométrie différentielle nécessaires à l'intégration de l'équation de Hamilton-Jacobi à dissipation.

Considérons un espace euclidien $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ de dimension $2n$ muni des coordonnées $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$. Cet espace sera appelé *espace de phase*.

Définition. On appelle *variété lagrangienne* une sous-variété Λ^n de dimension n de l'espace de phase $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ vérifiant la condition

$$[p, q]_{jk} \overset{\text{déf}}{=} \left\langle \frac{\partial p}{\partial \alpha_j}, \frac{\partial q}{\partial \alpha_k}\right\rangle - \left\langle \frac{\partial p}{\partial \alpha_k}, \frac{\partial q}{\partial \alpha_j}\right\rangle = 0, \quad j, k = 1, \ldots, n, \qquad (2.1)$$

où $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ sont des coordonnées locales sur Λ^n et $q = q(\alpha)$, $p = p(\alpha)$ des équations locales décrivant Λ^n. L'expression $[p, q]_{ij}$ s'appelle *crochet de Lagrange* des fonctions vectorielles $p(\alpha)$ et $q(\alpha)$.

De (2.1) il résulte que la forme $p\,dq$ est la différentielle locale d'une fonction sur Λ^n. Donc l'intégrale $\int_l p\,dq$ étendue à un chemin quelconque l de Λ^n reste invariante par une déformation continue du chemin l d'extrémités fixes. Si l'on exige de plus que $\oint p\,dq = 0$ pour tout chemin fermé sur Λ^n, il existe alors sur Λ^n une fonction S, solution de l'équation $dS = p\,dq$. La fonction S s'appelle *S-action* sur Λ^n.

Soit donnée sur une variété lagrangienne Λ^n une fonction positive $D(\alpha)$ de classe C^∞, appelée *dissipation*. Désignons par Γ l'ensemble des zéros de $D(\alpha)$.

Définition. On appelle *germe complexe* un couple (z, w) de fonctions vectorielles complexes différentiables sur Λ^n tel que soient réalisées les

conditions suivantes (dites axiomes du germe complexe):
(g1) $z(\alpha)=O_D(h^{1/2})$, $w(\alpha)=O_D(h^{1/2})$;
(g2)

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial(p+w)}{\partial\alpha}\\[2ex] -\dfrac{\partial(q+z)}{\partial\alpha}\end{pmatrix}_{\alpha\in\Gamma}=n;$$

(g3) Il existe une fonction différentiable $E(\alpha)=O_D(h)$ sur Λ^n appelée *potentiel* telle que

$$dE=\langle w,\, dq\rangle-\langle z,\, dp\rangle+\frac{\langle w,\, dz\rangle-\langle z,\, dw\rangle}{2}+\langle f,\, d\alpha\rangle,$$

où $f=O_D(h)$.

Remarques. 1. On conviendra qu'une variété lagrangienne à germe complexe (ou simplement germe) est donnée si le sont les quatre quantités Λ^n, r^n, D, E.

2. S'il existe une S-action sur Λ^n, alors l'existence d'un potentiel sur Λ^n est équivalente à celle d'une fonction $W(\alpha)$ sur Λ^n vérifiant la condition

$$dW=\langle p+w,\, d(q+z)\rangle+O_D(h).$$

On appellera cette fonction *enthalpie* du germe complexe. Le potentiel et l'enthalpie d'un germe complexe sont reliés par la relation:

$$W=E+S+\left\langle p+\frac{1}{2}w,\, z\right\rangle+O_D(h^{3/2})+\text{const}.$$

Soit $H(p,\, q,\, t)\in C^\infty(\mathbf{R}^{2n+1})$ une fonction réelle. Désignons par $p(\alpha,\, t)$, $q(\alpha,\, t)$ la solution du système de Hamilton

$$\frac{dp}{dt}=-H_q,\qquad \frac{dq}{dt}=H_p \tag{2.2}$$

qui vérifie les conditions aux limites $p(\alpha,0)=p(\alpha)$, $q(\alpha,0)=q(\alpha)$, où $(p(\alpha),\, q(\alpha))\in\Lambda^n$.

Pour t fixe, les équations $p=p(\alpha,\, t)$, $q=q(\alpha,\, t)$ définissent une variété lagrangienne qui sera notée Λ^n_t.

Exercice. Vérifier que (2.1) a lieu sur Λ^n_t.

Soit $p(p_0,\, q_0,\, t)$, $q(p_0,\, q_0,\, t)$ la solution du système (2.2) qui satisfait la condition initiale $p(p_0,\, q_0,\, 0)=p_0$, $q(p_0,\, q_0,\, 0)=q_0$. L'application

$$(p_0,\, q_0)\to(p(p_0,\, q_0,\, t),\, q(p_0,\, q_0,\, t))\overset{\text{déf}}{=}g^t_H(p_0,\, q_0)$$

sera appelée *application canonique* de l'espace de phase associée à la fonction H.

A toute famille à un paramètre de variétés lagrangiennes $\{\Lambda_t^n\}$ est reliée une sous-variété $M^{n+1} \subset \mathbf{R}^{2n} \times \mathbf{R}^1$ à bord à $n+1$ dimensions.

Soient α des coordonnées locales sur Λ_0^n; alors (α, t) sont des coordonnées locales sur M^{n+1} dont nous nous servirons constamment. On désignera aussi par (α, t) le point correspondant de M^{n+1} en nourrissant l'espoir qu'aucune confusion ne sera commise.

Exercice. Supposons qu'il existe une S-action sur une variété lagrangienne

$$\Lambda_0^n: \{p = p(\alpha),\ q = q(\alpha)\}$$

et supposons que les formules $p = p(\alpha, t)$, $q = (\alpha, t)$ définissent une variété $\Lambda_t^n = g_H^t \Lambda_0^n$. Montrer que la fonction $S(\alpha, t)$

$$S(\alpha, t) = S_0(\alpha) + \int_0^t [\langle p(\alpha, \tau), H_p(p(\alpha, \tau), q(\alpha, \tau), \tau)\rangle - H(p(\alpha, \tau), q(\alpha, \tau), \tau)]\, d\tau \qquad (2.3)$$

est une S-action sur Λ_t^n.

A noter que la S-action est définie sur une variété lagrangienne à une constante additive près. En étudiant une famille $\Lambda_t^n = g_H^t \Lambda_0^n$ de variétés lagrangiennes, on admettra toujours que les S-actions sur ces variétés sont reliées par (2.3).

Soient $H(p, q, t)$ et $\tilde{H}(p, q, t)$ des fonctions réelles de classe C^∞ et $\mathscr{H} = H + i\tilde{H}$. Associons à $\mathscr{H}$ l'application suivante, dépendant de t, de l'espace $\mathbf{R}^{2n} \times \mathbf{C}^{2n}$:

$$(p_0, q_0, w_0, z_0) \to (p, q, w, z).$$

où $(p, q) = g_H^t(p_0, q_0)$ et les fonctions $w = w(p_0, q_0, w_0, z_0, t)$ et $z = z(p_0, q_0, w_0, z_0, t)$ sont solutions du système

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= -i\tilde{H}_q - \mathscr{H}_{qq} z - \mathscr{H}_{qp} w, \\ \frac{dz}{dt} &= i\tilde{H}_p + \mathscr{H}_{pq} z + \mathscr{H}_{pp} w \end{aligned} \qquad (2.4)$$

avec les conditions initiales $w|_{t=0} = w_0, z|_{t=0} = z_0$. Désignons par $dg_{H+i\tilde{H}}^t$ l'application $(p_0, q_0, w_0, z_0) \to (w, z)$ et par abus de notation écrivons $(w, z) = dg_{H+i\tilde{H}}^t (w_0, z_0)$.

Définition. Appelons l'application $(g_H^t, dg_{H+i\tilde{H}}^t)$ *application canonique complexe* associée au hamiltonien $\mathscr{H} = H + i\tilde{H}$. Cette application est *dissipative* si $\tilde{H} \leqslant 0$.

Dans la suite on n'étudiera que des applications dissipatives.

Remarque. Soit $\tilde{H} = 0$. Alors $dg_{H+i\tilde{H}}^t = dg_H^t$ est la différentielle de l'application g_H^t, et le système (2.4), un système aux variations par rapport à (2.2). Soient

$$(p(\alpha, t), q(\alpha, t)) = g_H^t(p_0(\alpha), q_0(\alpha)),$$
$$(w(\alpha, t), z(\alpha, t)) = dg_{H+i\tilde{H}}^t(w_0(\alpha), z_0(\alpha)),$$

et soit $F(p, q, w, z, t)$ une fonction arbitraire. L'intégrale

$$\int_0^t F(p(\alpha,\tau), q(\alpha,\tau), w(\alpha,\tau), z(\alpha,\tau), \tau)\, d\tau$$

s'appelle intégrale le long de la $\mathscr{H}$-trajectoire issue de α et se note

$$\int_{(\alpha,0)}^{(\alpha,t)} F\, dt \quad \text{ou} \quad \int_0^t F\, dt.$$

On désignera également par dF/dt ou par $\dot{F}$ la dérivée d'une fonction composée

$$F(p(\alpha,t), q(\alpha,t), w(\alpha,t), z(\alpha,t), t)$$

par rapport à t.

Théorème 2.1. *Soit (Λ_0^n, r_0^n) une variété lagrangienne à germe complexe et soient D_0 et E_0 la dissipation et le potentiel de ce germe. Définissons la dissipation $D(\alpha,t)$ sur $\Lambda_t^n = g_H^t \Lambda_0^n$ dans l'hypothèse que*

$$D(\alpha,t) = D_0(\alpha) - \int_0^t \tilde{H}\, dt.$$

Alors

$$r^n(\alpha,t) = dg^t_{H+i\tilde{H}}\, r_0^n(\alpha)$$

est un germe complexe sur Λ_t^n et

$$E(\alpha,t) = E_0(\alpha) - i\int_0^t \left(\tilde{H} + \frac{\langle w, \tilde{H}_p\rangle + \langle z, \tilde{H}_q\rangle}{2}\right) dt$$

est un potentiel sur Λ_t^n.

Pour prouver ce théorème nous aurons besoin de trois lemmes.

Lemme 2.1. *Soit $u(y)$, $0 \leqslant y \leqslant \alpha$ une fonction vectorielle réelle à m dimensions de classe C^1 vérifiant l'inégalité suivante*

$$|u'(y)| \leqslant c[f(y) + |u(y)|],$$

où f est une fonction positive continue et $c = \text{const} > 0$. Alors

$$|u(y)| \leqslant c_1[|u(0)| + \int_0^y f(\xi)\, d\xi],$$

où $c_1 = c_1(c, \alpha)$ est différentiable par rapport à c et α.

Démonstration. On a

$$|u(y)| \leqslant |u(0)| + c\int_0^y [f(\xi) + |u(\xi)|]\, d\xi.$$

Donc

$$|u(y)| \leqslant c_0\left(F(y) + \int_0^y |u(\xi)|\, d\xi\right),$$

où

$$c_0 = 1 + c, \qquad F(y) = |u(0)| + \int_0^y f(\xi)\, d\xi.$$

Soit I un opérateur défini comme suit:

$$If(y) = \int_0^y f(\xi)\, d\xi.$$

On a alors

$$|u| \leqslant c_0 (F + I|u|) \leqslant c_0 (F + c_0 IF + c_0 I^2 |u|).$$

Par récurrence

$$|u| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{N} c_0^N I^{n-1} F \right) + c_0^N I^N |u|.$$

L'identité

$$I^n f(y) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^y (y-\xi)^{n-1} f(\xi)\, d\xi$$

entraîne l'inégalité

$$|I^n f(y)| \leqslant \frac{y^n}{n!} \max_{0 \leqslant \xi \leqslant y} |f(\xi)| \leqslant \frac{a^n}{n!} \max_{0 \leqslant \xi \leqslant y} |f(\xi)|.$$

La fonction F étant monotone, on obtient l'inégalité

$$|u(y)| \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{c_0^n a^{n-1}}{(n-1)!} F(y) + \frac{c_0^N a^N}{N!} \max_{0 \leqslant \xi \leqslant a} |u(\xi)|.$$

En passant à la limite pour $N \to \infty$, on obtient

$$|u(y)| \leqslant c_0 e^{c_0 a} F(y),$$

ce qui prouve le lemme.

Lemme 2.2. *Soit $p(a, t)$, $q(a, t)$, $w(a, t)$, $z(a, t)$ la solution du système* (2.2), (2.4) *qui dépend différentiablement d'un paramètre $a \in \mathbf{R}^{2n}$, et soit* $J = \dfrac{D(p+w, q+z)}{Da}$. *Alors*

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \langle \varphi, w \rangle + \langle \psi, z \rangle,$$

où $\varphi = \varphi(a, t)$ et $\psi = \psi(a, t)$ sont des fonctions vectorielles différentiables.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} \dot{p} + \dot{w} &= -\mathscr{H}_q - \mathscr{H}_{pq} w - \mathscr{H}_{qq} z, \\ \dot{q} + \dot{z} &= \mathscr{H}_p + \mathscr{H}_{pp} w + \mathscr{H}_{pq} z. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Une dérivation de ces équations par rapport à a nous donne

$$\begin{aligned} (\dot{p} + \dot{w})_a &= -\mathscr{H}_{qq} (q_a + z_a) - \mathscr{H}_{qp} (p_a + w_a) + \sum_{j=1}^{n} (z_j A^{(j)} + w_j B^{(j)}), \\ (\dot{q} + \dot{z})_a &= \mathscr{H}_{pq} (q_a + z_a) + \mathscr{H}_{pp} (p_a + w_a) + \sum_{j=1}^{n} (z_j C^{(j)} + w_j D^{(j)}), \end{aligned} \tag{2.6}$$

où $A^{(j)}$, $B^{(j)}$, $C^{(j)}$ et $D^{(j)}$ sont des fonctions matricielles différentiables de a et t.

La règle de dérivation du déterminant nous donne

$$\frac{\partial J}{\partial t}=\sum_{k=1}^{2n} J_k,$$

où J_k est le déterminant obtenu à partir du déterminant J par dérivation de la colonne k. De (2.6) il vient

$$J_k=\begin{cases} -J\mathscr{H}_{q_k p_k}+\langle\psi_k, z\rangle+\langle\varphi_k, w\rangle, & k\leqslant n,\\ J\mathscr{H}_{p_k q_k}+\langle\varphi_k, z\rangle+\langle\varphi_k, w\rangle, & k>n,\end{cases}$$

où φ_k et ψ_k sont des fonctions différentiables de a et t.

Donc

$$\frac{\partial J}{\partial t}=\sum_{k=1}^{2n}(\langle\psi_k, z\rangle+\langle\varphi_k, w\rangle),$$

ce qui prouve le lemme.

Le résultat classique suivant est une conséquence du lemme 2.2.

Théorème 2.2. (de Liouville). *Soit g_H^t une application canonique de l'espace de phase associée à une fonction H, et soit Ω_0 un sous-ensemble mesurable de l'espace de phase. Si $\Omega_t=g_H^t\Omega_0$, alors*

$$\int_{\Omega_t} dq_1\ldots dq_n\,dp_1\ldots dp_n=\int_{\Omega_0} dq_1\ldots dq_n\,dp_1\ldots dp_n.$$

Pour prouver ce théorème, il suffit de poser $\tilde{H}=0$, $w=0$, $z=0$, $a-(p(0), q(0))$ dans le lemme 2.2.

Lemme 2.3. *Soit*

$$\Lambda_0^n:\{p=p_0(\alpha),\ q=q_0(\alpha)\},$$

$$r_0^n:\{w=w_0(\alpha),\ z=z_0(\alpha)\}$$

une variété lagrangienne à germe complexe, et soit $p(\alpha, t)$, $q(\alpha, t)$, $w(\alpha, t)$, $z(\alpha, t)$ la solution du système (2.2), (2.4) qui vérifie les conditions initiales $p(\alpha, 0)=p_0(\alpha)$, $q(\alpha, 0)=q_0(\alpha)$, $w(\alpha, 0)=w_0(\alpha)$, $z(\alpha, 0)=z_0(\alpha)$ et soit enfin $(p(\alpha_0), q(\alpha_0))\in\Lambda_0^n$. Si

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial(p_0+w_0)}{\partial\alpha}\\[2ex] \dfrac{\partial(q_0+z_0)}{\partial\alpha}\end{pmatrix}_{\alpha=\alpha_0}=n$$

et $w(\alpha_0, t) = z(\alpha_0, t) = 0$ *pour* $0 \leqslant t \leqslant T$, *alors*

$$\operatorname{rang} \left(\begin{array}{c} \dfrac{\partial (p+w)}{\partial \alpha} \\ \dfrac{\partial (q+z)}{\partial \alpha} \end{array} \right)_{\substack{\alpha=\alpha_0 \\ t=T}} = n.$$

Démonstration. Soit $\beta \in \mathbf{R}^n$. Au voisinage du point $\alpha = \alpha_0$, $\beta = 0$ dans $\mathbf{R}^n$ posons

$$p_0(\alpha, \beta) = p_0(\alpha), \quad q_0(\alpha, \beta) = q_0(\alpha), \tag{2.7}$$
$$w_0(\alpha, \beta) = w_0(\alpha) + A\beta,$$
$$z_0(\alpha, \beta) = z_0(\alpha) + B\beta,$$

où A et B sont des $n \times n$-matrices. Il est évident qu'on peut choisir A et B telles que la matrice

$$\frac{\partial (p_0 + w_0, q_0 + z_0)}{\partial (\alpha, \beta)}$$

ne soit pas dégénérée au point $(\alpha_0, 0)$.

Soit $p(\alpha, \beta, t)$, $q(\alpha, \beta, t)$, $w(\alpha, \beta, t)$, $z(\alpha, \beta, t)$ la solution du système (2.2), (2.4) qui vérifie la condition initiale (2.7). En appliquant le lemme 2.2 avec $a = (\alpha, \beta)$, on obtient

$$\left. \frac{D(p+w, q+z)}{D(\alpha, \beta)} \right|_{\substack{\alpha=\alpha_0 \\ \beta=0}} = \left. \frac{D(p_0+w_0, q_0+z_0)}{D(\alpha, \beta)} \right|_{\substack{\alpha=\alpha_0 \\ \beta=0}} \neq 0$$

pour $0 \leqslant t \leqslant T$. Ce qui prouve le lemme.

Démonstration du théorème 2.1.

1. Vérifions tout d'abord la condition (g1). En vertu du lemme 2.1 on a

$$|w(\alpha, t)| + |z(\alpha, t)| \leqslant c(\alpha, t)\left(|z_0(\alpha)| + |w_0(\alpha)| + \int_0^t (|\tilde{H}_p| + |\tilde{H}_q|)\, dt,\right.$$

où $c \in C^\infty$.

Du lemme 1.1 et de l'inégalité de Schwartz, il vient

$$\int_0^t (|\tilde{H}_p| + |\tilde{H}_q|)\, dt \leqslant c_1(\alpha, t) \int_0^t \sqrt{|\tilde{H}|}\, dt \leqslant c_1(\alpha, t)\sqrt{t} \left(\int_0^t |\tilde{H}|\, dt \right)^{1/2}, \qquad c_1 \in C^\infty$$

Il existe donc une fonction différentiable $c_2(\alpha, t)$ telle que

$$|w| + |z| \leqslant c_2 \left[D_0^{1/2} + \left(\int_0^t |\tilde{H}|\, dt \right) \right] \leqslant \sqrt{2}\, c_2 \left(D_0 - \int_0^t \tilde{H}\, dt \right)^{1/2} = \sqrt{2}\, c_2\, D^{1/2}.$$

2. Pour établir la condition (g3) considérons la fonction

$$f_j(\alpha, t) = E_{\alpha_j} - \langle w, q_{\alpha_j}\rangle - \frac{1}{2}\langle z, w_{\alpha_j}\rangle + \frac{1}{2}\langle w, z_{\alpha_j}\rangle.$$

Du système (2.2), (2.4), de l'équation

$$\dot{E} = -i\tilde{H} - \frac{i}{2}\langle \tilde{H}_p, w\rangle - \frac{i}{2}\langle \tilde{H}_q, z\rangle$$

et des expressions de $\dot{q}_\alpha$, $\dot{p}_\alpha$, $\dot{w}_\alpha$, $\dot{z}_\alpha$, $\dot{E}_\alpha$ obtenues par dérivation par rapport à α des équations respectives, il résulte que

$$\dot{f}_j(\alpha, t) = \langle w, a_1^{(j)} w\rangle + \langle w, a_2^{(j)} z\rangle + \langle z, a_3^{(j)} z\rangle,$$

où $a_{1,2,3}^{(j)}$ sont des fonctions différentiables de t et de α. Donc

$$\left|\int_0^t \dot{f}_j(\alpha, \tau)\, d\tau\right| \leqslant c(\alpha, t) \int_0^t \left(|w(\alpha, t)|^2 + |z(\alpha, t)|^2\right) d\tau,$$

$$\left|\int_0^t \frac{\partial \dot{f}_j(\alpha, \tau)}{\partial \alpha}\, d\tau\right| \leqslant c(\alpha, t) \int_0^t \left(|w(\alpha, t)| + |z(\alpha, t)|\right) dt,$$

où $c(\alpha, t)$ est une fonction différentiable. Comme $D(\alpha, t)$ est croissante en t et que

$$z = O_D(h^{1/2}), \qquad w = O_D(h^{1/2}),$$

on obtient

$$\int_0^t \dot{f}_j(\alpha, \tau)\, d\tau = O_D(h).$$

Reste à remarquer que

$$f_j(\alpha, 0) = O_{D_0}(h).$$

Comme E_0 est un potentiel sur Λ_0^n, il résulte de

$$D_0(\alpha) \leqslant D(\alpha, t)$$

que

$$f_j(\alpha, t) = f_j(\alpha, 0) + \int_0^t \dot{f}_j(\alpha, \tau)\, d\tau = O_D(h).$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier la majoration $E = O_D(h)$.

3. Si $D(\alpha_0, t) = 0$, alors $D(\alpha_0, \tau) = 0$ pour $0 \leqslant \tau \leqslant t$ et par suite $z(\alpha_0, \tau) = w(\alpha_0, \tau) = 0$ pour $0 \leqslant \tau \leqslant t$. Donc, la condition (g2) est valable en vertu du lemme 2.3. Ce qui prouve le théorème.

Dans la suite, on admettra que si une famille de variétés lagrangiennes Λ_t^n à germes complexes r_t^n peut être déduite de (Λ_0^n, r_0^n) par une application canonique complexe, alors la dissipation $D(\alpha, t)$ et le potentiel $E(\alpha, t)$ sur Λ_t^n sont reliés avec $D_0(\alpha)$ et $E_0(\alpha)$ par les formules du théorème 2.1.

Exemple. Soit $\mathscr{H}_{\bar{I}} = H_{\bar{I}} = \frac{1}{2}(p_{\bar{I}}^2 + q_{\bar{I}}^2)$ et supposons que $(\Lambda_0^n,\ r_0^n)$ est de la forme

$$p = p_0(\alpha), \quad q = q_0(\alpha),$$
$$w = w_0(\alpha), \quad z = z_0(\alpha).$$

Alors, on a les relations suivantes pour (Λ_t^n, r_t^n):

$$p_I(\alpha, t) = p_{I0}(\alpha), \quad P_{\bar{I}}(\alpha, t) = p_{\bar{I}0}(\alpha)\cos t - q_{\bar{I}0}(\alpha)\sin t,$$
$$q_I(\alpha, t) = q_{I0}(\alpha), \quad q_{\bar{I}}(\alpha, t) = q_{\bar{I}0}(\alpha)\cos t + p_{\bar{I}0}(\alpha)\sin t,$$
$$w_I(\alpha, t) = w_{I0}(\alpha), \quad w_{\bar{I}}(\alpha, t) = w_{\bar{I}0}(\alpha)\cos t - z_{\bar{I}0}(\alpha)\sin t,$$
$$z_I(\alpha, t) = z_{I0}(\alpha), \quad z_{\bar{I}}(\alpha, t) = z_{\bar{I}0}(\alpha)\cos t + w_{\bar{I}0}(\alpha)\sin t,$$
$$D(\alpha, t) = D_0(\alpha), \quad E(\alpha, t) = E_0(\alpha),$$
$$S(\alpha, t) = S_0(\alpha) + \frac{1}{4}[p_{\bar{I}0}^2 - q_{\bar{I}0}^2]\sin 2t + \frac{1}{2}\langle q_{\bar{I}0}, p_{\bar{I}0}\rangle(\cos 2t - 1),$$

où $D_0(\alpha)$, $E_0(\alpha)$ et $S_0(\alpha)$ sont respectivement une dissipation, un potentiel et une S-action sur Λ_0^n.

Pour $t = \pm\frac{\pi}{2}$, on obtient en particulier

$$\Lambda^n_{\pm\frac{\pi}{2}}: \{p_I = p_{I0}(\alpha), \quad p_{\bar{I}} = \pm q_{\bar{I}0}(\alpha),$$
$$q_I = q_{I0}(\alpha), \quad q_{\bar{I}} = \pm p_{\bar{I}0}(\alpha)\},$$
$$r^n_{\pm\frac{\pi}{2}}: \{w_I = w_{I0}(\alpha), \quad w_{\bar{I}} = \pm z_{\bar{I}0}(\alpha),$$
$$z_I = z_{I0}(\alpha), \quad z_{\bar{I}} = \pm w_{\bar{I}0}(\alpha)\}.$$

Remarquons que

$$\left\langle p\left(\alpha, \pm\frac{\pi}{2}\right), q\left(\alpha, \pm\frac{\pi}{2}\right)\right\rangle =$$
$$= \langle p_{I0}(\alpha), q_{I0}(\alpha)\rangle - \langle p_{\bar{I}0}(\alpha), q_{\bar{I}0}(\alpha)\rangle = \langle p_0(\alpha), q_0(\alpha)\rangle_I.$$

Définition. Soit I un sous-ensemble de $\{1, 2, \ldots, n\}$ et soit Λ^n: $\{p = p(\alpha),\ q = q(a)\}$, $r^n = (w(\alpha),\ z(\alpha))$ une variété lagrangienne à germe complexe. Le sous-ensemble

$$J_I \overset{\text{déf}}{=} \frac{D\{q_I + z_I, p_{\bar{I}} + w_{\bar{I}}\}}{D\alpha} \neq 0 \tag{2.8}$$

de la variété Λ^n sera appelé *I-ème zone de* (Λ^n, r^n) et désigné par Ω_I. La zone $\Omega_{I_0}, I_0 = \{1, 2, \ldots, n\}$ est dite *non singulière.*

Quand on aura affaire à des zones non singulières, on omettra l'indice I_0 et on écrira Ω pour Ω_{I_0}, E pour E_{I_0}, etc.

Il est évident que Ω_I est un sous-ensemble ouvert de Λ^n. Montrons que des axiomes (g2) et (g3) il résulte que la famille de zones $\{\Omega_I\}$, où I parcourt toutes les parties de l'ensemble $\{1,2,\ldots,n\}$, recouvre l'ensemble Γ des zéros de la dissipation.

Lemme 2.4. *Soient $u(\alpha)$ et $v(\alpha)$ des fonctions différentiables à valeurs dans $\mathbf{C}^n$ définies au voisinage d'un point $\alpha_0 \in \mathbf{R}^n$ et supposons que sont remplies les conditions suivantes pour $\alpha=\alpha_0$:*

(i) $$[u,v]_{ij}=0, \quad i,j=1,\ldots,n;$$

(ii) $$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \alpha} \\ \dfrac{\partial v}{\partial \alpha} \end{pmatrix} = n.$$

Il existe alors un $I \subset \{1,2,\ldots,n\}$ tel que la matrice $\partial\{u_{\bar{I}}, v_I\}/\partial\alpha$ n'est pas dégénérée au point $\alpha=\alpha_0$.

Démonstration. Désignons par A la matrice $\dfrac{\partial u}{\partial \alpha}(\alpha_0)$ et supposons que rang $A=k$. Si $k=n$, la proposition du lemme est évidente. Supposons que $k<n$. Sans nuire à la généralité on peut admettre que les k premières lignes de la matrice A sont linéairement indépendantes. Soit C la matrice composée des k premières colonnes de la matrice A et des $n-k$ dernières colonnes de la matrice $B=\dfrac{\partial v}{\partial \alpha}(\alpha_0)$. Montrons que rang $C=n$, ce qui prouvera le lemme. Raisonnons par l'absurde en supposant que rang $C=$ $=m<n$. Alors rang $\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = m$. Supposons que $\beta \in \mathbf{C}^n$ et $\alpha = M\beta$, où M est une matrice complexe non dégénérée. Posons

$$\frac{\partial}{\partial \beta_i} = \sum_{j=1}^{n} M_{ji} \frac{\partial}{\partial \alpha_j}, \qquad A' = \frac{\partial u}{\partial \beta}(\alpha_0), \qquad B' = \frac{\partial v}{\partial \beta}(\alpha_0),$$

et soit C' la matrice des k premières colonnes de la matrice A' et des $n-k$ dernières colonnes de la matrice B'. Il est évident que

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A' \\ B' \end{pmatrix} = n, \qquad \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A' \\ C' \end{pmatrix} = m.$$

Choisissons maintenant M de telle sorte que les $n-m$ dernières colonnes de la matrice $\begin{pmatrix} A' \\ C' \end{pmatrix}$ soient nulles et $\det (A'_{ij})_{i,j=1}^{k} \neq 0$. La condition $[u,v]_{ij}=0$ nous donne

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial \beta_i}, \frac{\partial v}{\partial \beta_n} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial u}{\partial \delta_n}, \frac{\partial v}{\partial \beta_i} \right\rangle = \sum_{r=1}^{k} \frac{\partial u_r}{\partial \beta_i} \frac{\partial v_r}{\partial \beta_n} = 0.$$

Comme $\left(\frac{\partial u_i}{\partial \beta_j}\right)_{i,j=1}^{k} \neq 0$, la dernière colonne de la matrice $\begin{pmatrix} A' \\ B' \end{pmatrix}$ est nulle, ce qui contredit le fait que rang $\begin{pmatrix} A' \\ B' \end{pmatrix} = n$.

Corollaire. $\Gamma \in \bigcup_{I \subset \{1,2,\ldots,n\}} \Omega_I$.

En effet, posons $u = q + z$, $v = p + w$ et soit $\alpha \in \Gamma$. La condition (ii) est alors confondue avec l'axiome (g2) du germe complexe et la condition (i) résulte de l'axiome (g3).

Dans la suite on n'étudiera qu'un petit voisinage Γ sur Λ^n, donc on peut admettre que l'ensemble de toutes les zones recouvre Γ.

Définition. La fonction

$$\mu(\alpha) = \frac{1}{2}\langle z(\alpha),\ \mathscr{E}(\alpha)\, z(\alpha)\rangle,$$

où

$$\mathscr{E} = BC^{-1}, \qquad B = \frac{\partial (p+w)}{\partial \alpha}, \qquad C = \frac{\partial (q+z)}{\partial \alpha}$$

s'appelle μ-*action* dans une zone non singulière. La phase Φ d'un germe dans une zone non singulière se définit comme suit:

$$\Phi(\alpha) = -\frac{1}{2}\langle w(\alpha), z(\alpha)\rangle + \mu(\alpha) + S(\alpha) + E(\alpha).$$

Remarquons que

$$\mathscr{E} = \frac{\partial (p+w)}{\partial (q+z)},$$

où $\partial/\partial(q+z)$ est l'opérateur de dérivation formelle par rapport à $q+z$.

L'enthalpie W (cf. remarque 2.2) satisfaisant la condition

$$p + w = \frac{\partial W}{\partial (q+z)} + O_D(h),$$

il vient

$$\mathscr{E} = \frac{\partial^2 W}{\partial (q+z)^2} + O_D(h^{1/2}).$$

De là il s'ensuit immédiatement que la matrice $\mathscr{E}$ est « presque symétrique », i.e.

$$\mathscr{E} - {}^t\mathscr{E} = O_D(h^{1/2}),$$

($^t\mathscr{E}$ désigne la transposée de la matrice $\mathscr{E}$).

Introduisons une S-action, une μ-action et une phase dans la zone Ω_I. Considérons à cet effet l'application canonique $(g_{H_I}^{\pi/2},\ dg_{H_I}^{\pi/2})$ associée au hamiltonien H_I de l'exemple p. 492. On remarquera que l'image de la zone

Ω_I par l'application $g_{H_I}^{\pi/2}$ appartient à une zone non singulière dans $g_{H_I}^{\pi/2}\Lambda^n$, puisque

$$\frac{\partial q\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right)}{\partial \alpha} = \frac{\partial \{q_I(\alpha), p_{\bar{I}}(\alpha)\}}{\partial \alpha} \neq 0 \qquad \text{pour } \alpha \in \Omega_I.$$

Définition. Définissons une *S-action*, une μ-*action* et une *phase* dans la zone Ω_I par les formules

$$S_I(\alpha) = S\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right), \quad \mu_I(\alpha) = \mu\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right), \quad \Phi_I(\alpha) = \Phi\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right),$$

où $S\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right)$, $\mu\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right)$ et $\Phi\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right)$ respectivement sont une S-action, une μ-action et une phase dans une zone non singulière de $g_{H_I}^{\pi/2}\Lambda^n$.

De l'exemple p. 492 on déduit les formules exactes:

$$S_I(\alpha) = S(\alpha) - \langle p_{\bar{I}}(\alpha), q_{\bar{I}}(\alpha)\rangle,$$

$$\mu_I(\alpha) = \frac{1}{2}\langle \{z_I, w_I\}, \mathscr{E}_I(z_I, w_{\bar{I}})\rangle,$$

$$\Phi_I(\alpha) = -\frac{1}{2}\langle w, z\rangle_I + \mu_I + S_I + E,$$

où

$$\mathscr{E} = B_I C_I^{-1}, \quad B_I = \frac{\partial \{p_I + w_I, -q_{\bar{I}} - z_{\bar{I}}\}}{\partial \alpha},$$

$$C_I = \frac{\partial \{q_I + z_I, p_{\bar{I}} + w_{\bar{I}}\}}{\partial \alpha}.$$

A noter que toute S-action $S(\alpha, t)$ sur une famille de variétés lagrangiennes $\Lambda_t^n = g_H^t \Lambda^n$ est solution de l'équation

$$dS_I = \langle p_I, dq_I\rangle - \langle q_{\bar{I}}, dp_{\bar{I}}\rangle - H dt,$$

qui se ramène à l'équation de Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial x_I}, \xi_{\bar{I}}, x_I, -\frac{\partial S}{\partial \xi_{\bar{I}}}, t\right) = 0$$

par le changement de variables

$$\begin{gathered}(\alpha, t) \to (x_I, \xi_{\bar{I}}, t),\\ x_I = q_I(\alpha, t), \ \xi_{\bar{I}} = p_{\bar{I}}(\alpha, t),\\ S(x_I, \xi_{\bar{I}}, t) = S_I(\alpha, t).\end{gathered} \tag{2.9}$$

On montrera plus bas que si $\operatorname{Im}\Phi_I \geqslant 0$, alors $\Phi_I(\alpha, t)$ est solution de l'équation de Hamilton-Jacobi à dissipation obtenue par le changement de variables (2.9).

§ 3. γ-atlas et inégalité de dissipation

Introduisons une forme spéciale d'atlas sur Λ^n qui nous permettront de formuler une condition sur le germe complexe appelée *condition de dissipation* qui est utilisée dans l'intégration des équations de Hamilton-Jacobi à dissipation.

Lemme 3.1. *Soit $\alpha_0 \in \Omega_I$. Il existe alors une fonction vectorielle réelle $\gamma(\alpha)$ à n dimensions dont chaque composante est une composante du vecteur à $2n+1$ dimensions*

$$(0, \operatorname{Re} z_I(\alpha),\ \operatorname{Im} z_I(\alpha),\ \operatorname{Re} w_{\bar{I}}(\alpha),\ \operatorname{Im} w_{\bar{I}}(\alpha))$$

telle que

$$\left.\frac{D(q_I+\gamma_I,\ p_{\bar{I}}+\gamma_{\bar{I}})}{D\alpha}\right|_{\alpha=\alpha_0} \neq 0.$$

Pour prouver ce lemme nous aurons besoin des faits suivants d'algèbre linéaire.

Lemme 3.2. *Soient $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_m$ des éléments d'un espace vectoriel réel V. Les éléments*

$$u_1 + iv_1, \ldots, u_m + iv_m$$

sont linéairement indépendants dans l'espace complexe CV associé à V si et seulement si

$$u_1 \oplus v_1, \ldots, u_m \oplus v_m, (-v_1) \oplus u_1, \ldots, (-v_m) \oplus u_m$$

sont linéairement indépendants dans $V \oplus V$.

Démonstration. Soient a_j et b_j des nombres réels. Alors

$$(a_j = b_j = 0,\ \forall_j) \Leftrightarrow \left(\sum_j (a_j + ib_j)(u_j + iv_j) = 0\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_j (a_j u_j - b_j v_j) = \sum_j (a_j v_j + b_j v_j) = 0\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_j a_j (u_j \oplus v_j) + \sum_j b_j ((-v_j) \oplus u_j) = 0\right).$$

Démonstration du lemme 3.1. Dans l'exemple p. 492 nous avons montré que l'application $g^{\pi/2}_{H_t}$ peut sans restriction à la généralité être considérée comme non dégénérée. Alors $\det C(\alpha_0) \neq 0$. Figeons le point $\alpha = \alpha_0$. Supposons que $\operatorname{rang}\left(\frac{\partial q}{\partial \alpha}\right) = k$. Sans nuire à la généralité on peut

admettre que les k premières lignes de la matrice $\partial q/\partial\alpha$ sont linéairement indépendantes. Considérons la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial(q+\operatorname{Re} z)}{\partial\alpha} \\ \\ \dfrac{\partial \operatorname{Im} z}{\partial\alpha} \end{pmatrix}$$

Le lemme 3.2 nous donne, compte tenu de la non-dégénérescence de la matrice C,

$$\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial(q+\operatorname{Re} z)}{\partial\alpha} & -\dfrac{\partial \operatorname{Im} z}{\partial\alpha} \\ \\ \dfrac{\partial \operatorname{Im} z}{\partial\alpha} & \dfrac{\partial(q+\operatorname{Re} z)}{\partial\alpha} \end{pmatrix} \neq 0,$$

puisque rang $M = n$. Choisissons $l_{k+1}, \ldots, l_n$ tels que la matrice M_1 déduite de la matrice $\dfrac{\partial q}{\partial\alpha}$ par substitution à ses $n-k$ dernières colonnes des $n-k$ dernières colonnes de M soit non dégénérée. Posons

$$\gamma_j = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad 1 \leqslant j \leqslant k, \\ \operatorname{Re} z_{l_j} & \text{pour} \quad j > k,\ l_j \leqslant n, \\ \operatorname{Im} z_{l_j} & \text{pour} \quad j > k,\ l_j > n. \end{cases}$$

Alors $\partial(q+\gamma)/\partial\alpha$ est non dégénérée. En effet,

$$\frac{\partial(q+\gamma)}{\partial\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & 1 \end{pmatrix} M_1 .$$

où A est une matrice de dimension $(n-k) \times k$. Ce qui prouve le lemme

Corollaire. *Il existe un voisinage u_γ du point α_0 tel que l'application*

$$\pi_\gamma^I : \alpha \to \{q_I(\alpha) + \gamma_I(\alpha),\ p_{\bar{I}}(\alpha) + \gamma_{\bar{I}}(\alpha)\}$$

est un difféomorphisme dans $\mathbf{R}^n$.

Définition. On appellera *γ-domaine* le voisinage u_γ, *γ-difféomorphisme*, l'application π_γ^I, et *γ-carte* de la variété lagrangienne Λ^n, le couple (u_γ, π_γ^I). On se servira parfois de la notion de γ-carte comme synonyme de γ-domaine.

On appellera *γ-atlas* toute collection de γ-cartes recouvrant Λ^n. Si $\gamma(\alpha) = Fv(\alpha)$, où F est une matrice et

$$v = (\operatorname{Re} z_I,\ \operatorname{Im} z_I,\ \operatorname{Re} w_{\bar{I}},\ \operatorname{Im} w_{\bar{I}}),$$

on dira alors que la γ-carte correspondante de la zone Ω_I est de type (I, F). Une carte de type $(I, 0)$ sera dite *carte non singulière* de la zone Ω_I.

Lemme 3.3. *Soient* $(u_{\bar\gamma}, \pi^I_{\bar\gamma})$ *et* $(u_{\bar{\bar\gamma}}, \pi^I_{\bar{\bar\gamma}})$ *des* γ*-cartes de la zone* Ω_I. *Alors* $\sigma = (\pi^I_{\bar\gamma})^{-1} \circ \pi^I_{\bar{\bar\gamma}}$ *admet la décomposition asymptotique*

$$\sigma(\alpha) = \alpha + \sigma^{(1)}(\alpha) + \sigma^{(2)}(\alpha) + O_D(h^{3/2}),$$

où

$$\sigma^{(1)}(\alpha) = A^{-1}(\bar{\bar\gamma} - \bar\gamma),$$

$$\sigma^{(2)}(\alpha) = -\frac{1}{2} A^{-1} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \{q_I + \bar\gamma_I,\ p_{\bar I} + \bar\gamma_{\bar I}\}}{\partial\alpha_i \partial\alpha_j}\ \sigma^{(1)}_i \sigma^{(1)}_j,$$

$$A = \frac{\partial \{q_I + \bar\gamma_I,\ p_{\bar I} + \bar\gamma_{\bar I}\}}{\partial\alpha}.$$

Démonstration. Sans nuire à la généralité, on peut simplifier la démonstration en admettant que Ω_I est une zone non singulière. Alors $\sigma(\alpha)$ se détermine à partir de l'équation

$$q(\sigma(\alpha)) + \bar\gamma(\sigma(\alpha)) = q(\alpha) + \bar{\bar\gamma}(\alpha). \tag{3.1}$$

Posons

$$\sigma(\alpha) = \alpha + \sigma^{(1)}(\alpha) + \sigma^{(2)}(\alpha) + \gamma(\alpha).$$

En développant l'expression $q(\sigma(\alpha)) + \bar\gamma(\sigma(\alpha))$ du second membre de (3.1) en série de $(\sigma^{(1)} + \sigma^{(2)} + r)$, on obtient

$$(q_\alpha + \bar\gamma_\alpha)(\sigma^{(1)} + \sigma^{(2)} + r) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 (q + \bar\gamma)}{\partial\alpha_i \partial\alpha_j} (\sigma^{(1)} +$$

$$+ \sigma^{(2)} + r_i)(\sigma^{(1)} + \sigma^{(2)} + r_j) + F_3(\sigma^{(1)} + \sigma^{(2)} + r) = \bar{\bar\gamma}(\alpha) - \bar\gamma(\alpha), \tag{3.2}$$

où F_3 est un polynôme homogène de degré 3 dépendant différentiablement de α. Comme $\sigma^{(1)}$ et $\sigma^{(2)}$ satisfont les équations

$$(q_\alpha + \bar\gamma_\alpha)\sigma^{(1)}(\alpha) = \bar{\bar\gamma}(\alpha) - \bar\gamma(\alpha),$$

$$(q_\alpha + \bar\gamma_\alpha)\sigma^{(2)}(\alpha) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 (q + \bar\gamma)}{\partial\alpha_i \partial\alpha_j} \sigma^{(1)}_i \sigma^{(2)}_j = 0,$$

et que

$$\sigma^{(1)} = O_D(h^{1/2}), \qquad \sigma^{(2)} = O_D(h), \qquad r|_\Gamma = 0,$$

il vient

$$A_1 r = O_D(h^{3/2}),$$

où $A_1|_\Gamma = A_\Gamma$, puisque $\det A_1 \neq 0$ au voisinage de $\alpha_0 \in \Gamma$. Ce qui prouve le lemme

Corollaire. *La* $O_{D(\alpha)}$*-majoration est équivalente à la* $O_{D(\sigma(\alpha))}$*-majoration.*

Démonstration. Soit $\tilde D(\alpha) = D(\sigma(\alpha))$. Comme $\sigma(\alpha) - \alpha = O_D(h^{1/2})$, la décomposition

$$\tilde D(\alpha) = D(\alpha) + \langle D_\alpha, (\sigma(\alpha) - \alpha)\rangle + \langle \sigma(\alpha) - \alpha, f(\alpha)(\sigma(\alpha) - \alpha)\rangle,$$

où $f(\alpha)$ est une fonction vectorielle différentiable, entraîne que $\tilde{D} = O_D(h)$. En effectuant les mêmes calculs sur σ et en remplaçant σ par σ^{-1}, on trouve que $D = O_{\tilde{D}}(h)$.

Définition. La fonction

$$\Phi_I^\gamma = \Phi_I + \langle \{p_I, -q_\Gamma\} + \eta^I, \gamma \rangle + \frac{1}{2} \langle \gamma, \mathscr{E}_I^s \gamma \rangle .$$

où

$$\eta^I = \{w_I, -z_\Gamma\} - \mathscr{E}_I^s \{z_I, w_I\},$$

$$\mathscr{E}_I^s = \frac{1}{2} (\mathscr{E}_I + {}^t \mathscr{E}_I),$$

est définie dans une γ-carte de la zone Ω_I, sera appelée *γ-réaccord de phase* d'un germe complexe dans cette γ-carte. Remarquons toutefois que Φ_I^γ est déterminée à l'aide de u_γ, que $\sigma(\alpha)$ existe ou non. Le lemme suivant éclairera cette définition.

Lemme 3.4. *Soient (u_γ, π_γ^I) et $(u_{\tilde{\gamma}}, \pi_{\tilde{\gamma}}^I)$ deux γ-cartes d'une même zone Ω_I. Alors sur le domaine de définition de l'application $(\pi_{\tilde{\gamma}}^I)^{-1} \circ \pi_{\tilde{\gamma}}^I$ on a l'égalité*

$$\Phi_I^{\tilde{\gamma}} = \Phi_I^\gamma \circ (\pi_\gamma^I)^{-1} \circ \pi_{\tilde{\gamma}}^I + O_D(h^{3/2}).$$

Remarques. 1. L'application composée $(\pi_\gamma^I)^{-1} \circ \pi_{\tilde{\gamma}}^I$ est visiblement définie au voisinage de l'ensemble $u_\gamma \cap u_{\tilde{\gamma}} \cap \Gamma$.

2. Le lemme 3.4 exprime que le γ-réaccord de la phase $\Phi_I^\gamma(\alpha)$ se déduit, à $O_D(h^{3/2})$ près, de la phase $\Phi_I(\alpha)$ par le changement de variables

$$\Phi_I^\gamma - (\alpha) \sim \Phi_I(\sigma(\alpha)),$$

où $\sigma(\alpha)$ est solution des équations

$$q_I(\sigma(\alpha)) = q_I(\alpha) + \gamma_I(\alpha),$$
$$p_\Gamma(\sigma(\alpha)) = p_\Gamma(\alpha) + \gamma_\Gamma(\alpha).$$

Démonstration du lemme 3.4. Supposons sans nuire à la généralité que la carte Ω_I est non singulière.

Posons $\sigma = \pi_\gamma^{-1} \circ \pi_{\tilde{\gamma}}$. En développant $\Phi^\gamma(\sigma(\alpha))$ en série de $(\sigma(\alpha) - \alpha)$ et en se servant du lemme 3.3, on trouve que

$$R(\alpha) \overset{\text{déf}}{=} \Phi^\gamma(\sigma(\alpha)) - \Phi^{\tilde{\gamma}}(\alpha) = \Phi^\gamma(\alpha) - \Phi^{\tilde{\gamma}}(\alpha) +$$

$$+ \langle \Phi_\alpha^\gamma, \sigma^{(1)}(\alpha) + \sigma^{(2)}(\alpha) \rangle + \frac{1}{2} \langle \Phi_{\alpha\alpha}^\gamma \sigma^{(1)}(\alpha), \sigma^{(1)}(\alpha) \rangle + O_D(h^{3/2}).$$

Pour calculer les dérivées $\partial \Phi^\gamma / \partial \alpha$ et $\partial^2 \Phi^\gamma / \partial \alpha^2$ il est commode d'exprimer Φ^γ en fonction de l'enthalpie du germe complexe :

$$\Phi^\gamma = W - \langle p + w - \frac{1}{2} \mathscr{E}(z - \gamma), z - \gamma \rangle + O_D(h^{3/2}).$$

Par définition de l'enthalpie

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = {}^tC \frac{\partial W}{\partial (q+z)} = {}^tC(p+w) + O_D(h),$$

puisque

$$\Phi_\alpha^\gamma = {}^tC(p+w) - {}^tB(z-\gamma) + \frac{1}{2}{}^t(z-\gamma)_\alpha \mathscr{E}(z-\gamma) -$$

$$- {}^t(z-\gamma)_\alpha \left(p+w-\frac{1}{2}\mathscr{E}(z-\gamma)\right) + O_D(h) =$$

$$= {}^tA(p+w) - {}^tC\mathscr{E}(z-\gamma) + {}^t(z-\gamma)_\alpha \mathscr{E}(z-\gamma) +$$

$$+ O_D(h) = {}^tA[p+w-\mathscr{E}(z-\gamma)] + O_D(h), \tag{3.3}$$

où $A = \partial(q+\gamma)/\partial\alpha$. En dérivant encore et en se servant de l'identité

$$1 - C^{-1}(z-\gamma)_\alpha = 1 - C^{-1}(q+z)_\alpha + C^{-1}(q+\gamma)_\alpha = C^{-1}A,$$

on obtient

$$\frac{\partial^2 \Phi^\gamma}{\partial \alpha^2} = \sum_{i,j} \left\langle \frac{\partial^2 (q+\gamma)}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j}, p \right\rangle + {}^tA\left(B - \mathscr{E}(z-\gamma)_\alpha\right) + O_D(h^{1/2}) =$$

$$= \sum_{i,j} \left\langle \frac{\partial^2 (q+\gamma)}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j}, p \right\rangle {}^tA\,\mathscr{E}A + O_D(h^{1/2}). \tag{3.4}$$

En portant dans (3.2) les expressions (3.3), (3.4) et celles de $\sigma^{(1)}$ et $\sigma^{(2)}$ on déduit du lemme 3.3 que $R = O_D(h^{3/2})$. Ce qui prouve le lemme.

Définition. On dira que dans un γ-domaine u_γ d'une zone Ω_I d'une variété lagrangienne à germe complexe *est satisfaite l'inégalité de dissipation* s'il existe sur u_γ des fonctions différentiables $\varepsilon(\alpha) > 0$ et $c(\alpha) \geqslant 0$ telles que

$$\operatorname{Im} \Phi_I^\gamma + cD^{3/2} \geqslant \varepsilon D, \quad \alpha \in u_\gamma.$$

On dira qu'un germe complexe sur une variété lagrangienne Λ^n est *dissipatif* sur u_γ si l'inégalité de dissipation est réalisée dans chaque γ-domaine.

Remarque. La condition de dissipation sur u_γ équivaut à la suivante: tout point $\alpha \in u_\gamma$ possède un voisinage dans lequel est remplie l'inégalité de dissipation. Cette assertion résulte du

Lemme 3.5. *Soient Λ une sous-variété de $\mathbf{R}^m$, $\{u_\beta\}$ un recouvrement ouvert de Λ ($u_\beta \subset \Lambda$) et $\{c_\beta\}$ une famille de nombres réels. Si*

$$f(\alpha) = \inf_{\alpha \in u_\beta} c_\beta,$$

il existe une fonction φ de classe C^∞ sur Λ telle que $\varphi \geqslant f$.

Démonstration. Toute sous-variété de $\mathbf{R}^m$ est un espace localement compact muni d'une base dénombrable composée d'ensembles ouverts. Donc il existe une suite $\{K_n\}$ de sous-ensembles compacts de Λ^n telle que

$$\overset{\circ}{K}_n \subset K_{n+1}, \quad \bigcup_n K_n = \Lambda^n,$$

où le signe $\circ$ représente l'intérieur de l'ensemble. L'ensemble K_n étant compact, on peut le recouvrir d'une sous-famille finie $\{u_\beta\}$, donc il existe un $d_n \geqslant 0$ tel que $f(\alpha) \leqslant d_n$ pour $\alpha \in K_n$. Supposons que $A_n = K_n \setminus \overset{\circ}{K}_{n-1}$. Alors A_n est compact et

$$A_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}, \quad A_n \cap K_{n-2} = \varnothing.$$

Donc, il existe sur Λ une fonction différentiable φ_n telle que $0 \leqslant \varphi_n \leqslant d_n$ et

$$\varphi_n(\alpha) = \begin{cases} d_n & \text{si} \quad \alpha \in A_n, \\ 0 & \text{si} \quad \alpha \notin \overset{\circ}{K}_{n+1} \text{ ou } \alpha \in K_{n-2}. \end{cases}$$

Il est aisé de voir que la fonction $\varphi(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\alpha)$ satisfait les conditions du lemme.

Remarque. Dans l'inégalité de dissipation, on peut prendre ε et c tels que $c(\alpha) = 0$ dans tout voisinage de l'ensemble $\Gamma \cap u_\gamma$.

Définition. On dit qu'un germe complexe γ^n sur une variété lagrangienne Λ^n sur laquelle on a fixé un γ-atlas est *dissipatif* s'il l'est dans chaque γ-domaine.

Remarque. Vu que $S_I(\alpha)$ est réelle et que la partie réelle de la phase n'intervient pas dans la condition de dissipation, la notion de germe dissipatif peut être utilisée dans le cas où il n'existe pas de S-action sur Λ^n.

Théorème 3.1. *La dissipativité d'un germe complexe ne dépend pas du choix du γ-atlas sur Λ^n.*

Ce théorème dit que si l'inégalité (3.4) a lieu dans un voisinage $u \subset u_\gamma^I \cap u_\gamma^K$ d'un point $\alpha_0 \in \Gamma$, où u_γ^I est un γ-domaine de Ω_I et u_γ^K un γ-domaine de Ω_K, alors il existe une fonction $c_1 \geqslant 0$ et une fonction $\varepsilon_1 > 0$ telles que

$$\operatorname{Im} \Phi_K^{\gamma\prime} = c_1 D^{3/2} \geqslant \varepsilon_1 D.$$

Pour $I = K$ ceci résulte immédiatement du lemme 3.4 et du corollaire du lemme 3.3. Dans le cas général, ce théorème sera prouvé plus bas.

Dans la suite on admettra implicitement que le germe est dissipatif.

§ 4. Intégration de l'équation de Hamilton-Jacobi à dissipation

On intégrera l'équation de Hamilton-Jacobi à dissipation en se servant des systèmes (2.2) et (2.4). Soit

$$\Lambda_t^n: \{p=p(\alpha, t),\ q=q(\alpha, t)\},\quad 0\leqslant t\leqslant T$$

une famille de variétés lagrangiennes à germes complexes

$$r_t^n: \{w=w(\alpha, t),\ z=z(\alpha, t)\},$$

image de (Λ_0^n, r_0^n) par l'application canonique complexe associée au hamiltonien $\mathscr{H}=H+i\widetilde{H}$. Soit M^{n+1} la variété associée à la famille $\{\Lambda_t^n\}$. Définissons un γ-atlas sur M^{n+1} comme suit. Soit U_γ un sous-ensemble ouvert de M^{n+1} tel que son intersection (si elle n'est pas vide) avec tout plan $t=\text{const}$ soit un γ-domaine sur Λ_t^n, ce type de γ-domaine ne dépendant pas de t. Considérons le difféomorphisme

$$\Pi_\gamma^I: (\alpha, t)\to(x, t)$$

du domaine U_γ sur un domaine de $\mathbf{R}^{n+1}$, défini par les formules

$$x_I=q_I(\alpha, t)+\gamma_I(\alpha, t),\qquad x_{\bar{I}}=p_{\bar{I}}(\alpha, t)+\gamma_{\bar{I}}(\alpha, t).$$

Le couple (U_γ, Π_γ^I) sera appelé γ-carte de type (I, F) de la variété M^{n+1}.

Définition. Une famille $\{\Lambda_t^n, r_t^n\}$ est *dissipative* si pour toute γ-carte (U_γ, Π_γ^I) il existe des fonctions différentiables $\varepsilon>0$ et $c\geqslant 0$ telles que

$$\varepsilon(\alpha, t)\, D(\alpha, t)\leqslant \operatorname{Im}\Phi_I^\gamma(\alpha, t)+c(\alpha, t)\,[D(\alpha, t)]^{3/2},\qquad (\alpha, t)\in U_\gamma.$$

Cette inégalité sera appelée *inégalité de dissipation* dans la carte (U_γ, Π_γ^I).

Théorème 4.1. *Si un germe complexe r_0^n sur une variété lagrangienne Λ_0^n est dissipatif, la famille $\{\Lambda_t^n, r_t^n\}$, où*

$$\Lambda_t^n=g_H^t\Lambda_0^n,\qquad r_t^n=(dg_{H+i\widetilde{H}}^t)\, r_0^n$$

est dissipative.

En particulier, la propriété d'un germe d'être dissipatif est invariante par les applications canoniques complexes. Ce théorème sera prouvé ultérieurement.

Théorème 4.2. *Soit M^{n+1} la variété correspondant à une famille $\{\Lambda_t^n\}$. S'il existe un γ-atlas de la variété M^{n+1} composé d'une seule carte (U_γ, Π_γ^I), les fonctions*

$$S=(\Phi^\gamma+icD^{3/2})\circ\Pi_\gamma^{-1},$$

où Φ^γ est la γ-phase du germe et c la fonction de l'inégalité de dissipation, vérifient la relation (1.5).

Pour prouver ce théorème nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 4.1. *Il existe une fonction différentiable* $g(\alpha, t)$ *telle que*

$$t \max_{0\leqslant\tau\leqslant t} |\tilde{H}(p(\alpha,\tau), q(\alpha,\tau), \tau)| \leqslant g(\alpha, t)[D(\alpha, t)]^{3/2}.$$

Démonstration. En omettant α, posons

$$f(t) = -\tilde{H}(p(\alpha, t), q(\alpha, t), t), \qquad a = a(t) = \max_{0\leqslant\tau\leqslant t} f.$$

L'inégalité de Gårding nous donne

$$|f'(\tau)| \leqslant g_1 \sqrt{f(\tau)}.$$

Si $\sqrt{f} = h$, alors $|h'| \leqslant g_1/2$ et, par suite,

$$h(\tau) \geqslant \sqrt{a} - \frac{g_1}{2} |\tau - \tau_0|.$$

D'où

$$h(\tau) \geqslant \frac{\sqrt{a}}{2} \quad \text{lorsque} \quad |\tau - \tau_0| \leqslant \frac{\sqrt{a}}{g_1},$$

c'est-à-dire que

$$f(\tau) \geqslant \frac{a}{2} \quad \text{lorsque} \quad |\tau - \tau_0| \leqslant \frac{\sqrt{a}}{g_1}.$$

Distinguons les deux cas suivants :

(i) $\dfrac{\sqrt{a}}{g_1} \leqslant \dfrac{t}{2}$. Alors

$$D(\alpha, t) \geqslant \frac{a}{4} \cdot \frac{\sqrt{a}}{g_1} = \frac{a^{3/2}}{4g_1},$$

donc

$$t \max_{0\leqslant\tau\leqslant t} f(\tau) \leqslant t(4g_1)^{2/3}[D(\alpha, t)]^{2/3}.$$

(ii) $\dfrac{\sqrt{a}}{g_1} > \dfrac{t}{2}$. Alors

$$D(\alpha, t) \geqslant \frac{1}{8} ta,$$

donc

$$t \max_{0\leqslant\tau\leqslant t} f(\tau) \leqslant 8D(\alpha, t) \leqslant c(\alpha, t)[D(\alpha, t)]^{2/3}.$$

Ce qui prouve le lemme.

Démonstration du théorème 4.2.

I. Calculons Φ^γ. Pour cela, mettons-la sous la forme

$$\Phi^\gamma = \frac{1}{2}\langle z - \gamma, \mathscr{E}(z - \gamma)\rangle + \langle p + w, \gamma\rangle - \frac{1}{2}\langle w, z\rangle + S + E.$$

On a

$$\dot{\Phi}^\gamma = \frac{1}{2}\langle z-\gamma,\ \dot{\mathscr{E}}(z-\gamma)\rangle + \langle \dot{z}-\dot{\gamma},\ \mathscr{E}(z-\gamma)\rangle + \\ + \langle p+w,\ \dot{\gamma}\rangle + \langle \dot{p}+\dot{w},\ \gamma\rangle - \frac{1}{2}\langle \dot{w},\ z\rangle - \\ - \frac{1}{2}\langle w,\ \dot{z}\rangle + \dot{S} + \dot{E} + \langle \dot{z} \quad \dot{\gamma},\ O_D(h)\rangle. \tag{4.1}$$

Calculons tout d'abord

$$\dot{\mathscr{E}} = \dot{B}C^{-1} - BC^{-1}\dot{C}C^{-1}.$$

De (2.6) il vient

$$\dot{B} = -\mathscr{H}_{qq}C - \mathscr{H}_{qp}B + O_D(h^{1/2}),$$
$$\dot{C} = \mathscr{H}_{pq}C + \mathscr{H}_{pp}B + O_D(h^{1/2}),$$

donc

$$\dot{\mathscr{E}} = -\mathscr{H}_{qq} - \mathscr{H}_{qp}\mathscr{E} - \mathscr{E}\mathscr{H}_{pq} - \mathscr{E}\mathscr{H}_{pp}\mathscr{E} + O_D(h^{1/2}).$$

On rappelle que

$$\dot{E} = -i\tilde{H} - \frac{i}{2}[\langle w,\ \tilde{H}_p\rangle + \langle z,\ \tilde{H}_q\rangle],$$
$$\dot{S} = -H + \langle p,\ H_p\rangle$$

en vertu de la définition du potentiel et la S-action sur Λ_t^n. Soit $\xi = w - \mathscr{E}(z-\gamma)$. En portant dans (4.1) les expressions de $\mathscr{E}$, $\dot{S}$, $\dot{E}, \dot{p}$, $\dot{w}$, $\dot{z}$ (cf. (2.2), (2.4)) et en utilisant le fait que $\mathscr{E}$ est «presque symétrique», on obtient

$$\dot{\Phi}^\gamma = \frac{1}{2}\langle z-\gamma,\ -\mathscr{H}_{qq}(z-\gamma) - 2\mathscr{H}_{qp}\mathscr{E}(z-\gamma) - \mathscr{E}\mathscr{H}_{pp}\dot{\mathscr{E}}(z-\gamma)\rangle + \\ + \langle \mathscr{E}(z-\gamma),\ i\tilde{H}_p + \mathscr{H}_{pq}z + \mathscr{H}_{pp}w\rangle + \langle \dot{\gamma},\ p+\xi\rangle - \langle \gamma,\ \mathscr{H}_q + \mathscr{H}_{qq}w + \mathscr{H}_{qq}z\rangle + \\ + \frac{1}{2}\langle z,\ i\tilde{H}_q + \mathscr{H}_{qq}z + \mathscr{H}_{qp}w\rangle - \frac{1}{2}\langle w,\ i\tilde{H}_p + \mathscr{H}_{pq}z + \mathscr{H}_{pp}w\rangle - \mathscr{H} + \\ + \langle p,\ H_p\rangle - \frac{i}{2}[\langle w,\ \tilde{H}_p\rangle + \langle z,\ \tilde{H}_q\rangle] + \langle i\tilde{H}_p + \dot{\gamma},\ O_D(h)\rangle + O_D(h^{3/2}) = \\ = -\mathscr{H} + i\langle \tilde{H}_p,\ \xi\rangle - \langle \gamma,\ \mathscr{H}_q\rangle - \frac{1}{2}\langle \gamma,\ \mathscr{H}_{qq}\gamma\rangle - \langle \mathscr{H}_{pq}\gamma,\ \xi\rangle - \frac{1}{2}\langle \xi,\ \mathscr{H}_{pp}\xi\rangle + \\ + \langle p,\ H_p\rangle + \langle \dot{\gamma},\ p+\xi\rangle + \langle i\tilde{H}_p + \dot{\gamma},\ O_D(h)\rangle + O_D(h^{3/2}).$$

Les développements en série de $\mathscr{H}(p, q+\gamma, t)$, $\mathscr{H}_p(p, q+\gamma, t)$ et $\mathscr{H}_{pp}(p, q+\gamma, t)$ au voisinage du point (p, q, t) et la relation $\xi = O_D(h^{1/2})$ nous donnent

$$\dot{\Phi}^\gamma = -\mathscr{H}(p, q+\gamma, t) - \langle \mathscr{H}_p(p, q+\gamma, t), \xi\rangle - \frac{1}{2}\langle \xi, \mathscr{H}_{pp}(p, q+\gamma, t), \xi\rangle +$$

$$+ \langle H_p(p, q, t) + \dot{\gamma}, p+\xi\rangle + \langle i\tilde{H}_p + \dot{\gamma}, O_D(h)\rangle + O_D(h^{3/2}).$$

Vu qu'en vertu de (2.4)

$$\operatorname{Re}\dot{z} = O_D(h^{1/2}), \qquad \operatorname{Im}\dot{z} = \tilde{H}_p + O_D(h^{1/2}),$$

de la définition de $\gamma(\alpha, t)$ il s'ensuit que

$$\langle \dot{\gamma}, O_D(h)\rangle = \langle \tilde{H}_p, O_D(h)\rangle + O_D(h^{3/2}). \tag{4.2}$$

Donc

$$\dot{\Phi}^\gamma = -\mathscr{H}(p, q+\gamma, t) - \langle \mathscr{H}_p(p, q+\gamma, t), \xi\rangle - \frac{1}{2}\langle \xi, \mathscr{H}_{pp}(p, q+\gamma, t)\, \xi\rangle +$$

$$+ \langle H_p(p, q, t) + \dot{\gamma}, p+\xi\rangle + \langle \tilde{H}_p, O_D(h)\rangle + O_D(h^{3/2}). \tag{4.3}$$

2. Définissons une fonction différentiable φ sur M^{n+1}, désignons par $\tilde{\varphi}$ la fonction $\varphi \circ \Pi_\gamma^{-1}$ et posons

$$\Phi_1^\gamma = \operatorname{Re}\Phi^\gamma, \quad \Phi_2^\gamma = \operatorname{Im}\Phi^\gamma, \quad \xi_1 = \operatorname{Re}\xi, \quad \xi_2 = \operatorname{Im}\xi,$$

$$\tilde{f} = \Phi_x^\gamma - \tilde{p} - \tilde{\xi}, \quad f_1 = \operatorname{Re} f, \quad f_2 = \operatorname{Im} f, \quad r = cD^{3/2},$$

où c est la fonction de l'inégalité de dissipation. En vertu de l'inégalité de Gårding

$$\tilde{r}_x = O_{\tilde{D}}(h)$$

et en vertu de (3.3)

$$\tilde{\Phi}_{2x}^\gamma = O_{\tilde{D}}(h^{1/2}).$$

Donc

$$E_{\mathscr{H}}[S(x, t)] = \tilde{\Phi}_t^\gamma + i\tilde{r}_t + \mathscr{H}(\tilde{\Phi}_{1x}^\gamma, x, t) + i\langle \mathscr{H}_p(\tilde{\Phi}_{1x}^\gamma, x, t), \tilde{\Phi}_{2x}^\gamma + \tilde{r}_x\rangle -$$

$$- \frac{1}{2}\langle \tilde{\Phi}_{2x}^\gamma, \mathscr{H}_{pp}(\tilde{\Phi}_{1x}^\gamma, x, t)\, \tilde{\Phi}_{2x}^\gamma\rangle + O_{\tilde{D}}(h^{3/2}).$$

Développons $\mathscr{H}$, $\mathscr{H}_p$ et $\mathscr{H}_{pp}$ en série de $\tilde{\xi} + \tilde{f}_1$. Comme

$$\tilde{\xi} = O_{\tilde{D}}(h^{1/2}), \quad \Phi_{2x}^\gamma = \tilde{\xi}_2 + \tilde{f}_2$$

et que $\tilde{f} = O_{\tilde{D}}(h)$ d'après (3.3), il vient

$$E_{\mathscr{H}}[S(x,t)] = \tilde{\Phi}^{\gamma}_t + i\tilde{r}_t + \mathscr{H}(\tilde{p},x,t) + \langle \mathscr{H}_p(\tilde{p},x,t), \tilde{\xi}_1 + \tilde{f}_1\rangle +$$

$$+ \frac{1}{2}\langle \mathscr{H}_{pp}(\tilde{p},x,t)\,\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_1\rangle + i\langle \mathscr{H}_p(\tilde{p},x,t), \tilde{\xi}_2 + \tilde{f}_2 + \tilde{r}_x\rangle +$$

$$+ i\langle \mathscr{H}_{pp}(\tilde{p},x,t)\,\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2\rangle - \frac{1}{2}\langle \tilde{\xi}_2, \mathscr{H}_{pp}(\tilde{p},x,t)\,\tilde{\xi}_2\rangle +$$

$$+ O_{\tilde{D}}(h^{3/2}) = \tilde{\Phi}^{\gamma}_t + \mathscr{H}(\tilde{p},x,t) + \langle \mathscr{H}_p(\tilde{p},x,t), \tilde{\xi} + \tilde{f}\rangle +$$

$$+ \frac{1}{2}\langle \tilde{\xi}, \mathscr{H}_{pp}(\tilde{p},x,t)\,\tilde{\xi}\rangle + i(\tilde{r}_t + \langle \mathscr{H}_p(\tilde{p},x,t), \tilde{r}_x\rangle) + O_{\tilde{D}}(h^{3/2})$$

Utilisons (4.3), (4.2) et (3.3) pour calculer $\tilde{\Phi}^{\gamma}$:

$$\tilde{\Phi}^{\gamma}_t = \tilde{\tilde{\Phi}}^{\gamma} - \langle \Phi^{\gamma}_x, \tilde{\gamma} + H_p(\tilde{p},\tilde{q},\tilde{t})\rangle = -\mathscr{H}(\tilde{p},x,t) - \langle \mathscr{H}_p(\tilde{p},x,t), \tilde{\xi}\rangle -$$

$$- \frac{1}{2}\langle \tilde{\xi}, \mathscr{H}_{pp}(\tilde{p},x,t)\,\tilde{\xi}\rangle + \langle \mathscr{H}_p(\tilde{p},\tilde{q},t) - \tilde{\gamma}, \tilde{p} + \xi\rangle -$$

$$- \langle \tilde{\Phi}^{\gamma}_x, \tilde{\gamma} + H_p(\tilde{p},\tilde{q},t)\rangle + \langle \tilde{H}_p(\tilde{p},\tilde{q},t), O_{\tilde{D}}(h)\rangle + O_{\tilde{D}}(h^{3/2}) =$$

$$= -\mathscr{H}(\tilde{p},x,t) - \langle \mathscr{H}_p(\tilde{p},x,t), \tilde{\xi}\rangle - \frac{1}{2}\langle \tilde{\xi}, \mathscr{H}_{pp}(\tilde{p},x,t)\,\tilde{\xi}\rangle -$$

$$- \langle H_p(\tilde{p},\tilde{q},t), \tilde{f}\rangle + \tilde{H}_p(\tilde{p},\tilde{q},t), O_{\tilde{D}}(h)\rangle + O_{\tilde{D}}(h^{3/2}).$$

On remarquera que

$$\tilde{r}_t + \langle \mathscr{H}_p(\tilde{p},x,t), \tilde{r}_x\rangle = \tilde{r}_t + \langle H_p(\tilde{p},\tilde{q},t), \tilde{r}_x\rangle +$$

$$+ \langle \tilde{H}_p(\tilde{p},\tilde{q},t), O_{\tilde{D}}(h)\rangle + O_{\tilde{D}}(h^{3/2}) = \tilde{\tilde{r}} - \langle \tilde{r}_x, \tilde{\tilde{\gamma}}\rangle +$$

$$+ \langle \tilde{H}_p(\tilde{p},\tilde{q},t), O_{\tilde{D}}(h)\rangle + O_{\tilde{D}}(h^{3/2}) =$$

$$= \tilde{\tilde{r}} + \langle \tilde{H}_p(\tilde{p},\tilde{q},t), O_{\tilde{D}}(h)\rangle + O_{\tilde{D}}(h^{3/2}).$$

Les trois dernières formules nous donnent

$$E_{\mathscr{H}}[S(x,t)] = i\tilde{\tilde{r}} + \langle \tilde{H}_p(\tilde{p},\tilde{q},t), O_{\tilde{D}}(h)\rangle + O_{\tilde{D}}(h^{3/2}). \tag{4.4}$$

Le second membre de (4.4) admet une $O_{\tilde{D}}(h)$-majoration pour $t>0$. En effet, le lemme 4.1 entraîne

$$\tilde{\tilde{r}} = -\frac{3}{2}\,\tilde{c}\,\tilde{D}^{1/2}\tilde{H}(\tilde{p},x,t) + \tilde{\tilde{c}}\,\tilde{D}^{3/2} = O_{\tilde{D}}(h^{7/6}),$$

$$|\tilde{H}_p(\tilde{p},\tilde{q},t)| \leqslant c_1(x,t)\sqrt{-\tilde{H}(\tilde{p},\tilde{q},t)} \leqslant c_2(x,t)\cdot\tilde{D}^{1/3}$$

De plus, la $O_{\bar{D}}$-majoration entraîne la O_{S_2}-majoration, puisque le germe est dissipatif. Ce qui prouve le théorème.

Revenons au problème de Cauchy relatif à l'équation de Hamilton-Jacobi à dissipation. Soit donné un ensemble compact $K_0 \subset \mathbf{R}^n$ et soit $S_0 = S_{10} + iS_{20}$ une fonction différentiable définie dans un voisinage de K_0, telle que $S_{20} \geqslant 0$. Soit (Λ_0^n, r_0^n) une varieté lagrangienne à germe complexe définie par les formules:

$$q = \alpha, \quad p = \frac{\partial S_{10}(\alpha)}{\partial \alpha}, \quad z = 0, \quad w = i\frac{\partial S_{20}(\alpha)}{\partial \alpha},$$

$$D(\alpha) = S_{20}(\alpha), \quad E(\alpha) = iS_{20}(\alpha).$$

(Il est immédiat de vérifier que tous les axiomes du germe complexe sont remplis.) Cette variété est entièrement contenue dans une carte non singulière et possède un γ-atlas composé d'une seule carte non dégénérée. Soit $\mathscr{K}_0$ l'image réciproque de K_0 par l'application π_0:

$$\mathscr{K}_0 = \pi_0^{-1} K_0 \subset \Lambda_0^n,$$

et soit K_t l'image de

$$\mathscr{K}_t \stackrel{\text{déf}}{=} g_H^t \mathscr{K}_0 \subset \Lambda_t^n$$

par la projection de l'espace des phases sur le plan $p = 0$.

Résoudre le problème de Cauchy c'est trouver une fonction différentiable $S(x, t)$ vérifiant (1.5) dans un voisinage de l'ensemble

$$K = \{(x, t) \mid 0 < t < T, \quad x \in K_t\}$$

et la condition initiale $S(x, 0) = S_0(x)$ dans le voisinage de K_0. Le couple (K_0, S_0) sera appelé *conditions initiales* de l'équation de Hamilton-Jacobi à dissipation.

Soit donné un hamiltonien complexe. Supposons que $\mathscr{K}_t$ est entièrement contenue dans une zone non singulière de la variété Λ_t^n pour $0 \leqslant t \leqslant T$; que $\{U_j, \Pi_{\gamma_j}\}$, $j = 1, \ldots, N$ est un γ-atlas dans un voisinage de l'ensemble

$$\mathscr{K} = \{(\alpha, t) \mid 0 \leqslant t \leqslant T, \quad \alpha \in \mathscr{K}_t\} \subset M^{n+1};$$

que $V_j = \Pi_{\gamma_j}(U_j)$. Prolongeons la famille $\{V_j\}$ en un recouvrement ouvert de l'ensemble K en lui adjoignant un ensemble V_{N+1} n'intersectant pas l'image de l'ensemble des zéros de la dissipation par la projection canonique de l'espace des phases sur le plan $p = 0$. Soient $\{e_j\}$ une décomposition de l'unité dans K telle que $\operatorname{supp} e_j \subset V_j$, $S^{(j)}$, la solution de l'équation de Hamilton-Jacobi de dissipation définie dans le théorème 4.2, où il faut remplacer (V_j, Π_j) par (U_j, Π_{γ_j}) et enfin $S^{(N+1)}$ une fonction différentiable à partie réelle strictement positive.

Proposition. *La fonction* $S=\sum_{j=1}^{N+1} e_j S^{(j)}$ *est la solution du problème de Cauchy relatif à l'équation* (1.5).

Cette proposition résulte immédiatement du lemme suivant.

Lemme 4.2. *Si* $S^{(1)}(x,t)$, $S^{(2)}(x,t),\ldots,S^{(N)}(x,t)$ *vérifient les relations* $F_{\mathscr{H}}[S^{(j)}]=o_D(h)$, *où* D *est une fonction différentiable positive, si sont remplies les relations*

$$S^{(j)}-S^{(k)}=O_D(h^{3/2}),\qquad \operatorname{Im}\frac{\partial S^{(j)}}{\partial x}=O_D(h^{1/2})$$

et si $e_1, e_2,\ldots,e_N$ *sont des fonctions différentiables positives telles que* $e_1+e_2+\ldots+e_N=1$, *alors*

$$F_{\mathscr{H}}\left[\sum_{j=1}^{N} e_j S^{(j)}\right]=o_D(h).$$

La démonstration se fait par récurrence sur N. Soit $N=2$. Posons $\chi=S^{(2)}-S^{(1)}$, donc $S=S^{(1)}+e_2\chi$. On a

$$\frac{\partial}{\partial t}(e_1S^{(1)}+e_2S^{(2)})=S_t^{(2)}+e_2\chi_t+O_D(h^{3/2}),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(e_1S^{(1)}+e_2S^{(2)})=S_x^{(1)}+e_2\chi_x+O_D(h^{3/2}).$$

Posons

$$S_1^{(j)}=\operatorname{Re}S^{(j)},\qquad \chi_1=\operatorname{Re}\chi,$$
$$S=e_1S^{(1)}+e_2S^{(2)},\qquad S_1=\operatorname{Re}S.$$

En développant $\mathscr{H}(S_{1x},x,t)$, $\mathscr{H}_p(S_{1x},x,t)$, $\mathscr{H}_{pp}(S_{1x},x,t)$ en série de $S_{1x}^{(2)}\ S_{1x}^{(1)}=\chi_{1x}$, et la relation $F_{\mathscr{H}}[S^{(1)}]=o_D(h)$ aidant, on trouve

$$F_{\mathscr{H}}[S]\sim\chi_t e_2+\langle\mathscr{H}_p(S_{1x}^{(1)},x,t),\chi_x e_2\rangle+O_D(h).$$

Par ailleurs, en développant $\mathscr{H}(S_{1x}^{(2)},x,t)$, $\mathscr{H}_p(S_{1x}^{(2)},x,t)$ et $\mathscr{H}_{pp}(S_{1x}^{(2)},x,t)$ en série de $S_{1x}^{(2)}-S_{1x}^{(1)}=\chi_{1x}$ et en tenant compte de la relation $F_{\mathscr{H}}[S^{(2)}]=o_D(h)$, on obtient

$$\chi_t+\langle\mathscr{H}_p(S_{1x}^{(1)},x,t),\chi_x\rangle=O_D(h),$$

d'où $F_{\mathscr{H}}[S]=o_D(h)$.

Supposons que le lemme est valable pour $N=N_0$ et prouvons-le pour $N=N_0+1$. On peut admettre que $e'\overset{\text{déf}}{=}e_1+\ldots+e_{N_0}\neq 0$ (puisque le lemme est de caractère local). On a

$$e_{N_0+1}+e'=1,$$

$$\sum_{j=1}^{N_0+1} e_jS^{(j)}=e_{N_0+1}S^{(N_0+1)}+e'\sum_{j=1}^{N_0}\frac{e_j}{e'}S^{(j)}.$$

Comme $\sum_{j=1}^{N_0} e_j/e' = 1$, l'hypothèse de la récurrence nous donne

$$F_{\mathscr{H}}\left[\sum_{j=1}^{N_0} \frac{e_j}{e'} S^{(j)}\right] = O_D(h).$$

Pour achever la démonstration on appliquera le résultat acquis pour $N=2$. L'application canonique engendrée par le hamiltonien H_I (cf. exemple p. 492) nous conduit à la généralisation suivante du théorème 4.2.

Théorème 4.3. *Soit M^{n+1} la variété engendrée par la famille $\{\Lambda_t^n\}$ et supposons qu'il existe un γ-atlas sur M^{n+1} composé d'une seule γ-carte (U_γ, Π_γ^I). Alors la fonction*

$$S = (\Phi_I^\gamma + icD^{3/2}) \circ (\Pi_\gamma^I)^{-1},$$

où Φ^γ est une γ-phase du germe dans la zone Ω_I et c la fonction de l'inégalité de dissipation, est solution de l'équation de Hamilton-Jacobi à dissipation:

$$\frac{\partial S}{dt} + \mathscr{H}\left(\frac{\partial S_1}{\partial x_I}, x_I, x_I, -\frac{\partial S_1}{\partial x_{\bar{I}}}, t\right) + i\left\langle \mathscr{H}_{p_I}\left(\frac{\partial S_1}{\partial x_I}, x_{\bar{I}}, x_I, -\frac{\partial S_1}{\partial x_{\bar{I}}}, t\right), \frac{\partial S_2}{\partial x_I}\right\rangle -$$
$$- i\left\langle \mathscr{H}_{q_{\bar{I}}}\left(\frac{\partial S_1}{\partial x_I}, x_{\bar{I}}, x_I, -\frac{\partial S}{\partial x_{\bar{I}}}\right), \frac{\partial S_2}{\partial x_{\bar{I}}}\right\rangle -$$
$$- \frac{1}{2}\left\langle \frac{\partial S_2}{\partial x_I}, \mathscr{H}_{p_I p_I}\left(\frac{\partial S_1}{\partial x_I}, x_{\bar{I}}, x_I, -\frac{\partial S}{\partial x_{\bar{I}}}\right)\frac{\partial S_2}{\partial x_I}\right\rangle -$$
$$- \frac{1}{2}\left\langle \frac{\partial S_2}{\partial x_{\bar{I}}}, \mathscr{H}_{q_{\bar{I}} p_{\bar{I}}}\left(\frac{\partial S_1}{\partial x_I}, x_{\bar{I}}, x_I, -\frac{\partial S}{\partial x_{\bar{I}}}\right)\frac{\partial S_2}{\partial x_{\bar{I}}}\right\rangle +$$
$$+ \left\langle \frac{\partial S_2}{\partial x_I}, \mathscr{H}_{p_{\bar{I}} q_{\bar{I}}}\left(\frac{\partial S_1}{\partial x_I}, x_{\bar{I}}, x_I, -\frac{\partial S}{\partial x_{\bar{I}}} W \frac{\partial S_2}{\partial x_{\bar{I}}}\right)\right\rangle = o_{S_2}(h).$$

§ 5. Invariance de l'inégalité de dissipation et contournement du foyer

Dans ce paragraphe on démontre les théorèmes 3.1 et 4.1.

Lemme 5.1. *Le théorème 4.1. est valable si les hypothèses du théorème 4.2 sont réalisées.*

Démonstration. Supposons que le germe $\{\Lambda_0^n, r_0^n\}$ est dissipatif, c'est-à-dire que

$$\varepsilon_0(\alpha)\, D(\alpha, 0) \leqslant \operatorname{Im} \Phi^\gamma(\alpha, 0) + c_0(\alpha)[D(\alpha, 0)]^{3/2},$$

où $\varepsilon_0 > 0$ et c_0 sont des fonctions différentiables. Il nous faut prouver qu'il existe des fonctions différentiables $\varepsilon(\alpha, t) > 0$ et $c(\alpha, t)$ telles que

$$\varepsilon(\alpha)\, D(\alpha, t) \leqslant \operatorname{Im} \Phi^\gamma(\alpha, t) + c_0(\alpha, t)[D(\alpha, t)]^{3/2}$$

pour $0 \leqslant t \leqslant T$.

Posons

$$\xi_1 = \mathrm{Re}\,(w - \mathscr{E}(z-\gamma)),$$
$$\xi_2 = \mathrm{Im}\,(w - \mathscr{E}(z-\gamma)),$$
$$\Phi^\gamma = \Phi_1^\gamma + i\Phi_2^\gamma.$$

De (3.3) il vient

$$\frac{\partial \Phi_2^\gamma}{\partial \alpha} = \left[\frac{\partial (q+\gamma)}{\partial \alpha}\right] \xi_2 + O_D(h). \tag{5.1}$$

Donc

$$\xi_2 = A \frac{\partial \Phi_2^\gamma}{\partial \alpha} + O_D(h), \text{ où } A = {}^t\left[\frac{\partial (q+\gamma)}{\partial \alpha}\right]^{-1}$$

En prenant la partie imaginaire de (4.3), on obtient

$$\dot{\Phi}_2^\gamma = -\tilde{H}(p, q+\gamma, t) - \langle H_p(p, q+\gamma, t)\,\xi_2\rangle -$$
$$- \langle \tilde{H}_p(p, q+\gamma, t), \xi_1\rangle - \langle \xi_1, H_{pp}(p, q+\gamma, t)\,\xi_2\rangle -$$
$$- \frac{1}{2}\langle \xi_1, \tilde{H}_{pp}(p, q+\gamma, t)\,\xi_1\rangle + \frac{1}{2}\langle \xi_2, \tilde{H}_{pp}(p, q+\gamma, t)\,\xi_2\rangle +$$
$$+ \left\langle H_p(p, q, t) + \dot{\gamma}\xi_2 \right\rangle + \langle \tilde{H}_p, O_D(h)\rangle + O_D(h^{3/2}). \tag{5.2}$$

De (5.1) et (5.2) il s'ensuit que Φ_2^γ est solution de l'équation différentielle

$$\dot{\Phi}_2^\gamma = G + \langle {}^t A \Phi_{2\alpha}^\gamma, g + \dot{\gamma}\rangle, \tag{5.3}$$

où

$$G = -\tilde{H}(p + \xi_1 + f, q+\gamma, t) + O_D(h^{3/2}), \qquad f = O_D(h),$$
$$g = H_p(p, q, t) - H_p(p, q+\gamma, t) - H_{pp}(p, q+\gamma, t)\,\xi_1 -$$
$$- \frac{1}{2}\tilde{H}_{pp}(p, q+\gamma, t)\,\xi_2 = O_D(h^{1/2}).$$

On s'est servi de la relation (4.2). Si l'on désigne par d/dl le champ de vecteurs

$$\frac{d}{dt} + \left\langle A(g+\dot{\gamma}), \frac{\partial}{\partial \alpha}\right\rangle,$$

on peut écrire (5.3) sous la forme

$$\frac{d\Phi_2^\gamma}{dl} = G.$$

Posons

$$G_1 = -\tilde{H}(p + \xi_1 + f, q+\gamma, t)$$

et soit ψ la solution du problème de Cauchy suivant:

$$\frac{d\psi}{dl}=G_1, \qquad \psi(\alpha,0)=\varepsilon_0(\alpha)\,D(\alpha,0).$$

Donc, ψ est définie sur toute trajectoire du champ de vecteurs d/dl issue de la variété initiale Λ_0^n. Remarquons que $dt/dl=1$, donc $\psi\geqslant 0$ pour $t\geqslant 0$. Par ailleurs, ψ ne croît pas le long des trajectoires du champ d/dl. On montrera plus bas que ψ peut être traitée comme une «nouvelle dissipation», par conséquent on a les majorations

$$\psi(\alpha,t)\leqslant c_1(\alpha,t)\,D(\alpha,t), \tag{5.4}$$
$$D(\alpha,t)\leqslant c_2(\alpha,t)\,\psi(\alpha,t).$$

Mais des difficultés peuvent émerger, puisque dans le cas général ψ n'est pas définie partout (les trajectoires du champ d/dl ne sont pas nécessairement continues). Localisons le problème comme suit: d'après la remarque 3.3 on peut limiter la démonstration au fait que l'inégalité de dissipation est réalisée au voisinage d'un point arbitraire (α_0,t_0). D'autre part, il ne faut traiter que le cas $D(\alpha_0,t_0)=0$, puisque dans tous les autres l'inégalité de dissipation est manifestement réalisée.

La trajectoire du champ d/dl issue du point (α_0,t_0) pour $D(\alpha_0,t_0)=0$ est confondue avec la trajectoire du champ d/dt pour $0\leqslant t\leqslant t_0$. Bien plus, on remarque que tout point d'un voisinage assez petit de (α_0,t_0) appartient à la trajectoire du champ d/dl issue de Λ_0^n. En effet, soit $\alpha=\tilde{\tilde{\alpha}}(t)$ la trajectoire du champ d/dl qui passe par le point (α_1,t_1), et $\alpha=\tilde{\alpha}(t)$, celle qui est issue de $(\alpha_0,0)$, et soit $\delta_0>0$ un nombre tel que $\tilde{\alpha}(t)$ soit définie pour $0\leqslant t\leqslant t_0+\delta_0$. (A noter que $\tilde{\alpha}(t)=\alpha_0$ pour $0\leqslant t\leqslant t_0$.) Désignons par V le domaine fermé

$$0\leqslant t\leqslant t_0+\delta_0. \qquad |\alpha-\tilde{\alpha}(t)|\leqslant\delta,$$

et $c=\max_V|F_\alpha(\alpha,t)$, où $F(\alpha,t)=\dfrac{d\alpha}{dl}$. Comme $\dfrac{dt}{dl}=1$, il vient

$$\frac{d\tilde{\alpha}}{dt}=F(\tilde{\alpha}(t),t), \qquad \frac{d\tilde{\tilde{\alpha}}}{dt}=F(\tilde{\tilde{\alpha}}(t),t)$$

et

$$\left|\frac{d}{dt}\left(\tilde{\tilde{\alpha}}(t)-\tilde{\alpha}(t)\right)\right|\leqslant c\left|\tilde{\tilde{\alpha}}(t)-\tilde{\alpha}(t)\right|$$

pour t tel que $(\tilde{\tilde{\alpha}}(t),t)\in V$. Donc

$$|\tilde{\tilde{\alpha}}(t)-\tilde{\alpha}(t)|\leqslant|\alpha_1-\tilde{\alpha}(t_1)|e^{c|t-t_1|}.$$

De cette majoration on déduit que la trajectoire $\alpha=\tilde{\alpha}(t)$ ne traverse pas la frontière du domaine V pour $0<t<t_0+\delta$ si le voisinage est assez petit. De façon analogue, ψ est définie sur toutes les portions de trajectoires de d/dt (c'est-à-dire sur les lignes $\alpha=\text{const}$) issues de Λ_0^n et finissant en V

Prouvons maintenant que (5.4) est réalisée dans V. On a

$$-\tilde{H}(p, q, t) \leqslant G_1 + |\langle \tilde{H}_p(p+\xi_1+f, q+\gamma, t), \xi_1\rangle| + \\ + |\langle \tilde{H}_q(p+\xi_1+f, q+\gamma, t), \gamma\rangle| + c_3 D \leqslant$$

$$\leqslant G_1 + c_4 |\tilde{H}(p+\xi_1+f, q+\gamma, t)|^{1/2} (|\xi_1| + |\gamma|) + c_3 D \leqslant c_5 (G_1 + D), \tag{5.5}$$

où c_3, c_4, c_5 sont des fonctions différentiables de α et de t. Comme

$$g = O_D(h^{1/2}), \qquad \frac{\partial D}{\partial \alpha} = O_D(h^{1/2}), \qquad \dot{\gamma} = M\tilde{H}_p + O_D(h^{1/2}),$$

où M est une fonction matricielle différentiable et

$$|\tilde{H}_p| \times \left|\frac{\partial D}{\partial \alpha}\right| \leqslant |\tilde{H}|^{1/2} D^{1/2} \leqslant c_6 (|\tilde{H}| + D) \leqslant c_7 (G_1 + D),$$

il vient

$$\left|\frac{dD}{dl}\right| \leqslant |\tilde{H}| + \left|\left\langle \frac{\partial D}{\partial \alpha}, A(g+\dot{\gamma})\right\rangle\right| \leqslant c_8 (G_1 + D).$$

Le lemme 2.1 nous donne

$$D(\alpha_1, t_1) \leqslant c_9(\alpha_1, t_1)\left(D(\alpha, 0) + \int_{L(\alpha_1, t_1)} G_1\, dt\right) \leqslant c_{10}(\alpha, t)\left(\varepsilon_0(\alpha_1) D(\alpha_1, 0) + \right. \\ \left. + \int_{L(\alpha_1, t_1)} G_1\, dt\right) = c_{11}(\alpha_1, t_1)\psi(\alpha_1, t_1),$$

où $L(\alpha_1, t_1)$ est la portion de la trajectoire de d/dl issue de Λ_0^n et finissant en (α_1, t_1). Ce qui prouve la deuxième majoration (5.4). Par ailleurs,

$$\left|\frac{d\psi}{dt}\right| = \left|G_1 - \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}, A(g+\dot{\gamma})\right\rangle\right| \leqslant$$

$$\leqslant G_1 + c_{12}\psi^{1/2}(D^{1/2} + |\tilde{H}|^{1/2}) \leqslant c_{13}(G_1 + \psi + D). \tag{5.6}$$

En reprenant les calculs qui nous ont conduits à (5.5) on obtient

$$G_1 = -\tilde{H}(p+\xi_1+f, q+\gamma, t) \leqslant c_{14}(-\tilde{H} + D). \tag{5.7}$$

De (5.6) et (5.7) on trouve grâce au lemme 2.1 que

$$\psi(\alpha, t) \leqslant c_{15}\left(D(\alpha, 0) - \int_0^t \tilde{H}\, dt\right) = c_{15} D(\alpha, t),$$

ce qui prouve (5.4).

Nous pouvons maintenant établir les inégalités pour Φ_2^γ. On a

$$\frac{d(\psi - \Phi_2^\gamma)}{dl} = O_D(h^{3/2}).$$

Donc

$$\psi(a_1, t_1) - \Phi_2^{\gamma}(\alpha_1, t_1) \leqslant \left|\psi(\alpha_1, 0) - \Phi_2^{\gamma}(\alpha_1, 0)\right| + M_1(\alpha_1, t_1) \int\limits_{L(\alpha, t)} D^{3/2}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \left|\varepsilon_0(\alpha) D(\alpha_1, 0) - \Phi_2^{\gamma}(\alpha_1, 0)\right| + M_2(\alpha_1, t_1) \int\limits_{L(\alpha, t)} \psi^{3/2}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \left|\varepsilon_0(\alpha_1) D(\alpha_1, 0) - \Phi_2^{\gamma}(\alpha_1, 0)\right| + M_3(\alpha_1, t_1)[(\psi(\alpha_1, t_1)] \leqslant$$

$$\leqslant c_0(\alpha_1)[D(\alpha_1, 0)]^{3/2} + M_4(\alpha_1, t_1)[D(\alpha_1, t_1)]^{3/2} \leqslant$$

$$\leqslant c(\alpha_1, t_1)[D(\alpha_1, t_1)]^{3/2}$$

Et par suite

$$\frac{1}{c_2} D \leqslant \psi \leqslant \Phi_2^{\gamma} + cD^{3/2}.$$

Ce qui prouve le lemme.

Remarque. On demontre de façon analogue que le théorème 4.1 est valable si sont réunies les conditions du théorème 4.3.

Corollaire. *Le théorème* 4.1 *a lieu si* $\Lambda_t^n \subset \Omega_I$ *quel que soit* t (*I est indépendant de t*).

Démonstration. Soit $L: \{\alpha = \alpha_0, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ une portion de la trajectoire du champ $d\xi/dt$, issue de $\alpha_0 \in \Lambda_0^n$. Il existe alors des nombres $t_0, t_1, \ldots, t_N$, $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots = t_N = T$ tels que la portion $L_j \subset L$ correspondant à $[t_{j-1}, t_j]$ est contenue dans U_j, où (U_j, Π_{γ}^j) est une γ-carte de la variété M^{n+1}, et de plus $\Pi_{\gamma}^j(\alpha, t)^j = (q(\alpha, t) + \gamma_j(\alpha, t), t)$. D'après la remarque, on peut choisir des fonctions différentiables $\varepsilon_1 > 0$ et c_1 telles que l'inégalité de dissipation

$$\varepsilon_1 D \leqslant \Phi_{I^1}^{\gamma_1} + c_1 D^{3/2}$$

soit remplie dans un voisinage de L_1 dans M^{n+1}.

Puisque la propriété d'un germe d'être dissipatif ne dépend pas du choix du γ-atlas (nous avons prouvé ceci pour un γ-atlas composé de cartes d'une même zone), l'inégalité de dissipation

$$\varepsilon' D \leqslant \Phi_{I_2}^{\gamma_2} + c_1' D^{3/2}$$

est réalisée pour certains ε' et c_1' au voisinage du point (α_0, t_1). La remarque nous dit qu'il existe des fonctions différentiables $\varepsilon_2 > 0$ et c_2 telles que

$$\varepsilon_2 D \leqslant \Phi_{I_2}^{\gamma_2} + c_2 D^{3/2}$$

au voisinage de L_2 dans la variété M^{n+1}, etc.

Revenons maintenant au théorème 3.1. Supposons pour simplifier que $\alpha_0 \in \Gamma$ appartient à l'intersection d'une carte non singulière d'une zone non singulière Ω et d'une carte non singulière de la zone Ω_{Γ} et supposons qu'au voisinage du point α_0 l'inégalité de dissipation de la zone Ω

$$\varepsilon D \leqslant \Phi_2 + cD^{3/2}$$

est réalisée pour certains ε et c. Il faut montrer qu'au voisinage de α_0 on a l'inégalité de dissipation

$$\varepsilon' D \leqslant \Phi_{I_2} + c' D^{3/2} \tag{5.8}$$

pour certains ε' et c'.

Soit $g^t_{H_I}$ l'application canonique de l'exemple 2.1 et soit $\Phi(\alpha, t)$ une phase sur $g^t_{H_I}\Lambda^n$. Alors $\Phi_I(\alpha) = \Phi(\alpha, \pi/2)$. Si la matrice $\partial(q(\alpha,t)+z(\alpha,t))/\partial\alpha$ n'est pas dégénérée pour $\alpha=\alpha_0$ et $0\leqslant t\leqslant\pi/2$, la relation (5.1) a lieu en vertu du corollaire du lemme 5.1.

Mais, si l'image de α_0 par l'application canonique $g^t_{H_I}$, où $t\in]\,0, \pi/2[$ est un zéro du jacobien $D(q+z)/D\alpha$ (un tel point sera dit *focal*), les raisonnements ci-dessus sont mis en défaut.

Remarquons que même si l'application $g^{\pi/2}_{H_I}$ (qui est ici une rotation de $\pi/2$ des axes de l'espace des phases) faisait partie de la famille des applications canoniques g^t_H engendrées par un autre hamiltonien, les trajectoires du champ de vecteurs hamiltonien d/dt issues de α_0 n'en présenteraient pas moins des points focaux.

Il s'avère qu'on peut aplanir cette difficulté par une autre rotation des axes. Cette méthode sera appelée « *opération de contournement des foyers* ».

Définition. Supposons que $\alpha_0\in\Gamma\subset\Lambda^n$ appartient à l'intersection d'une carte non singulière de la zone Ω_K et d'une carte non singulière de la zone Ω_I. On dira qu'un hamiltonien réel H est un *hamiltonien de contournement des foyers* associé au point α_0 et au couple (K, I) si sont remplies les conditions suivantes

(i) $\det C_K(\alpha, t)\neq 0$ pour $0\leqslant t\leqslant\pi/2$,

(ii) $\Phi_K(\alpha, \pi/2) = \Phi_I(\alpha)$

au voisinage du point α_0, où $C_K(\alpha,t)$ et $\Phi_K(\alpha,t)$ sont les matrices des définitions respectives de la μ-action et de la phase dans la zone Ω_I sur $g^t_H\Lambda^n$.

Théorème 5.1. *Supposons que $\alpha_0\in\Gamma$ appartient à l'intersection d'une carte non singulière d'une zone non singulière et d'une carte non singulière de la zone Ω_I et qu'une phase Φ vérifie l'inégalité de dissipation au voisinage de α_0. Il existe alors une matrice orthogonale $u=(u_{ij})_{i,j\in\bar I}$ et une matrice diagonale $\varepsilon=(\varepsilon_{ij})_{i,j\in\bar I}$ où $\varepsilon_{ii}\overset{\text{déf}}{=}\varepsilon_i=\pm 1$, telles que la fonction*

$$H=\frac{1}{2}\{\langle p_{\bar I}, u^{-1}\varepsilon u p_{\bar I}\rangle + \langle q_{\bar I}, u^{-1}\varepsilon u q_{\bar I}\rangle\} \tag{5.9}$$

est le hamiltonien de contournement des foyers associé au point α_0 et au couple $(\bar\Phi, I)$, l'image de α_0 par l'application g^t_H appartenant à une carte non singulière d'une zone non singulière sur $g^t_H\Lambda^n$ pour $t\in[0,\pi/2]$.

Démonstration. Pour simplifier les notations, renumérotons les coordonnées dans l'espace des phases de telle sorte que $\bar I=\{1,2,\ldots,k\}$. Soit

$$A(\alpha)=p_\alpha q_\alpha^{-1}=p_q,$$

où $A(\alpha)$ est une matrice symétrique. Désignons par $A^{(k)}$ le bloc supérieur gauche de la matrice A. Choisissons une matrice orthogonale u telle que la matrice $uA^{(k)}u^{-1}$ soit diagonale et la matrice diagonale $\varepsilon_{ii}=\pm 1$ telle que soit réalisée la condition

$$\varepsilon u A^{(k)} u^{-1} \geqslant 0.$$

Introduisons les $n\times n$-matrices $\hat{u}$ et $\hat{\varepsilon}$:

$$\hat{u}=\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\varepsilon}=\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Considérons l'application canonique g induite par la matrice orthogonale $\hat{u}$ dans $\mathbf{R}_q^n$:

$$\begin{aligned} p'(\alpha)&=\hat{u}p(\alpha), & q'(\alpha)&=\hat{u}q(\alpha),\\ w'(\alpha)&=\hat{u}w(\alpha), & z'(\alpha)&=\hat{u}z(\alpha),\\ D'(\alpha)&=D(\alpha), & E'(\alpha)&=E(\alpha) \end{aligned}$$

(l'accent désigne des quantités sur $g\Lambda^n$). On a alors

$$\Phi'(\alpha)=\Phi(\alpha), \qquad C_I'=\hat{u}C_I, \qquad B_I'=\hat{u}B_I, \qquad \varepsilon_I'=\hat{u}\varepsilon_I\hat{u}^{-1}.$$

En particulier, l'image du point α_0 par l'application canonique g est située dans $\Omega\cap\Omega_I$. Il est évident que la fonction (5.9) est le hamiltonien de l'opération de contournement des foyers associée à α_0 et à (Ω, Ω_I) si et seulement si la fonction

$$H'=\frac{1}{2}\left(\langle p_{\bar{I}}, \varepsilon p_{\bar{I}}\rangle+\langle q_{\bar{I}}, \varepsilon q_{\bar{I}}\rangle\right) \tag{5.10}$$

est le hamiltonien de l'opération de contournement des foyers associée à $g\alpha_0$ et à (Ω, Ω_I). On peut donc supprimer les accents et admettre que la matrice A^k est dès le départ diagonale, et $u=1$ dans (5.9). La résolution du système de Hamilton-Jacobi et du système (2.4) correspondant au hamiltonien (5.10) nous donne

$$\begin{aligned} p_{\bar{I}}(\alpha,t)&=p_{\bar{I}}(\alpha)\cos t-\varepsilon q_{\bar{I}}(\alpha)\sin t, & p_I(\alpha,t)&=p_I(\alpha),\\ q_{\bar{I}}(\alpha,t)&=q_{\bar{I}}(\alpha)\cos t+\varepsilon p_{\bar{I}}(\alpha)\sin t, & q_I(\alpha,t)&=q_I(\alpha),\\ w_{\bar{I}}(\alpha,t)&=w_{\bar{I}}(\alpha)\cos t-\varepsilon z_{\bar{I}}(\alpha)\sin t, & w_I(\alpha,t)&=w_I(\alpha),\\ z_{\bar{I}}(\alpha,t)&=z_{\bar{I}}(\alpha)\cos t+\varepsilon w_{\bar{I}}(\alpha)\sin t, & z_I(\alpha,t)&=z_I(\alpha). \end{aligned}$$

Donc pour $t=\pi/2$

$$\begin{aligned} p_{\bar{I}}(\alpha,\pi/2)&=-\varepsilon q_{\bar{I}}(\alpha), & w_{\bar{I}}(\alpha,\pi/2)&=-\varepsilon z_{\bar{I}}(\alpha),\\ q_{\bar{I}}(\alpha,\pi/2)&=\varepsilon p_{\bar{I}}(\alpha), & z_{\bar{I}}(\alpha,\pi/2)&=\varepsilon w_{\bar{I}}(\alpha), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle w(\alpha,\pi/2), z(\alpha,\pi/2)\rangle&=\langle -\varepsilon z_{\bar{I}}(\alpha), \varepsilon w_{\bar{I}}(\alpha)\rangle+\langle w_I(\alpha), z_I(\alpha)\rangle=\\ &=-\langle z_{\bar{I}}(\alpha), w_{\bar{I}}(\alpha)\rangle+\langle w_I(\alpha), z_I(\alpha)\rangle=\langle w(\alpha), z(\alpha)\rangle_I. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Soit $P=p+w$, $Q=q+z$. Alors

$$C(\alpha,t)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial Q_{\bar I}(\alpha)}{\partial\alpha}\cos t+\varepsilon\dfrac{\partial P_{\bar I}(\alpha)}{\partial\alpha}\sin t \\ \dfrac{\partial Q_I(\alpha)}{\partial\alpha} \end{pmatrix},$$

et pour $t=\pi/2$

$$C(\alpha,\pi/2)=\begin{pmatrix} \dfrac{\varepsilon\partial P_{\bar I}(\alpha)}{\partial\alpha} \\ \dfrac{\partial Q_I(\alpha)}{\partial\alpha} \end{pmatrix}=\hat\varepsilon\frac{\partial(P_{\bar I}(\alpha),Q_I(\alpha))}{\partial\alpha}=\hat\varepsilon C_I(\alpha).$$

De façon analogue,

$$B(\alpha,\pi/2)=\hat\varepsilon B_I(\alpha).$$

Donc

$$\mathscr{E}(\alpha,\pi/2)=\hat\varepsilon\,\mathscr{E}_I(\alpha)\,\hat\varepsilon.$$

Comme $\hat\varepsilon^2=1$, il vient

$$\mu(\alpha,\pi/2)=1/2\langle z(\alpha,\pi/2),\ \mathscr{E}(\alpha,\pi/2)\,z(\alpha,\pi/2)\rangle=$$

$$=1/2\left\langle \hat\varepsilon\begin{pmatrix} w_{\bar I}(\alpha)\\ z_I(\alpha)\end{pmatrix},\hat\varepsilon\,\mathscr{E}_I(\alpha)\,\hat\varepsilon\hat\varepsilon\begin{pmatrix} w_{\bar I}(\alpha)\\ z_I(\alpha)\end{pmatrix}\right\rangle=$$

$$=1/2\left\langle\begin{pmatrix} w_{\bar I}(\alpha)\\ z_I(\alpha)\end{pmatrix},\mathscr{E}_I(\alpha)\begin{pmatrix} w_{\bar I}(\alpha)\\ z_I(\alpha)\end{pmatrix}\right\rangle=\mu_I(\alpha). \quad (5.12)$$

Par ailleurs

$$s(\alpha,\pi/2)=s(\alpha)+\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\{\langle p_{\bar I}(\alpha,\tau),\varepsilon p_{\bar I}(\alpha,\tau)\rangle-$$

$$-\langle q_{\bar I}(\alpha,\tau),\varepsilon q_{\bar I}(\alpha,\tau)\rangle\}\,d\tau=s(\alpha)+\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\{\langle p_{\bar I}(\alpha)-$$

$$-q_{\bar I}(\alpha),\varepsilon(p_{\bar I}(\alpha)-q_{\bar I}(\alpha))\rangle\cos 2\tau-2\langle p_{\bar I}(\alpha),q_{\bar I}(\alpha)\sin 2\tau\rangle\}\,d\tau=$$

$$=s(\alpha)-\langle p_{\bar I}(\alpha),q_{\bar I}(\alpha)\rangle=s_I(\alpha).$$

La première partie de la proposition est prouvée, puisque les potentiels ne dépendent pas de t. Il est immédiat de voir que

$$C(\alpha,t)=\begin{pmatrix} 1_{\bar I} & 0\\ 0 & \dfrac{1}{\sin t+\cos t}1_I\end{pmatrix}(C\cos t+\hat\varepsilon C_I\sin t),$$

où $1_{\bar{I}}$ est la matrice unité de dimension $k \times k$ et 1_I la matrice unité de dimension $(n-k)\times(n-k)$. Donc, la matrice $C(\alpha, t)$ n'est pas dégénérée pour $t \in [0, \pi/2]$ si seulement il en est de même de la matrice $C(\alpha)\cos t + \hat{\varepsilon} C_I(\alpha)\sin t$.

On obtient donc le critère suivant: *une condition nécessaire et suffisante pour que H soit le hamiltonien de l'opération de contournement des foyers est que la matrice* $\hat{\varepsilon} C_I(\alpha_0) C^{-1}(\alpha_0)$ *ne possède pas de valeurs propres strictement négatives.* On a

$$\hat{\varepsilon} C_I C^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial P_{\bar{I}}}{\partial Q_{\bar{I}}} & \varepsilon \dfrac{\partial P_{\bar{I}}}{\partial Q_I} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.13}$$

Désignons par $\mathscr{E}^{(k)}$ le bloc supérieur gauche de dimension $k \times k$ de la matrice $\mathscr{E}(\alpha_0)$:

$$\mathscr{E}^{(k)} = \frac{\partial P_{\bar{I}}}{\partial Q_{\bar{I}}}(\alpha_0).$$

D'après (5.13), pour que la matrice $\hat{\varepsilon} C_I C^{-1}\big|_{\alpha=\alpha_0}$ ne possède pas de valeurs propres strictement négatives, il suffit que $\varepsilon \mathscr{E}^{(k)}$ n'en possède pas, puisque le spectre de la deuxième matrice comprend celui de la première. En effet, si x est le vecteur propre de la matrice $\hat{\varepsilon} C_I(\alpha_0) C^{-1}(\alpha_0)$ associé à la valeur propre λ, alors

$$x_I \varepsilon \mathscr{E}^{(k)} = \lambda x_{\bar{I}}.$$

On remarquera que $x_{\bar{I}} \neq 0$, sinon de la dernière égalité il s'ensuivrait que $x_I = 0$, donc que $x = 0$. Par conséquent, x_I est le vecteur propre de la matrice $\varepsilon \mathscr{E}^{(k)}$ associé à la valeur propre λ.

De façon analogue, pour que la matrice $q_\alpha(\alpha, t)$ ne soit pas dégénérée pour $t \in [0, \pi/2]$, il suffit que la matrice $\varepsilon A^{(k)}$ ne possède pas de valeurs propres strictement négatives. Ceci s'obtient par le choix de ε. Montrons que dans ces conditions $\varepsilon \mathscr{E}^{(k)}$ ne possède pas non plus de valeurs propres strictement négatives.

Jusqu'à la fin de la démonstration toutes les différentielles seront prises au point α_0. Soit E_0 le sous-espace de $\mathbf{R}^n$ des vecteurs annulant $d^2 D$. Des relations $z = O_D(h^{1/2})$ et $w = O_D(h^{1/2})$ il s'ensuit alors que $dz\big|_{E_0} = 0$ et $dw\big|_{E_0} = 0$. En effet, si $f = O_D(h^{1/2})$ est une fonction réelle, alors

$$d^2 f^2(u) = 2[df(u)]^2$$

pour tout u. Comme $f^2 \leqslant cD$ et que $f^2 - cD$ présente un minimum en α_0, on obtient

$$d^2 f^2 - c d^2 D \leqslant 0.$$

Donc

$$[df(u)]^2 \leqslant \text{const}\, d^2 D(u),$$

d'où il vient immédiatement que

$$(u \in E_0) \Rightarrow (df(u) = 0).$$

Supposons maintenant que $\varepsilon \mathscr{E}^{(k)}$ possède une valeur propre strictement négative:

$$\varepsilon \mathscr{E}^{(k)}(u+iv) = -\lambda(u+iv), \tag{5.14}$$

où $\lambda > 0$. Récrivons (5.14) sous la forme du système de deux équations

$$\begin{cases} \mathscr{E}_1^{(k)} u - \mathscr{E}_2^{(k)} v = -\lambda \varepsilon_u, \\ \mathscr{E}_1^{(k)} v + \mathscr{E}_2^{(k)} u = -\lambda \varepsilon_v, \end{cases}$$

où $\mathscr{E}_1^{(k)}$ et $\mathbf{E}_2^{(k)}$ sont des matrices symétriques réelles telles que $\mathscr{E}^{(k)} = \mathscr{E}_1^{(k)} + i\mathscr{E}_2^{(k)}$. En multipliant la première équation par v, la seconde par u et en retranchant la première de la seconde, on trouve

$$\langle \mathscr{E}_2^{(k)} u, u \rangle + \langle \mathscr{E}_2^{(k)} v, v \rangle = 0. \tag{5.15}$$

Soient q des coordonnées locales au point α_0. Alors $d^2\Phi_2(u) = \langle \mathscr{E}_2 u, u \rangle$. L'inégalité de dissipation nous donne

$$d^2\Phi_2 \geqslant c d^2 D \geqslant 0,$$

où c est un nombre > 0. Si $u' \in \mathbf{R}^n$ et $v' \in \mathbf{R}^n$,

$$u'_{\bar{I}} = u, \quad v'_{\bar{I}} = v, \quad u'_I = 0, \quad v'_I = 0,$$

alors

$$\langle \mathscr{E}_2^{(k)} u, u \rangle = d^2\Phi_2(u') \geqslant c d^2 D(u') \geqslant 0,$$
$$\langle \mathscr{E}_2^{(k)} v, v \rangle = d^2\Phi_2(v') \geqslant c d^2 D(v') \geqslant 0.$$

Donc, de (5.15) on déduit que

$$\langle \mathscr{E}_2^{(k)} u, u \rangle = \langle \mathscr{E}_2^{(k)} v, v \rangle = 0, \quad u' \in E_0, \quad v' \in E_0. \tag{5.16}$$

Puisque $\mathscr{E}_2^{(k)} \geqslant 0$, il s'ensuit de (5.16) que $\mathscr{E}_2^{(k)} u = \mathscr{E}_2^{(k)} v = 0$. Donc, $u + iv$ est le vecteur propre de la matrice réelle $\varepsilon \mathscr{E}_1^{(k)}$ associé à la valeur propre $-\lambda$. Enfin, l'un des deux vecteurs réels u et v doit être non nul. Supposons pour fixer les idées que $u \neq 0$. Alors

$$\mathscr{E}^{(k)} u = -\varepsilon\lambda u, \quad u' \in E_0. \tag{5.17}$$

Montrons que

$$\mathscr{E}^{(k)} u = A^{(k)} u \tag{5.18}$$

On a

$$C(\alpha_0) u' = [1 + z_q(\alpha_0)] u' = u' + dz(u') = u'.$$

Donc $C^{-1}(\alpha_0) u' = u'$. Par ailleurs,

$$\mathscr{E}(\alpha_0) u' = B(\alpha_0) C^{-1}(\alpha_0) u' = B(\alpha_0) u' = p_q(\alpha_0) u' + dw(u') = p_q(\alpha_0) u'$$

Puisque $u'_I = 0$, il vient

$$[p_q(\alpha_0) u']_{\bar{I}} = A^{(k)} u$$

et

$$[\mathscr{E}(\alpha_0) u']_{\bar{I}} = \mathscr{E}^{(k)} u.$$

De (5.17) et de (5.18), il résulte que

$$A^{(k)}u = -\varepsilon\lambda u,$$

ce qui contredit la condition $\varepsilon A^{(k)} \geqslant 0$. Le théorème est prouvé.

Corollaire. *Supposons que $\alpha_0 \in \Gamma$ appartient à l'intersection d'une carte non singulière de la zone Ω_K et d'une carte non singulière de la zone Ω_I et que la phase Φ_K vérifie en α_0 l'inégalité de dissipation*

$$\varepsilon D \leqslant \operatorname{Im} \Phi_K + cD^{3/2}.$$

Il existe alors des fonctions différentiables $\varepsilon_1 > 0$ et c_1 telles que l'inégalité de dissipation

$$\varepsilon_1 D \leqslant \operatorname{Im} \Phi_I + c_1 D^{3/2} \tag{5.19}$$

est réalisée au voisinage de α_0.

En effet, si $\overline{K} = \varnothing$, cette proposition est la conséquence directe du lemme 5.1, puisque le hamiltonien de contournement des foyers existe. Le cas général peut être ramené au cas $\overline{K} = \varnothing$ par l'application canonique $g_{H_K}^{\pi/2}$ où H_K est la fonction de l'exemple 2.1.

Traitons maintenant le cas des cartes singulières. Dans ce cas, par une petite « déformation » canonique de la variété lagrangienne on peut faire en sorte que l'image du point $\alpha_0 \in \Lambda^n$ soit située dans une carte non singulière de la zone Ω_I quel que soit I. Pour formuler ce résultat rigoureusement, introduisons la notion suivante.

Définition. On dit qu'un point α_0 d'une variété lagrangienne

$$\Lambda^n = \{q = q(\alpha),\ p = p(\alpha)\}$$

est un *point non singulier* pour la projection canonique de l'espace des phases sur le plan de coordonnées $p_I = 0$, $q_{\bar{I}} = 0$ si

$$\left.\frac{D(q_I, p_{\bar{I}})}{D\alpha}\right|_{\alpha=\alpha_0} \neq 0,$$

c'est-à-dire si l'application

$$\alpha \to (q_I(\alpha), p_{\bar{I}}(\alpha))$$

est un difféomorphisme au voisinage du point α_0.

Proposition. *Soit Λ une variété lagrangienne. Pour tout point $\alpha_0 \in \Lambda$ et un $t > 0$ assez petit, le point*

$$g_H^t \alpha_0 \in g_H^t \Lambda, \quad \text{où} \quad H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$$

est non singulier pour la projection canonique sur le plan $q_{\bar{I}} = 0$, $p_I = 0$ de l'espace des phases.

Remarque. La proposition est valable pour tout hamiltonien tel que

$$\frac{\partial^2 H}{\partial q_{\bar{I}} \partial p_I}(p(\alpha_0), (q(\alpha_0)) > 0.$$

Ce résultat est confondu pour l'essentiel avec le lemme classique de Morse qui dit que les points focaux d'une variété d'une espace de Riemann associés à une géodésique sont isolés dans **R**.

Démonstration de la proposition. Il suffit de traiter le cas où $\bar{I}=\varnothing$. En effet, considérons le diagramme commutatif où H_I est le

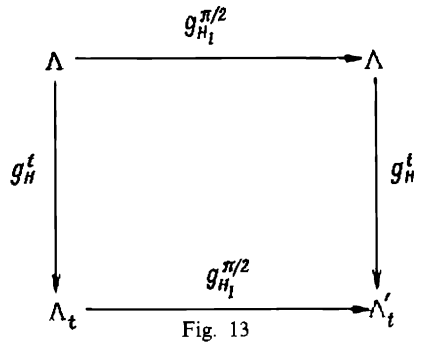


Fig. 13

hamiltonien de l'exemple 2.1. Puisque $g_{H_I}^{\pi/2}$ associe au point $(p,q)\in\mathbf{R}^{2n}$ le point (p',q'), où $p'=(p_I,-q_{\bar{I}})$, $q'=(q_I,p_{\bar{I}})$, le point $g_H^t\alpha_0\in g_H^t\Lambda$ est non singulier pour la projection canonique sur le plan $p_I=0$, $q_{\bar{I}}=0$ si et seulement si le point $(g_H^t\circ g_{H_I}^{\pi/2})\alpha_0\in\Lambda_t'$ est non singulier pour la projection canonique sur le plan $p=0$.

Supposons que $\bar{I}=\varnothing$ et que Λ_t est définie par les équations $p=p(\alpha,t)$, $q=q(\alpha,t)$. Il faut prouver que pour $t>0$ et $\alpha=\alpha_0$ assez petits, la matrice $\partial q(\alpha,t)/\partial\alpha$ n'est pas dégénérée. On a

$$\frac{\partial q(\alpha,t)}{\partial\alpha}=\frac{\partial q(\alpha)}{\partial(\alpha)}\cos t+\frac{\partial p(\alpha)}{\partial\alpha}\sin t=\cos t\left(\frac{\partial q(\alpha)}{\partial\alpha}+\operatorname{tg} t\,\frac{\partial p(\alpha)}{\partial\alpha}\right).$$

Posons

$$\left.\frac{\partial q(\alpha)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=\alpha_0}=C,\qquad \left.\frac{\partial p(\alpha)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=\alpha_0}=B,\qquad \operatorname{tg} t=\lambda.$$

On demande de prouver que

$$\det(C+\lambda B)\neq 0$$

pour $\lambda>0$ petit. Supposons que rang $C=k$. Sans nuire à la généralité on peut admettre que les k premières lignes de la matrice C sont linéairement indépendantes. Alors la matrice

$$\left(\begin{array}{c}\dfrac{\partial q_I}{\partial\alpha}\\[2ex]\dfrac{\partial p_I}{\partial\alpha}\end{array}\right)_{\alpha=\alpha_0},$$

où $I=\{1, 2, \ldots, k\}$ n'est pas dégénérée (cf. démonstration du lemme 2.4). Prenons q_I et p_I pour coordonnées locales sur Λ au voisinage du point α_0. Les matrices B et C s'écrivent alors

$$B=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial p_I}{\partial q_I} & \dfrac{\partial p_I}{\partial p_{\bar{I}}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{\partial q_{\bar{I}}}{\partial q_I} & 0 \end{pmatrix}$$

(dans toutes les formules ultérieures de la démonstration, les dérivées sont prises au point α_0), de sorte que la non-dégénérescence de la matrice $C+\lambda B$ est équivalente à celle de la matrice

$$M(\alpha)=\begin{pmatrix} 1+\lambda\dfrac{\partial p_I}{\partial q_I} & \dfrac{\partial p_I}{\partial p_{\bar{I}}} \\ \dfrac{\partial q_{\bar{I}}}{\partial q_I} & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice $M(\alpha)$ étant continue en 0, il suffit de vérifier que $M(0)$ n'est pas dégénérée. Soit $S_I(q_I, p_{\bar{I}})$ la fonction génératrice de la variété lagrangienne Λ (S-action):

$$q_I=-\frac{\partial S_{\bar{I}}}{\partial p_{\bar{I}}}, \qquad p_I=\frac{\partial S_I}{\partial q_I}.$$

Alors

$$\frac{\partial p_I}{\partial p_{\bar{I}}}=\frac{\partial^2 S_I}{\partial q_I \partial p_{\bar{I}}}, \qquad \frac{\partial q_{\bar{I}}}{\partial q_I}=-\frac{\partial^2 S_I}{\partial p_{\bar{I}} \partial q_I},$$

et pour achever la démonstration il suffit de prouver le

Lemme 5.2. *Soit A une matrice arbitraire de dimension $m\times n$. Alors la matrice*

$$\mathscr{A}=\begin{pmatrix} 1 & A \\ -{}^tA & 1 \end{pmatrix}$$

n'est pas dégénérée.

Démonstration. Si l'on admet le contraire, il existe alors un vecteur non nul tel que $\mathscr{A}u=0$. Mettons u sous la forme

$$u=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

où $u_1\in\mathbf{R}^n$, $u_2\in\mathbf{R}^m$. Alors

D'où

$$u_1+Au_2=0, \qquad -{}^tAu_1+u_2=0.$$

$$\langle u_1, u_2\rangle=-\langle A\,{}^tAu_1, u_1\rangle=-\langle {}^tAu_1, {}^tAu_1\rangle.$$

Donc $u_1=0$ et $u=0$, ce qui contredit l'hypothèse.

Démonstration du théorème 3.1. Nous pouvons prouver maintenant le théorème 3.1. Il faut montrer que si le point $\alpha_0\in\Gamma$ est contenu dans l'intersection d'une carte (u_γ, π_γ^K) de type (K, F) et d'une carte $(u_{\gamma'}, \pi_{\gamma'}^I)$

de type (I, F'), la phase Φ_K^γ vérifiant l'inégalité de dissipation, alors il existe des $\varepsilon > 0$ et $c \geqslant 0$ tels que l'inégalité

$$\varepsilon D \leqslant \operatorname{Im} \Phi_I^{\gamma'} + cD^{3/2}$$

soit satisfaite au voisinage de α_0.

Supposons que

$$\varepsilon_0(\alpha)\, D(\alpha) \leqslant \operatorname{Im} \Phi_K^\gamma(\alpha) + c_0(\alpha)\,[D(\alpha)]^{3/2}$$

au voisinage du point α_0. Posons $H = \frac{1}{2}(p^2+q^2)$ et considérons l'application canonique g_H^t associée à un t assez petit pour que l'image de α_0 soit située dans l'intersection d'une carte non singulière de la zone Ω_K et d'une carte non singulière de la zone Ω_I (un tel t existe en vertu de la proposition 5.1). Supposons par ailleurs que t est assez petit pour que le point $g_H^t\, \alpha_0$ appartienne encore à l'intersection de cartes de types (K, F) et (I, F'). Alors, en vertu du lemme 5.1, pour les α proches de α_0, on a

$$\varepsilon_1(\alpha, t)\, D(\alpha) \leqslant \operatorname{Im} \Phi_K^\gamma(\alpha, t) + c_1(\alpha, t)\,[D(\alpha)]^{3/2}.$$

D'après le lemme 3.4

$$\varepsilon_2(\alpha, t)\, D(\alpha) \leqslant \operatorname{Im} \Phi_K(\alpha, t) + c_2(\alpha, t)\,[D(\alpha)]^{3/2}.$$

Le corollaire du théorème 3.1 entraîne

$$\varepsilon_3(\alpha, t)\, D(\alpha) \leqslant \operatorname{Im} \Phi_I(\alpha, t) + c_3(\alpha, t)\,[D(\alpha)]^{3/2}.$$

Le lemme 3.4 nous donne

$$\varepsilon_4(\alpha, t)\, D(\alpha) \leqslant \operatorname{Im} \Phi_I^\gamma(\alpha, t) + c_4(\alpha, t)\,[D(\alpha)]^{3/2}$$

et enfin

$$\varepsilon(\alpha)\, D(\alpha) \leqslant \operatorname{Im} \Phi_I^{\gamma'}(\alpha) + c(\alpha)\,[D(\alpha)]^{3/2}$$

d'après le lemme 5.1, où g_H^t a été remplacée par g_{-H}^t qui est confondue avec g_H^{-t}. Ce qui prouve le théorème 3.1.

Le théorème 4.1 se démontre comme le corollaire du lemme 5.1 à ceci près qu'il faut utiliser le corollaire du théorème 5.1 au lieu de la proposition 5.1, le théorème 3.1 au lieu du lemme 3.4 et des zones au lieu de cartes. Les détails de cette démonstration sont laissés au soin du lecteur.

§ 6. Intégration de l'équation de transport à dissipation

Nous avons vu sur des exemples que les jacobiens et l'équation de transport jouaient un grand rôle dans les développements asymptotiques et dans les constructions géométriques. Nous intégrons ici l'équation de transport dans le cas général d'une variété lagrangienne à germe complexe.

Tout d'abord désignons par $g = O_f(h^\alpha)$ les fonctions qui dépendent d'un paramètre h.

Définition. Soit $f(x) \geqslant 0$ une fonction différentiable et soit

$$g(x,h) = \sum_{j=0}^{j_0} g_j(x)\, h^{j/2}.$$

On écrira $g = O_f(h^\nu)$ si $g_j = O_f(h^{\nu - j/2})$ pour $j \leqslant 2\nu$. Il est clair que

$$O_f(h^{\nu_1})\, O_f(h^{\nu_2}) = O_f(h^{\nu_1 + \nu_2}),$$
$$O_f(h^{\nu_1}) + O_f(h^{\nu_2}) = O_f(h^{\min\{\nu_1, \nu_2\}})$$

et que tout polynôme g de $h^{1/2}$ à coefficients dépendant différentiablement de x est au moins de l'ordre de $O_f(h^\alpha)$.

Définition. On écrira $g = O_f(h^\nu)$ si

$$g = h^{-k/2}\, O_f(h^{\nu + k/2})$$

pour un entier $k \geqslant 0$. Cette définition a un sens même si $\nu < 0$. Soit

$$s(x,t) = s_1(x,t) + i s_2(x,t)$$

la solution de l'équation de Hamilton-Jacobi de dissipation construite dans le théorème 4.2. On admettra donc que sont donnés une famille $\{\Lambda_t^n, r_t^n\}$ de variétés lagrangiennes à germe complexe et le difféomorphisme correspondant à cette famille

$$\Pi_\gamma : (\alpha, t) \to (x, t),$$

ce qui permet de traiter x et t comme des coordonnées sur la variété $\{\Lambda_t^n\}$ à $n+1$ dimensions. Comme précédemment, on désignera la dérivation par rapport à t à α fixe par d/dt ou par le symbole de dérivation surmonté d'un point, et la dérivation par rapport à t à x fixe par $\partial/\partial t$ ou par t en indice inférieur. Introduisons la classe $\mathscr{P}$ des opérateurs différentiels qui seront traités comme des « perturbations ».

Définition. On dira qu'un opérateur différentiel

$$\mathscr{A} = \sum_{|j|=0}^{j_0} a_j(\alpha, t, h) \left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\right)^j$$

dépendant d'un paramètre h *appartient à la classe* $\mathscr{P}$ si

$$a_j = O_D\left(h^{\frac{|j|-1}{2}}\right) + \langle \tilde{H}_p(p(\alpha,t),\ q(\alpha,t), t),\ O_D(h^{|j|/2})\rangle +$$

et

$$+ h^{1/2}\, O_D\left(h^{\frac{|j|-1}{2}}\right) \text{pour } |j| \geqslant 1$$

$$a_0 = O_D(h^{1/2}) + \langle \tilde{H}_p,\ O_D(h^0)\rangle.$$

Posons $\int_0^t f(\alpha, \tau)\ d\tau = If(\alpha, t)$. On comprendra dans la suite pourquoi les opérateurs de la classe $\mathscr{P}$ s'appellent « perturbations ».

Lemme 6.1. *Pour tout $\mathscr{A}\in\mathscr{P}$ il existe une fonction $\pi(r,s)$ à valeurs entières dépendant de deux variables entières positives telle que*

$$\text{(i)}\quad \mathscr{A}(I\mathscr{A})^r\frac{O_D(h^{s/2})}{h^{s/2}}=O_D\left(h^{\frac{\pi(r,s)}{2}}\right);$$

$$\text{(ii)}\quad \lim_{r\to\infty}\pi(r,s)=+\infty.$$

Démonstration. Soit $\mathscr{A}\in\mathscr{P}$. Il existe alors un $l\geqslant 0$ tel que

$$\mathscr{A}O_D(h^{s/2})=h^{-l/2}\,O_D\left(h^{\frac{s+l}{2}}\right)$$

et l'opérateur $I\mathscr{A}$ peut être mis sous la forme $A+B$, où

$$AO_D(h^{s/2})=h^{-l/2}\,O_D\left(h^{\frac{s+l+1}{2}}\right),$$

$$BO_D(h^{s/2})=\begin{cases}h^{1/2}\,O_D\left(h^{\frac{s-1}{2}}\right) & \text{pour } s\geqslant 1,\\ h^{1/2}\,O_D(h^0) & \text{pour } s=0.\end{cases}$$

Cette décomposition de l'opérateur $I\mathscr{A}$ correspond à celle des coefficients a_j

$$a_j=a_j'+a_j'',$$

$$a_j'=O_D\left(h^{\frac{|j|+1}{2}}\right)+\langle\tilde{H}_p,\,O_D(h^{|j|/2})\rangle,$$

$$a_j''=h^{1/2}\,O_D\left(h^{\frac{|j|-1}{2}}\right).$$

Comme

$$\left|\int_0^t\langle\tilde{H}_p,x\rangle\,dt\right|\leqslant c(\alpha,t)\,[D(\alpha,t)]^{\nu}\int_0^t|\tilde{H}_p|\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant c_1(\alpha,t)\,[D(\alpha,t)]^{\nu}\Big[\int_0^t|\tilde{H}_p|\,d\tau\Big]^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant c_1(\alpha,t)\,[D(\alpha,t)]^{\nu+1/2},$$

on obtient pour A une majoration qui est satisfaite pour toute fonction vectorielle $\chi(\alpha,t)=O_D(h^{\nu})$. Considérons l'opérateur $(A+B)^r$. On a

$$(A+B)^r=\sum_{k=0}^{r}\sum_{p\in G}\overset{p(1)}{B}\ldots\overset{p(k)}{B}\;\overset{p(k+1)}{A}\ldots\overset{p(l)}{A}\overset{\text{déf}}{=}\sum_{k,p}C_{k,p}.$$

où G est le groupe des permutations $\{1,\ldots,r\}$. Il est aisé de voir que

$$C_{k,p}\frac{O_D(h^{s/2})}{h^{s/2}}=h^{\frac{l(r-k)+s-k}{2}}\,O_D\left(h^{\max\left\{\frac{(1+l)(r-k)+s-k}{2},\,0\right\}}\right).$$

Donc,

$$C_{k,p}\frac{O_D(h^{s/2})}{h^{s/2}}=h^{-\frac{p(r-k)+s-k}{2}}O_D\left(h^{\frac{(1+l)(r-k)+s-k}{2}}\right)=O_D\left(h^{\frac{r-s}{2(l+2)}}\right)$$

pour $k\leqslant\dfrac{(1+l)r+s}{l+2}$, $\quad r>s$,

$$C_{k,p}\frac{O_D(h^{s/2})}{h^{s/2}}=h^{-\frac{l(r-k)+s-k}{2}}O_D(h^0)=O_D\left(h^{\frac{r-s}{2(l+2)}}\right)$$

pour $k\geqslant\dfrac{(1+l)r+s}{l+2}$, $\quad r>s$.

Enfin, pour $r\leqslant s$ on a

$$C_{k,p}\frac{O_D(h^{s/2})}{h^{s/2}}=O_D(h^0).$$

Par conséquent

$$\pi(r,s)=\begin{cases}0 & \text{pour } r\leqslant s,\\ \left[\dfrac{r-s}{l+2}\right] & \text{pour } r>s.\end{cases}$$

Définition. On appellera *$\mathscr{P}$-fonction* de l'opérateur $\mathscr{A}$ la fonction $\pi(r,s)$ qui vérifie les conditions (i) et (ii) du lemme 6.1, et *type* de l'opérateur $\mathscr{A}$ le plus petit entier $l>0$ tel que

$$\mathscr{A}O_D(h^{s/2})=h^{-l/2}\,O_D\left(h^{\frac{s+l}{2}}\right).$$

Exercice. Soit

$$\mathscr{A}=\sum_{|j|=0}^{J}h^{-1}\,O_D\left(h^{\frac{|j|+3}{2}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^j.$$

Alors

$$\pi(r,s)=\begin{cases}\left[\dfrac{2r-s}{5}\right]+1 \text{ si } \left\{\dfrac{2r-s}{5}\right\}\geqslant\dfrac{1}{5},\\ 2r-s-4\left[\dfrac{2r-s}{5}\right] \text{ si } \left\{\dfrac{2r-s}{5}\right\}\leqslant\dfrac{1}{5}\end{cases}$$

est la $\mathscr{P}$-fonction de l'opérateur $\mathscr{A}$; ici $[x]$ désigne la partie entière de x, $\{x\}=x-[x]$. En particulier, $\pi(r,0)\geqslant 1$.

Soient donnés un hamiltonien $\mathscr{H}(p,q,t)$, la solution $s(x,t)$ de l'équation de Hamilton-Jacobi à dissipation associée à $\mathscr{H}$, une fonction différentiable $g(p,q,t)$ et un opérateur $\mathscr{A}\in\mathscr{P}$. Appelons *équation de transport à dissipation en $N/2$-approximation* la relation

$$\varphi_t+\langle\mathscr{H}_p(S_{1x},x,t)+i\mathscr{H}_{pp}(S_{1x},x,t)\,S_{2x},\varphi_x\rangle+\left\{\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\mathscr{H}_{pp}(S_{1x},x,t)\,S_{xx}\right]+\right.$$

$$\left.+g(S_{1x},x,t)+\mathscr{A}\right\}\varphi=O_{S_2}(h^{N/2}). \qquad (6.1)$$

Les seules solutions de l'équation de transport à dissipation qui seront étudiées seront des fonctions de la forme $\varphi = h^{-m/2} O_{S_2}(h^{m/2})$. où $m \geqslant 0$ est un entier. Appelons *équation de transport en approximation zéro* la relation obtenue à partir de (6.1) en remplaçant le second membre par

$$O_{S_2}(h^{1/2}) + \langle O_{S_2}(h^0), \tilde{H}_p(S_{1x}, x, t)\rangle.$$

On rappelle que

$$\tilde{H}_p(S_{1x}, x, t) = O_{S_2}(h^{1/3})$$

pour $t > 0$. Il est commode d'identifier la fonction $\varphi(\alpha, t, h)$ à une fonction (dépendant d'un paramètre h) sur la variété $\{\Lambda_t^n\}$ à $n+1$ dimensions par le difféomorphisme Π_γ^I. Comme

$$\varphi_t = \dot{\varphi} - \langle \dot{q} + \dot{\gamma},\ \varphi_x\rangle = \dot{\varphi} - \langle (q_\alpha + \gamma_\alpha)^{-1}(H_p + \dot{\gamma}),\ \varphi_\alpha\rangle$$

et que

$$S_x = p + w - \mathscr{E}(z-\gamma) + u_1, \qquad S_{xx} = \mathscr{E} + u_2,$$

$$\mathscr{H}_p(S_{1x}, x, t) = \mathscr{H}_p(p, q, t) + \mathscr{F}_{pp}(p, q, t)(w - \mathscr{E}(z-\gamma)) + \mathscr{H}_{pp}(p, q, t)\gamma + u_3,$$

$$\mathscr{H}_{pp}(S_{1x}, x, t) = \mathscr{H}_{pp}(p, q, t) + u_4,$$

$$g(S_{1x}, x, t) = g(p, q, t) + u_5,$$

où

$$u_1 = O_D(h),\ u_2 = O_D(h^{1/2}),\ u_3 = O_D(h),$$

$$u_4 = O_D(h^{1/2}),\ u_5 = O_D(h^{1/2}).$$

l'équation de transport à dissipation s'écrit dans les coordonnées α et t:

$$\dot{\varphi} + \langle \varphi_\alpha,\ (q_\alpha + \gamma_\alpha)^{-1}[i\tilde{H}_p - \dot{\gamma} + \mathscr{H}_{pp}(w - \mathscr{E}(z-\gamma)) + \mathscr{H}_{pq}\gamma]\rangle +$$

$$+ \left\{\frac{1}{2}\operatorname{tr}(\mathscr{H}_{pp}\mathscr{E}) + g(p, q, t) + \mathscr{B}\right\}\varphi = O_D(h^{N/2}), \tag{6.2}$$

où $\mathscr{B} \in \mathscr{P}$ et l'opérateur $\mathscr{B}$ est relié à l'opérateur $\mathscr{A}$ par la formule

$$\mathscr{B} = \mathscr{A} + \left\langle (q_\alpha + \gamma_\alpha)^{-1}[u_3 + iu_4 S_{2x} + i\mathscr{H}_{pp}\operatorname{Im} u_1],\ \frac{\partial}{\partial\alpha}\right\rangle +$$

$$+ \frac{1}{2}\operatorname{tr}(\mathscr{H}_{pp} u_2 + u_4 S_{xx}) + u_5.$$

Introduisons l'opérateur de transport P^γ:

$$P^\gamma = \frac{d}{dt} + \left\langle f, \frac{\partial}{\partial\alpha}\right\rangle, \tag{6.3}$$

où

$$f = (q_\alpha + \gamma_\alpha)^{-1}[i\tilde{H}_p - \dot{\gamma} + \mathscr{H}_{pp}(w - \mathscr{E}(z-\gamma)) + \mathscr{H}_{pp}\gamma].$$

Construisons d'abord la solution de l'équation de transport en approximation zéro. Dans les coordonnées (α, t), elle est de la forme

$$P^\gamma\varphi + \left[\frac{1}{2}\operatorname{tr}(\mathscr{H}_{pp}\varepsilon) + g + \mathscr{B}\right]\varphi \sim 0, \tag{6.4}$$

le signe $\sim$ exprimant que l'égalité est réalisée à une fonction près de la forme

$$O_D(h^{1/2}) + \langle O_D(h^0), \tilde{H}_p \rangle.$$

Par analogie avec le cas réel, on cherchera la solution sous la forme

$$\varphi(\alpha, t, h) = \frac{1}{\sqrt{J(\alpha, t)}} \psi(\alpha, t, h),$$

où ψ est la nouvelle fonction inconnue, $J(\alpha, t) = \det C(\alpha, t)$. Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 6.2. *Le jacobien J vérifie la relation*

$$J = J \operatorname{tr} \{\mathscr{H}_{pp} \mathscr{E} + \mathscr{H}_{pq}\} + O_D(h^{1/2}). \tag{6.5}$$

Démonstration. La règle de dérivation du déterminant nous donne

$$\dot{J} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial(\dot{q}_1 + \dot{z}_1)}{\partial \alpha_1} & \cdots & \frac{\partial(\dot{q}_1 + \dot{z}_1)}{\partial \alpha_n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\ \frac{\partial(q_n + z_n)}{\partial \alpha_1} & & \frac{\partial(q_n + z_n)}{\partial \alpha_n} \end{pmatrix} + \ldots + \det \begin{pmatrix} \frac{\partial(q_1 + z_1)}{\partial \alpha_1} & \cdots & \frac{\partial(q_n + z_n)}{\partial \alpha_n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\ \frac{\partial(\dot{q}_n + \dot{z}_n)}{\partial \alpha_1} & \cdots & \frac{\partial(\dot{q}_n + \dot{z}_n)}{\partial \alpha_n} \end{pmatrix} \tag{6.6}$$

D'après (2.6)

$$\frac{\partial(\dot{q} + \dot{z})}{\partial \alpha} = \mathscr{H}_{pq} C + \mathscr{H}_{pp} B + O_D(h^{1/2}) = (\mathscr{H}_{pq} + \mathscr{H}_{pp} \mathscr{E}) C + O_D(h^{1/2}),$$

donc

$$\frac{\partial(\dot{q}_l + \dot{z}_l)}{\partial \alpha_j} = \sum_{k=1}^{n} (\mathscr{H}_{pq} + \mathscr{H}_{pp} \mathscr{E})_{lk} \frac{\partial(q_k + z_k)}{\partial \alpha_j} + O_D(h^{1/2}),$$

de sorte que le l-ième determinant du second membre de (6.6) est égal à

$$(\mathscr{H}_{pq} + \mathscr{H}_{pp} \mathscr{E})_{ll} J + O_D(h^{1/2}).$$

Ce qui prouve (6.5).

Corollaire. *Dans les hypothèses du lemme* 6.2 *on a*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{J}}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{J}} \operatorname{tr} (\mathscr{H}_{pp} \mathscr{E} + \mathscr{H}_{pq}) + \chi, \tag{6.7}$$

où $\chi = O_D(h^{1/2})$.

D'après ce corollaire, la fonction $\psi(\alpha, t, h)$ satisfait la relation

$$(P^\gamma + G(p, q, t) + \mathscr{B}') \psi \sim 0, \tag{6.8}$$

où

$$G = g - \frac{1}{2} \operatorname{tr} \mathscr{H}_{pq}, \qquad \mathscr{B}' = \sqrt{J}\left(\mathscr{B} \frac{1}{\sqrt{J}} + \chi\right) \in \mathscr{P}$$

Signalons que bien que $P^\gamma = \frac{d}{dt} + \left\langle f, \frac{\partial}{\partial \alpha} \right\rangle$, où $f \sim 0$, on ne peut supprimer le terme $\left\langle f, \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \right\rangle$ dans (6.8) si l'on cherche la solution sous la forme $\psi = h^{-m/2} O_D(h^{m/2})$ pour $m > 0$.

L'idée de notre méthode de résolution de l'équation (6.8) est la suivante. Si l'on pouvait mettre P^γ sous la forme d/dt à l'aide d'un opérateur inversible

$$P^\gamma L = L \frac{d}{dt}, \tag{6.9}$$

on pourrait intégrer l'équation (6.8). Ce problème ne se résout pas exactement, mais il s'avère qu'il existe un opérateur « presque inversible » qui satisfait « presque » la relation (6.9). De façon plus exacte, soit

$$L_N^\gamma = \sum_{|j|=0}^{N} \frac{[\beta(\alpha, t)]^j}{j!} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\right)^j, \tag{6.10}$$

où

$$\beta = -C^{-1}(z - \gamma). \tag{6.11}$$

Lemme 6.3. *On a la relation*

$$P^\gamma L_N^\gamma = L_N^\gamma \frac{d}{dt} + \hat{\varepsilon} + \sum_{|k|=N+1} g_k \left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\right)^k,$$

où $\hat{\varepsilon} \in \mathscr{P}$ *et*

$$g_k = O_D\left(h^{\frac{N+1}{2}}\right) + \left\langle O_D\left(h^{\frac{N}{2}}\right) \tilde{H}_p \right\rangle.$$

Démonstration. La relation (6.10) et la définition de P^γ nous donnent

$$P^\gamma L_N^\gamma - L_N^\gamma \frac{d}{dt} = \sum_{|k|=0}^{N} \frac{1}{k!} B_k, \tag{6.12}$$

où

$$B_k = P^\gamma \beta^k \left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\right)^k - \beta^k \left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\right)^k \frac{d}{dt}. \tag{6.13}$$

Soit 1_j l'indice multiple $(\delta_{j1}, \ldots, \delta_{jn})$, où

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad k = j, \\ 0 & \text{pour} \quad k \neq j. \end{cases}$$

Alors

$$B_k = \sum_{j=1}^{N} k_j \beta^{k-1_j} \left(\dot{\beta}_j + \left\langle f, \frac{\partial \beta_j}{\partial \alpha} \right\rangle\right) \left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\right)^k + \beta^k \sum_{j=1}^{n} f_j \left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\right)^{k+1_j} \tag{6.14}$$

En portant (6.14) dans (6.12) on obtient

$$P^\gamma L_N^\gamma - L_N^\gamma \frac{d}{dt} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{|k|=0}^{N-1} \frac{k_j}{k!} \beta^{k-1_j} [P^\gamma(\alpha_j + \beta_j)] \left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\right)^k + \sum_{|k|=N} \frac{\beta^k}{k!} f_j \left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\right)^{k+1_j} \right).$$

Comme

$$\beta = O_D(h^{1/2}), \quad f_j = O_D(h^{1/2}) + \langle a, \tilde{H}_p \rangle,$$

où a est une fonction différentiable de α et de t, pour achever la démonstration, il suffit de s'assurer que

$$P^\gamma(\alpha_j + \beta_j) = \langle O_D(h^{1/2}), \tilde{H}_p \rangle. \tag{6.15}$$

On a

$$P^\gamma(\alpha_j + \beta_j) = f_j + \dot{\beta}_j + \left\langle f, \frac{\partial \beta_j}{\partial \alpha} \right\rangle \overset{\text{déf}}{=} A_j.$$

Désignons par A le vecteur de composantes $(A_1, \ldots, A_n)$. Alors

$$A = \dot{\beta} + (1 + \beta_\alpha) f. \tag{6.16}$$

En appliquant la formule

$$\dot{C} = \mathscr{H}_{pq} C + \mathscr{H}_{pp} B + O_D(h^{1/2}),$$

on obtient

$$\dot{\beta} = C^{-1}(\mathscr{H}_{pq} C + \mathscr{H}_{pp} B)\, C^{-1}(z - \gamma) - C^{-1}(\dot{z} - \dot{\gamma}) + O_D(h) =$$

$$= C^{-1}[\mathscr{H}_{pq}(z - \gamma) + \mathscr{H}_{pp} \mathscr{E}(z - \gamma) - i\tilde{H}_p - \mathscr{H}_{pp} w - \mathscr{H}_{pq} z + \dot{\gamma}] + O_D(h) =$$

$$= C^{-1}[\mathscr{H}_{pp}(w - \mathscr{E}(z - \gamma)) + i\tilde{H}_p + \mathscr{H}_{pq}\gamma - \dot{\gamma}] + O_D(h) =$$

$$= -C^{-1}(q_\alpha + \gamma_\alpha) f + O_D(h). \tag{6.17}$$

Par ailleurs,

$$1 + \beta_\alpha = 1 - C^{-1}(z_\alpha - \gamma_\alpha) + O_D(h^{1/2}) = C^{-1}(g_\alpha + \gamma_\alpha) + O_D(h^{1/2}). \tag{6.18}$$

Les équations (6.17) et (6.18) entraînent

$$A = O_D(h) + O_D(h^{1/2})\, \tilde{H}_p.$$

Ce qui prouve le lemme.

Dans les deux lemmes suivants, on construira un opérateur presque réciproque de L_N^γ.

Lemme 6.4. *Soit $\rho(\alpha, t)$ une fonction vectorielle différentiable telle que $\det(1 + \rho_\alpha) \neq 0$. Il existe alors deux suites $\{\mathscr{P}_k(\rho)\}$ et $\{Q_k(\rho)\}$ de polynômes homogènes de degré k en ρ à coefficients vectoriels dépendant différentiablement de α et de t telles que pour tout $R > 1$ l'on a la relation*

$$\rho + \sum_{|j|=0}^{R-1} \frac{\rho^j}{j!} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\right)^j \sum_{k=1}^{R-1} \mathscr{P}_k(\rho) = Q_k(\rho). \tag{6.19}$$

Démonstration. Construisons les suites $\{\mathscr{P}_k\}$ et $\{Q_k\}$ par récurrence. Posons

$$\mathscr{P}_1(\rho) = -(1+\rho_\alpha)^{-1}\rho.$$

Alors

$$\rho + \sum_{|j|=0}^{1} \frac{\rho^j}{j!} \frac{\partial^{|j|}\mathscr{P}_1(\rho)}{\partial\alpha^j} = \rho - (1+\rho_\alpha)^{-1}\rho - (1+\rho_\alpha)^{-1}\rho_\alpha\rho + Q_2(\rho) = Q_2(\rho),$$

de sorte que la relation (6.19) a lieu pour $R=2$.

Supposons maintenant que les polynômes $\mathscr{P}_1, \ldots, \mathscr{P}_m$ et $Q_2, \ldots, Q_{m+1}$ sont construits de telle sorte que la relation (6.19) est réalisée pour $R=2, \ldots, m+1$ et soit $\mathscr{P}_{m+1}$ un polynôme homogène de degré $m+1$ à coefficients vectoriels dépendant différentiablement de α et de t. Alors

$$\rho + \sum_{|j|=0}^{m+1} \frac{\rho^j}{j!} \left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^j \sum_{k=1}^{m+1} \mathscr{P}_k(\rho) = \sum_{|j|=0}^{m+1} \frac{\rho^j}{j!} \frac{\partial^{|j|}\mathscr{P}_{m+1}(\rho)}{\partial\alpha^j} + Q_{m+1}(\rho) +$$

$$+ \sum_{|j|=m+1} \frac{\rho^j}{j!} \left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^j \sum_{k=1}^{m} \mathscr{P}_k(\rho) = \overline{Q}_{m+1}(\rho) + \sum_{|j|=0}^{m+1} \frac{\rho^j}{j!} \frac{\partial^{|j|}\mathscr{P}_{m+1}(\rho)}{\partial\alpha^j}, \qquad (6.20)$$

où $\overline{Q}_{m+1}(\rho)$ est un polynôme homogène de degré $m+1$ à coefficients différentiables indépendants du choix de $\mathscr{P}_{m+1}$. Comme

$$\frac{\partial^{|j|}\mathscr{P}_{m+1}(\rho)}{\partial\alpha^j} = \left({}^t\rho_\alpha \frac{\partial}{\partial\rho}\right)^j \mathscr{P}_{m+1}(\rho) + \overline{\overline{Q}}_{j,m+2-j}(\rho),$$

où $\overline{\overline{Q}}_{j,m+2-j}(\rho)$ est un polynôme homogène de degré $m+2-j$ à coefficients différentiables, il s'ensuit de (6.20) que si le polynôme $\mathscr{P}_{m+1}$ est solution de l'équation

$$\sum_{|j|=0}^{m+1} \frac{\rho^j}{j!} \left({}^t\rho_\alpha \frac{\partial}{\partial\rho}\right)^j \mathscr{P}_{m+1}(\rho) = -\overline{Q}_{m+1}(\rho), \qquad (6.21)$$

alors il existe un polynôme Q_{m+2} tel que (6.19) soit réalisée pour $R=m+2$. On aura donc prouvé le lemme quand on montrera que (6.21) admet une solution de la forme

$$\mathscr{P}_{m+1}(\rho) = \sum_{|j|=m+1} b_j \rho^j,$$

où b_j est une fonction vectorielle différentiable de α et de t. Soit

$$\tilde{Q}_{m+1}(\rho) = -\sum_{|j|=m+1} a_j \rho^j$$

Alors $\mathscr{P}_{m+1}$ est solution de (6.21) si $b_1, \ldots, b_n$ le sont des équations

$$\left[\sum_{k \leqslant j} \frac{j!}{k!(j-k)!} ({}^t\rho_\alpha)^{|k|}\right] b_j = a_j, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{6.22}$$

Il suffit donc de prouver que la matrice

$$A_j \overset{\text{déf}}{=} \sum_{k \leqslant j} \frac{j!}{k!(j-k)!} ({}^t\rho_\alpha)^{|k|}$$

n'est dégénérée pour aucun j. Remarquons que

$$\sum_{k \leqslant j} \frac{j!\, x^{|k|}}{k!(j-k)!} = (1+x)^{|j|}$$

Ceci résulte de l'analogue multidimensionnel du binôme de Newton

$$(x+y)^j = \sum_{k \leqslant j} \frac{j!}{k!(j-k)!} x^k y^{j-k},$$

où j et k sont des indices multiples de longueur n, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Donc

$$\det A_j = \det[(1 + {}^t\rho_\alpha)^{|j|}] = [\det(1 + {}^t\rho_\alpha)]^{|j|} \neq 0.$$

Ce qui prouve le lemme

Lemme 6.5. *Soit* $\{\mathscr{P}_k\}$ *la suite de polynômes du lemme* 6.4 *et soit*

$$\beta_N = \sum_{k=1}^{N} \mathscr{P}_k(\beta).$$

Alors l'opérateur

$$R_N^\gamma = \sum_{|j|=0}^{N} \frac{1}{j!} \beta_N^j \left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\right)^j \tag{6.23}$$

satisfait les conditions

$$\begin{aligned} L_N^\gamma R_N^\gamma &= 1 + \hat{\varepsilon}_1, \\ R_N^\gamma L_N^\gamma &= 1 - \hat{\varepsilon}_2, \end{aligned} \tag{6.24}$$

où

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_1 &= \sum_{|r|=1}^{2N} a_r(\alpha, t) \left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\right)^r, \\ \hat{\varepsilon}_2 &= \sum_{|r|=1}^{2N} b_r(\alpha, t) \left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\right)^r \end{aligned} \tag{6.25}$$

$$a_r(\alpha, t) = O_D\left(h^{\frac{N+1}{2}}\right),$$

$$b_r(\alpha, t) = O_D\left(h^{\frac{N+1}{2}}\right).$$

Démonstration. Trouvons tout d'abord (6.24), c'est-à-dire assurons-nous que R_N^γ est un opérateur «presque» réciproque à droite de l'opérateur L_N^γ. On a

$$L_N^\gamma R_N^\gamma = \sum_{|k|=0}^{N} \frac{1}{k!} \beta^k \left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\right)^k \sum_{|l|=0}^{N} \frac{1}{l!} \beta_N^l \left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\right)^l =$$

$$= \sum_{|k|=0}^{N} \sum_{|l|=0}^{N} \sum_{0 \leqslant j \leqslant k} \frac{1}{j!\,(k-j)!\,l!} \beta^k \frac{\partial^{|j|} \beta_N^l}{\partial \alpha^j} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\right)^{l+k-j}.$$

En remplaçant l'indice de sommation j par $r = l + k - j$ et en modifiant l'ordre de sommation, on obtient

$$L_N^\gamma R_N^\gamma = \sum_{|k|=0}^{N} \sum_{|l|=0}^{N} \sum_{l \leqslant r \leqslant k+l} \frac{\beta^k}{(l+k-r)!\,(r-l)!\,l!} \times$$

$$\times \frac{\partial^{|l+k-r|} \beta_N^l}{\partial \alpha^{l+k-r}} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\right)^r = 1 + \sum_{|r|=1}^{2N} a_r \left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\right)^r.$$

où

$$a_r = \sum_{\substack{0 \leqslant l \leqslant r \\ |l| \geqslant N}} \sum_{\substack{k \geqslant r-l \\ |k| \leqslant N}} \frac{\beta^k}{(l+k-r)!\,(r-l)!\,l!} \frac{\partial^{|l+k-r|} \beta_N^l}{\partial \alpha^{l+k-r}} \tag{6.26}$$

Enfin, en remplaçant dans (6.26) l'indice k par $j = l + k - r$, on trouve

$$a_r = \sum_{\substack{0 \leqslant l \leqslant r \\ |l| \leqslant N}} \sum_{|j|=0}^{N+|l|-|r|} \frac{\beta^{j+r-l}}{j!\,(r-l)!\,l!} \frac{\partial^{|j|} \beta_N^l}{\partial \alpha^j} = \sum_{\substack{0 \leqslant l \leqslant r \\ |l| \leqslant N}} \frac{\beta^{r-l}}{l!\,(r-l)!} \sum_{|j|=0}^{N+|l|-|r|} \frac{\beta^j}{j!} \frac{\partial^{|j|} \beta_N^l}{\partial \alpha^j}. \tag{6.27}$$

Montrons maintenant que

$$\sum_{|l|=0}^{N} \frac{\beta^j}{j!} \frac{\partial^{|j|} \beta_N^l}{\partial \alpha^j} = (-\beta)^l + O_D\left(h^{\frac{N+1}{2}}\right). \tag{6.28}$$

Notons tout d'abord qu'aux points où la dissipation est nulle, la relation

$$1 + \beta_\alpha = 1 - (q_\alpha + z_\alpha)^{-1} (z_\alpha - \gamma_\alpha) + O_D(h^{1/2}) = (q_\alpha + z_\alpha)^{-1} (q_\alpha + \gamma_\alpha) + O_D(h^{1/2})$$

entraîne la non-dégénérescence de la matrice $1+\beta_\alpha$. Par définition de la fonction β_N et du fait que $\beta = O_D(h^{1/2})$ il s'ensuit alors du lemme 6.4 que

$$\sum_{|j|=0}^{N} \frac{\beta^j}{j!} \frac{\partial^{|j|}\beta_N}{\partial\alpha^j} = -\beta + O_D\left(h^{\frac{N+1}{2}}\right).$$

Donc, pour prouver (6.28), il suffit de s'assurer de la validité de la relation

$$\sum_{|j|=0}^{N} \frac{\beta^j}{j!} \frac{\partial^{|j|}\beta_N^l}{\partial\alpha^j} - \left[\sum_{|j|=0}^{N} \frac{\beta^j}{j!} \frac{\partial^{|j|}\beta_N}{\partial\alpha^j}\right]^l = O_D\left(h^{\frac{N+1}{2}}\right). \tag{6.29}$$

Soit $f(\alpha, t)$ une fonction vectorielle différentiable. Considérons le polynôme suivant à coefficients dépendant différentiablement de α et de t:

$$F_f(\beta) \sum_{|j|=0}^{N} \frac{\beta^j}{j!} \frac{\partial^{|j|} f^l}{\partial\alpha^j} - \left[\sum_{|j|=0}^{N} \frac{\beta^j}{j!} \frac{\partial^{|j|} f}{\partial\alpha^j}\right]^l = \sum_k c_k(\alpha, t)\,\beta^k.$$

Si x est un vecteur réel assez petit, alors

$$F_f(x) = f^l(\alpha+x, t) + O(|x|^{N+1}) - [f(\alpha+x, t) + O(|x|^{N+1})]^l = O(|x|^{N+1}).$$

D'où $c_k(\alpha, t) = 0$ pour $|k| \leqslant N$, de sorte que

$$F_f(\beta) = O_D\left(h^{\frac{N+1}{2}}\right).$$

En faisant $f = \beta_N$, on obtient (6.29). De (6.28), il résulte que

$$\sum_{|j|=0}^{N+|l|-|r|} \frac{\beta^j}{j!} \frac{\partial^{|j|}\beta_N^l}{\partial\alpha^j} = (-\beta)^l + O_D\left(h^{\frac{N+|l|-|r|+1}{2}}\right) \tag{6.30}$$

pour $l \leqslant r$. En portant (6.30) dans (6.27), on obtient

$$a_r = \sum_{l \leqslant r} \frac{\beta^{r-l}}{l!\,(r-l)!} (-\beta)^l + O_D\left(h^{\frac{N+1}{2}}\right) = (\beta-\beta)^r + O_D\left(h^{\frac{N+1}{2}}\right) = O_D\left(h^{\frac{N+1}{2}}\right)$$

pour $l \leqslant r$. Si $|r| > N$, la majoration $a_r = O_D\left(h^{\frac{N+1}{2}}\right)$ est évidente. On a ainsi prouvé la formule (6.24), autrement dit on a construit l'opérateur R_N^γ qui est le « presque » réciproque à droite de L_N^γ.

Signalons maintenant que pour construire l'opérateur « presque » réciproque à droite de L_N^γ nous n'avons utilisé que deux propriétés de la

fonction $\beta(\alpha, t)$, savoir: (i) $\beta = O_D(h^{1/2})$ et (ii) $\det (1+\beta_\alpha)_{\alpha\in\Gamma_r} \neq 0$. La fonction $\beta_N(\alpha, t)$ possède aussi ces propriétés, puisque

$$\beta_N = -(1+\beta_\alpha)^{-1}\beta + O_D(h),$$

$$\left(1+\frac{\partial\beta_N}{\partial\alpha}\right) = 1-(1+\beta_\alpha)^{-1}\beta_\alpha + O_D(h^{1/2}) = (1+\beta_\alpha)^{-1} + O_D(h^{1/2})$$

Il existe donc une fonction $\overline{\beta} = O_D(h^{1/2})$ telle que l'opérateur

$$S_N^\gamma = \sum_{|j|=0}^{N} \frac{\overline{\beta}^j}{j!}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^j$$

est « presque » réciproque à droite de R_N^γ, c'est-à-dire que

$$R_N^\gamma S_N^\gamma = 1 + \hat{\varepsilon}_3, \tag{6.31}$$

où

$$\hat{\varepsilon}_3 = \sum_{|r|=1}^{2N} d_r(\alpha, t)\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^r, \qquad d_r = O_D\left(h^{\frac{N+1}{2}}\right)$$

En multipliant (6.24) à gauche par R_N^γ et à droite par S_N^γ, on obtient

$$R_N^\gamma L_N^\gamma R_N^\gamma S_N^\gamma = R_N^\gamma S_N^\gamma + R_N^\gamma \hat{\varepsilon}_1 S_N^\gamma = 1 + \hat{\varepsilon}_3 + R_N^\gamma \hat{\varepsilon}_1 S_N^\gamma. \tag{6.32}$$

De (6.31) et (6.32) il résulte que

$$R_N^\gamma L_N^\gamma = 1 + \hat{\varepsilon}_3 + R_N^\gamma \hat{\varepsilon}_1 S_N^\gamma - R_N^\gamma L_N^\gamma \hat{\varepsilon}_3. \tag{6.33}$$

Posons

$$\hat{\varepsilon}_2 \overset{\text{déf}}{=} \hat{\varepsilon}_3 + R_N^\gamma \hat{\varepsilon}_1 S_N^\gamma - R_N^\gamma L_N^\gamma \hat{\varepsilon}_3. \tag{6.34}$$

De (6.33) il vient que $\hat{\varepsilon}_2$ est un opérateur différentiel d'ordre $2N$:

$$\hat{\varepsilon}_2 = \sum_{|j|=0}^{2N} b_j\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^j.$$

De (6.34) il résulte aussitôt que $b_j = O_D\left(h^{\frac{N+1}{2}}\right)$. Ce qui prouve le lemme.

Théorème 6.1. *Si* $\mathscr{A}\ \dfrac{O_D(h^{m/2})}{h^{m/2}} \sim 0$, *alors pour toute fonction* $v_0(\alpha, t) = \dfrac{O_D(h^{m/2})}{h^{m/2}}$ *la fonction*

$$\varphi(\alpha, t, h) = \frac{1}{\sqrt{J(\alpha, t)}} L_m^\gamma v_0(\alpha, h) e^{-\int_0^t G(p(\alpha,\tau), q(\alpha,\tau), \tau)\, d\tau}$$

est solution de l'équation de transport à dissipation en approximation zéro.

Remarque. Si $\mathscr{A}\dfrac{O_D(h^{m/2})}{h^{m/2}}$ n'est pas équivalente à 0, la fonction $\varphi(\alpha, t, h)$ construite dans le théorème peut être utilisée pour résoudre l'équation de transport à l'aide de la théorie des perturbations (cf. plus bas théorème 6.2).

Démonstration du théorème 6.1. Soit

$$v(\alpha, t, h) = v_0(\alpha, h) e^{-\int_0^t G(p(\alpha,\tau), q(\alpha,\tau), \tau)\, d\tau}$$

Alors v est solution de l'équation $\dot{v} + Gv = 0$, et

$$v = h^{-m/2} O_D(h^{m/2}).$$

Le lemme 6.3 nous donne

$$(P^\gamma + G) L_m^\gamma v = \left\{ L_m^\gamma \left(\frac{d}{dt} + G\right) + \hat{\varepsilon} + \sum_{|k|=m+1} g_k \left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^k + [G, L_m^\gamma] \right\} v =$$

$$= \left\{ \hat{\varepsilon} + \sum_{|k|=m+1} g_k \left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^k + [G, L_m^\gamma] \right\} v.$$

Il est évident que

$$\left[\hat{\varepsilon} + \sum_{|k|=m+1} g_k \left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^k \right] v \sim 0.$$

De plus

$$[G, L_m^\gamma] = \sum_{|j|=0}^{m} G \frac{\beta^j}{j!} \left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^j - \sum_{|j|=0}^{m} \sum_{k \leqslant j} k! \frac{\beta^j}{(j-k)!} \frac{\partial^{|j-k|} G}{\partial\alpha^{j-k}} \left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^k =$$

$$= -\sum_{|j|=0}^{m} \sum_{k<j} \frac{\beta^j}{k!\,(j-k)!} \frac{\partial^{|j-k|}}{\partial\alpha^{j-k}} \left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^k \in \mathscr{P}, \qquad (6.35)$$

de sorte que $[G, L_m^\gamma] v \sim 0$. Ainsi, la fonction $\psi = L_m^\gamma v$ satisfait la relation (6.8). Ce qui prouve le théorème.

Passons maintenant à la résolution de l'équation de transport à dissipation en approximation N. Comme avant posons $\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{J}} \psi$. Alors (6.2) devient

$$(P^\gamma + G + \mathscr{B}') \psi = O_D(h^{N/2}). \qquad (6.36)$$

Cherchons ψ sous la forme

$$\psi = L_m^\gamma v, \qquad (6.37)$$

le nombre m sera choisi ultérieurement. En portant (6.37) dans (6.36) on obtient en vertu du lemme 6.3:

$$\left[L_m^\gamma \left(\frac{d}{dt} + G\right) + \hat{\varepsilon}' + \sum_{|k|=m+1} g_k \left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^k \right] v = O_D(h^{N/2}), \qquad (6.38)$$

où

$$\hat{\varepsilon}' = \hat{\varepsilon} + [G, L_m^\gamma] + \mathscr{B}' L_m^\gamma \in \mathscr{P}. \tag{6.39}$$

L'opérateur $\hat{\varepsilon}$ et les fonctions g_k ont été introduits dans le lemme 6.3. Si $v = \dfrac{O_D(h^{s/2})}{h^{s/2}}$, en tenant compte du fait que $g_k = O_D(h^{m/2})$ on peut supprimer l'opérateur $\sum_{|k|=m+1} g_k \left(\dfrac{\partial}{\partial \alpha}\right)^k$ dans (6.38) en choisissant $m \geqslant N+s$.

Par ailleurs, le lemme 6.5 nous permet d'écrire

$$\hat{\varepsilon}' = (L_m^\gamma R_m^\gamma - \hat{\varepsilon}_1)\,\hat{\varepsilon}' = L_m^\gamma \hat{\varepsilon}'' - \hat{\varepsilon}_1 \hat{\varepsilon}',$$

où

$$\hat{\varepsilon}'' = R_m^\gamma \hat{\varepsilon}' \in \mathscr{P}, \tag{6.40}$$

et $\hat{\varepsilon}_1$ est l'opérateur du lemme 6.5. En particulier,

$$\hat{\varepsilon}_1 \hat{\varepsilon}' \frac{O_D(h^{s/2})}{h^{s/2}} = O_D(h^{N/2}), \tag{6.41}$$

pour $m \geqslant N+s+k-1$, où k est le type de l'opérateur $\mathscr{A}$. Comme

$$L_m^\gamma O_D(h^{N/2}) = O_D(h^{N/2})$$

on est conduit à la relation

$$\left(\frac{d}{dt} + G + \hat{\varepsilon}''\right) v = O_D(h^{N/2}). \tag{6.42}$$

La fonction v qui vérifie (6.42) peut être trouvée à l'aide de la théorie des perturbations en traitant $\hat{\varepsilon}''$ comme une petite contribution à l'opérateur $\dfrac{d}{dt} + G$. Plus exactement, on a le lemme suivant.

Lemme 6.6. *Supposons que l'opérateur I est celui du lemme* 6.1, $\hat{\varepsilon} \in \mathscr{P}$ *et*

$$\hat{\delta} = -e^{\int_0^t G\,d\tau} \circ \varepsilon \circ e^{-\int_0^t G\,d\tau}.$$

Alors, pour tout

$$v_0(\alpha, h) = \frac{O_D(h^{s\omega/2})}{h^{s\omega/2}},$$

la fonction

$$v = e^{-\int_0^t G\,d\tau} \sum_{j=0}^{N} (I\hat{\delta})^j v_0$$

satisfait la relation

$$\left(\frac{d}{dt} + G + \hat{\varepsilon}\right) v = O_D\left(h^{\frac{\pi(N,s)}{2}}\right),$$

où π est la $\mathscr{P}$-fonction de l'opérateur $\hat{\delta}$.

Démonstration. On a

$$\left(\frac{d}{dt}+G+\hat{\varepsilon}\right)v=e^{-\int_0^t G\,d\tau}\left(\frac{d}{dt}-\hat{\delta}\right)\sum_{j=0}^{N}(I\hat{\delta})^j v_0=-e^{-\int_0^t G\,d\tau}\hat{\delta}\,(I\hat{\delta})^N v_0.$$

Ce qui prouve le lemme.

On peut maintenant formuler le résultat fondamental de ce paragraphe: le théorème relatif à l'intégration de l'équation de transport à dissipation.

Théorème 6.2. *Supposons que l'opérateur* $\mathscr{A}$ *de* (6.1) *est de type* k. *Alors, pour toute fonction* $v_0(\alpha, h)=h^{-s_0/2}\,O_D(h^{s_0/2})$, *la fonction*

$$\varphi(\alpha,t,h)=\frac{1}{\sqrt{J(\alpha,h)}}\,L_m^{\gamma}e^{-\int_0^t G(p(\alpha,\tau),q(\alpha,\tau),\tau)\,d\tau}\sum_{j=0}^{N(k+2)+s_0}(I\hat{\delta})^j v_0(\alpha,h), \tag{6.43}$$

où

$$\hat{\delta}=-e^{\int_0^t G\,d\tau}\circ\hat{\varepsilon}''\circ e^{-\int_0^t G\,d\tau}$$

est solution de (6.2).

L'opérateur $\hat{\varepsilon}''$ est défini par la formule (6.40) et

$$m=N(k+1)^2+s_0(k+1)+\max\{k-1,0\}.$$

La démonstration de ce théorème a en fait été déjà produite plus haut. Signalons seulement les faits suivants:

(1) La fonction

$$v=e^{-\int_0^t G\,d\tau}\sum_{j=0}^{N(k+2)-s_0}(I\hat{\delta})^j v_0 \tag{6.44}$$

vérifie, en vertu du lemme 6.6, la relation (6.42). En effet, si l'opérateur $\mathscr{A}$ est de type k, on voit immédiatement qu'il en est de même de l'opérateur $\hat{\delta}$. De la démonstration du lemme 6.1 il résulte que pour $\mathscr{P}$-fonction de l'opérateur $\hat{\delta}$ on peut prendre

$$\pi(r,s)=\begin{cases}\dfrac{r-s}{k+2} & \text{pour} \quad r\geqslant s,\\ 0 & \text{pour} \quad r<s,\end{cases}$$

de sorte que

$$\pi(N(k+2)+s_0,\,s_0)=N.$$

(2) Il est aisé de voir que la fonction (6.43) est de la forme

$$v=h^{-s/2}\,O_D(h^{s/2}),$$

où $s=k[N(k+2)+s_0]+s_0$.

Pour un tel s la condition (6.41) est remplie lorsque $m \geqslant N(k+1)^2 + s_0(k+1)+k-1$, et la condition

$$\sum_{|k|=m+1} g_k \left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\right)^k \frac{O_D(h^{s/2})}{h^{s/2}},$$

lorsque $m \geqslant N(k+1)^2 + s_0(k+1)$.

Remarque. Si $\pi(r,s)$ est la $\mathscr{P}$-fonction de l'opérateur $\hat{\delta}$ et $r = r(s_0, N)$ est solution de l'équation $\pi(r, s_0) = N$, on peut dans le théorème 6.2 remplacer $\sum_{j=0}^{N(k+r)+s_0}$ par $\sum_{j=0}^{r(s_0,N)}$. Ceci étant, il faut prendre m égal à

$$m = \max\{r+s,\ r+s+k-1\}.$$

Remarque. Soit $\frac{\partial}{\partial l} = \left(\frac{\partial}{\partial l_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial l_n}\right)$ un ensemble de champs de vecteurs complexes commutables sur u_j, linéairement indépendants en tout point (un champ de vecteurs complexe sur une variété réelle M est un élément du complexifié de l'espace C^∞ par rapport à tous les champs de vecteurs sur M). Le théorème 6.2 reste en vigueur si dans les définitions de $J(\alpha, t)$, L_m^γ et δ on remplace $\partial/\partial\alpha$ par $\partial/\partial l$, par exemple

$$L_m^\gamma = \sum_{|j|=0}^{m} \frac{(\beta_\gamma)^j}{j!} \left(\frac{\partial}{\partial l}\right)^j,$$

où

$$\beta_\gamma = -\left[\frac{\partial(q+z)}{\partial l}\right]^{-1}(z-\gamma).$$

CHAPITRE VII

OPÉRATEUR CANONIQUE SUR UNE VARIÉTÉ LAGRANGIENNE À GERME COMPLEXE ET DÉMONSTRATION DU THÉORÈME FONDAMENTAL

§ 1. Opération quantique de contournement des foyers

Dans ce paragraphe on concentrera notre attention sur les problèmes relatifs à la décomposition asymptotique de la transformée de Fourier de fonctions de la forme

$$\left[\frac{1}{\sqrt{J(\alpha)}}\, e^{\frac{i}{h}\Phi^{\gamma}(\alpha)}\, \varphi(\alpha)\right]_{\alpha=\pi_{\gamma}^{-1}(x)}, \qquad \operatorname{Im}\Phi^{\gamma}\geqslant 0, \qquad x\in\mathbf{R}^{n}.$$

Cette décomposition joue un rôle important dans la définition d'un opérateur canonique sur une variété lagrangienne à germe complexe.

La méthode du col est très peu favorable à l'acquisition de cette décomposition asymptotique, car la phase n'est pas représentable par la somme d'une S-action, d'une μ-action et d'un potentiel.

La méthode proposée ici se base sur une transformation spéciale qui sera appelée *opération quantique de contournement des foyers*. Mais auparavant on définira les opérations sur des séries asymptotiques.

1. Algèbres de séries asymptotiques. Considérons une famille $\{\varphi_j(\alpha,h)\}_{j\in J}$ de fonctions différentiables de α. A chaque famille $\{\varphi_j(\alpha,h)\}_{j\in J}$ associons une série formelle $\varphi=\sum_{j\in J}\varphi_j(\alpha,h)$ et définissons sur l'ensemble $\mathscr{R}$ de ces séries les opérations d'addition et de multiplication faisant *ipso facto* de $\mathscr{R}$ une algèbre sur le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes.

Soient $\varphi=\sum_{j\in J}\varphi_j$, $\psi=\sum_{k\in K}\psi_k\in\mathscr{R}$. Considérons deux familles $\{\chi_l\}_{l\in J\cup k}$ et $\{r_i\}_{i\in J\times K}$ telles que

$$\chi_l=\begin{cases}\varphi_l & \text{pour} \quad l\in J\diagup K,\\ \psi_l & \text{pour} \quad l\in K\diagup J,\\ \varphi_l+\psi_l & \text{pour} \quad l\in K\cap J.\end{cases} \qquad r_i=\varphi_j\cdot\psi_k \text{ pour } i=(j,k),$$

Définissons la multiplication des séries de $\mathscr{R}$ par des nombres complexes, l'addition et la multiplication des séries par les formules suivantes:

$$a\varphi=\sum_{j\in J}a\varphi_j, \qquad a\in\mathbf{C};$$

$$\varphi+\psi=\sum_{l\in J\cup K}\chi_l;\qquad \varphi\psi=\sum_{i\in J\times K} r_i.$$

Ces formules entraînent immédiatement que $\mathscr{R}$ est une algèbre associative et commutative sur $\mathbf{C}$. Une sous-algèbre importante de $\mathscr{R}$ est l'algèbre des séries asymptotiques à la définition desquelles nous passons. Dans toute la suite, nous admettrons que $D=D(\alpha)$ est une fonction différentiable positive.

Définition. On dira qu'une série $\varphi=\sum_{j\in J}\varphi_j\in\mathscr{R}$ est *D-asymptotique si*

(i) pour chaque $j\in J$ il existe un ν_j tel que $\varphi_j=O_D(h^{\nu_j})$;

(ii) il existe un ensemble compact $K_\varphi\subset\mathbf{R}^n$ tel que

$$\operatorname{supp}\varphi_j(\alpha,h)\in K \text{ pour tous les } h>0 \quad \text{et} \quad j\in J.$$

(iii) pour tout N naturel, il existe un ensemble fini $J_0\subset J$ tel que $\varphi_j=O_D(h^N)$ pour tous les $j\in J\diagup J_0$.

Définition. On dira qu'une série $\varphi=\sum_{j\in J}\varphi_j\in\mathscr{R}$ est *h-asymptotique* si pour tous naturels k, l et $j\in J$ sont remplies les conditions suivantes:

(i) il existe un nombre m_{jkl} tel que

$$\|\varphi_j\|_{C_l^k(\mathbf{R}^n)}\overset{\text{déf}}{=}\sup_{\alpha\in\mathbf{R}^n}(1+|\alpha|)^l\sum_{|s|=0}^{k}\left|\frac{\partial^{|s|}}{\partial\alpha^s}\varphi(\alpha,h)\right|=O(h^{m_{jkl}});$$

(ii) pour tout N naturel, il existe un ensemble fini $J_0\subset J$ tel que

$$\|\varphi_j\|_{C_l^k(\mathbf{R}^n)}=O(h^N)\qquad \text{pour les } j\in J\setminus J_0.$$

Des définitions il résulte que les ensembles $\mathscr{R}$ des séries h-asymptotiques et $\mathscr{R}_D$ des séries D-asymptotiques sont des sous-algèbres de l'algèbre des séries formelles.

On voit sur la définition des séries D-asymptotiques que pour tout entier s, il existe un ensemble fini (éventuellement vide) J_s tel que $\varphi_j=O_D(h^s)$ pour tous les $j\notin J_s$. L'ensemble J_s étant fini, ceci définit la somme $\sum_{j\in J_s}\varphi_j$ de façon non formelle. Sans nuire à la généralité on peut admettre que $\sum_{j\in J_s}\varphi_j=O_D(h^m)$, $m\leqslant s$. Il est évident que tout ensemble fini $J'\supset J_s$ on a $\sum_{j\in J'}\varphi_j=O_D(h^m)$. Si $\sum_{j\in J_s}\varphi_j\neq O_D(h^s)$ pour un certain s, alors de ce qui précède il résulte qu'il existe un plus petit s tel que $\sum_{j\in J_s}\varphi_j\neq O_D(h^s)$. Donc la définition suivante est correcte.

Définition. Le plus petit semi-entier k tel que

$$\sum_{j\in J_{k+1/2}}\varphi_j\neq O_D(h^{k+1/2})$$

sera appelé *ordre* de la série asymptotique φ et noté $\operatorname{ord}\varphi$.

Signalons qu'une condition nécessaire et suffisante pour que ord φ, où $\varphi = \sum_{j\in J} \varphi_j$ est une série D-asymptotique, n'existe pas est que $\sum_{j\in I} \varphi_j = O_D(h^s)$ pour tout entier s. En étudiant les séries formelles on ne s'est pas soucié de leur sommabilité, mais en calculant leurs sommes partielles on peut dans un certain sens caractériser leurs propriétés. Comme $J_s \subseteq J_{s'}$, $s' > s$, on en déduit que lorsque s croît, la suite de sommes partielles $\varphi_s = \Sigma\varphi_j$ a un ordre de petitesse par rapport à h de plus en plus grand si ord φ n'existe pas pour $\varphi = \sum_{i\in J} \varphi_i$.

Définition. On dira qu'une série D-asymptotique $\varphi = \sum_{j\in J} \varphi_j$ est *équivalente à* 0 si pour tout entier s

$$\sum_{j\in J_s} \varphi_j = O_D(h^s).$$

Remarque. Si $J_s = \varnothing$, on admettra que $\sum_{j\in J_s} \varphi_j = 0$.

L'ensemble $\overset{\circ}{\mathscr{R}}_D$ des séries asymptotiques faiblement équivalentes à 0 est un *idéal* de l'algèbre $\mathscr{R}_D$ ainsi qu'il résulte des définitions exhibées. Donc, $\overset{\circ}{\mathscr{R}}_D$ est muni de façon naturelle d'une relation d'équivalence et l'on écrira $\varphi \sim \psi$ si $\varphi - \psi \in \overset{\circ}{\mathscr{R}}_D$. On démontre sans peine que des séries D-asymptotiques équivalentes sont de même ordre, c'est-à-dire que $\varphi \sim \psi$ entraîne ord φ = ord ψ.

Si $\varphi \in \mathscr{R}_D / \overset{\circ}{\mathscr{R}}_D$, la série $\psi = \varphi - \sum_{j\in J \operatorname{ord}\varphi + 1/2} \varphi_j$ est telle que ord $\psi >$ ord φ.

La définition (p. 523) du chapitre VI permet de représenter la somme $\sum_{j\in J \operatorname{ord}\varphi + 1/2} \varphi_j$ sous la forme

$$\sum_{j\in J_{\operatorname{ord}\varphi + 1/2}} \varphi_j = \sum_{k=k_1}^{k_2} h^{k/2} C_k(\alpha);$$

en outre parmi les termes de ce développement il en existe un qui est tel que ord φ = ord $(h^{k/2} C_{k'}(\alpha))$. Donc, pour toute série D-asymptotique φ non équivalente à 0, il existe un $k' = \min k$ et un $m[\varphi] = h^{k/2} C_{k'}(\alpha)$, où $C_{k'}(\alpha)$ est une fonction différentiable, tels que ord $m[\varphi]$ = ord φ.

Définition. La fonction $m[\varphi]$ s'appelle *monôme principal de la série D-asymptotique* φ, et le nombre k', *type* de φ.

Une série formelle $\varphi \in \mathscr{R}$ non D-asymptotique peut l'être localement. Cette circonstance est importante pour l'étude des opérateurs canoniques sur une variété lagrangienne à germe complexe.

Définition. Une série formelle $\varphi = \sum_{j\in J} \varphi_j$ est *localement asymptotique* en un point α_0 s'il existe une fonction $e(\alpha) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ identiquement égale à 1

dans un voisinage de α_0 et telle que la série $e\varphi \overset{\text{déf}}{=} \sum_{j\in J} e_j(\alpha)\varphi_j(\alpha, h)$ soit D-asymptotique.

L'étude des opérateurs canoniques sur une variété lagrangienne implique celle de l'action des opérateurs différentiels sur des séries asymptotiques. Signalons que les opérateurs différentiels ne sont pas invariants sur l'espace des séries D-asymptotiques équivalentes à 0 et, par suite, les séries $L\varphi$ et $L\psi$, où L est un opérateur différentiel et φ, ψ des séries faiblement équivalentes, peuvent ne pas être faiblement équivalentes.

Définition. On dira qu'une série D-asymptotique faiblement équivalente à zéro $\varphi = \sum_{j\in J} \varphi_j \sim 0$ est *équivalente à* 0 et on notera $\varphi \approx 0$ si pour tout indice multiple s on a

$$\sum_{j\in J} \left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^s \varphi_j \sim 0.$$

L'ensemble $\tilde{\tilde{\mathscr{R}}}_D$ des séries équivalentes à 0 est un idéal de l'algèbre $\mathscr{R}_D$ et de plus $\tilde{\tilde{\mathscr{R}}} \subset \tilde{\mathscr{R}}_D$. Définissons une relation d'équivalence sur $\tilde{\mathscr{R}}_D$ en posant $\varphi \approx \psi$ si et seulement si $\varphi - \psi \in \tilde{\tilde{\mathscr{R}}}_D$. On a donc la proposition suivante: *si* $\varphi \approx \psi$, *alors pour tout opérateur différentiel* $A \in \mathscr{P}$ *on a* $\operatorname{ord} A\varphi = \operatorname{ord} A\psi$ *et de plus l'opérateur* A *est défini sur l'algèbre quotient* $\mathscr{R}_D/\tilde{\tilde{\mathscr{R}}}_D$. Par ailleurs, on traitera les opérateurs de $\mathscr{P}$ comme des opérateurs dans $\mathscr{R}_D/\tilde{\tilde{\mathscr{R}}}_D$. Tout ce qui a été dit ci-dessus sur l'équivalence des séries formelles se généralise aux séries localement D-asymptotiques. On écrira $\varphi \overset{z}{\approx} \psi$ si les séries $e_{\alpha_0}\varphi \approx e_{\alpha_0}\psi$, où $e_{\alpha_0} \in C_0^\infty$ et est identiquement égal à 1 dans un voisinage de α_0.

Une importante classe d'opérateurs dans $\mathscr{R}_D$ préservant l'ordre des séries est la classe des opérateurs préservant le monôme principal des séries asymptotiques, c'est-à-dire des opérateurs tels que $\operatorname{ord}(A\varphi - \varphi) > \operatorname{ord}\varphi$.

Définition. On dira qu'un opérateur A dans $\mathscr{R}_D$ est *quasi identique* si, pour tout $\varphi \in \mathscr{R}_D$, il existe un entier k, type de φ, tel que

$$m[A\varphi] = m[\varphi] + h^k O_D(h^{\operatorname{ord}\varphi + 1/2 - k}).$$

Parallèlement aux opérateurs dans $\mathscr{R}_D$ nous étudierons les séries formelles d'opérateurs susceptibles d'engendrer un opérateur dans $\mathscr{R}_D$.

Définition. On dira qu'une série opératorielle formelle $L = \sum L_j$ est un *opérateur D-asymptotique* si pour toute série $\varphi = \sum_{k\in K} \varphi_k \in \mathscr{R}_D$, la série

$$L\varphi \overset{\text{déf}}{=} \sum_{(j,k)\in J\times K} L_j\varphi_k$$

est D-asymptotique et $L\varphi \approx 0$ pour tout $\varphi \approx 0$.

Citons un exemple d'opérateur D-asymptotique.

Exemple. Soit la fonction vectorielle

$$\beta_I = -C_I^{-1}(w_{\bar{I}}, z_I) \quad \text{où} \quad C_I = \frac{\partial \{q_I + z_I, p_{\bar{I}} + w_{\bar{I}}\}}{\partial \alpha}$$

Alors l'opérateur

$$L_I \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{|j|=0}^{\infty} \frac{\beta_I^j}{j!} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\right)^j$$

est D-asymptotique.

Remarque. Toutes les définitions relatives à l'algèbre $\mathscr{R}_h$ des séries h-asymptotiques s'étendent à l'algèbre $\mathscr{R}_D$ des séries D-asymptotiques à cette différence près que la majoration $O_D(h^s)$ est remplacée par une majoration de la norme des fonctions dans l'espace $C_k^l(\mathbf{R}^n)$.

2. Contournement des foyers. Supposons que α_0 appartient à une variété lagrangienne à germe complexe et que $\alpha_0 \in \Omega \cap \Omega_I \cap \Gamma$. Supposons encore que sont remplies les conditions du théorème 5.1 du chapitre VI et que la fonction $\alpha(x)$ est solution de l'équation $q(\alpha) = x$. Supposons enfin que L_I est l'opérateur D-asymptotique de l'exemple précédent. Sous ces conditions on a

$$I(x_I, \xi_{\bar{I}}, h) = F_{x_{\bar{I}} \to \xi_{\bar{I}}} \left\{ e^{\frac{i}{h}\Phi(\alpha)} [J(\alpha)]^{-1/2} L\varphi(\alpha) \right\}_{\alpha = \alpha(x)} =$$

$$= (2\pi h)^{-m/2} e^{-\frac{\pi m}{4}} \int_{\mathbf{R}^m} e^{-\frac{i}{h}\langle x_{\bar{I}}, \xi_{\bar{I}} \rangle} \left\{ e^{\frac{i}{h}\Phi(\alpha)} [J(\alpha)]^{-1/2} L\varphi(\alpha) \right\}_{\alpha = \alpha(x)} dx_{\bar{I}},$$

où $[J(\alpha)]^{1/2} = [J(\alpha)]^{1/2} \exp\left(\frac{i}{2} \arg J(\alpha)\right)$, la fonction $\arg J(\alpha)$ est continue au voisinage de α_0 et le support de ψ contient un voisinage de α_0. On obtient une série h-asymptotique équivalente à $I(x_I, \xi_{\bar{I}}, h)$ en appliquant un opérateur D-asymptotique différentiel à φ.

Soit H le hamiltonien du contournement des foyers défini dans le théorème 5.1 du chapitre VI:

$$H = \frac{1}{2} \{ \langle p_{\bar{I}}, u^{-1} \varepsilon u p_{\bar{I}} \rangle + \langle q_{\bar{I}}, u^{-1} \varepsilon u q_{\bar{I}} \rangle \} \tag{1.1}$$

et soit $J(\alpha, t)$ le jacobien associé à l'opération de contournement des foyers lié à H.

On admettra que $\arg J(\alpha, t)$ vérifie les conditions suivantes:

(i) la fonction $\arg J(\alpha, t)$ est continue en t;

(ii) $J(\alpha, t) = |J(\alpha, t)| e^{i \arg J(\alpha, t)}$;

(iii) $\arg J(\alpha, 0) = \arg J(\alpha)$.

Théorème 1.1. *Sous les conditions ci-dessus, pour toute fonction* $\varphi(\alpha) \in C_0^\infty$ *dont le support contient un voisinage du point* α_0 *on a*

$$I(x_I, \xi_{\bar{I}}, h) \approx e^{\frac{i}{h}\Phi(\alpha) - \frac{i}{2}\arg J\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right) - \frac{i\pi\sigma}{2}} \left|J_I(\alpha)\right|^{-1/2} L_I v_I \varphi(\alpha)\big|_{\alpha = \alpha^I(x_I, \xi_{\bar{I}})}, \tag{1.2}$$

où $\alpha^I(x_I, \xi_{\bar{I}})$ *est la solution du système*

$$\begin{cases} q_I(\alpha) = x_I, \\ p_{\bar{I}}(\alpha) = \xi_{\bar{I}}, \end{cases}$$

σ *est le nombre de valeurs propres strictement négatives de* ε, $J_I = \det C_I$, et v_I *un opérateur différentiel quasi identique D-asymptotique.*

Remarque. Comme $J(\alpha, \pi/2) = (-1)^\sigma J_I(\alpha)$, la fonction $\left|J_I(\alpha)\right|^{1/2} \times e^{i/2[\arg J(\alpha, \pi/2) + \pi\sigma]}$ est une branche de $\sqrt{J_I(\alpha)}$.

La construction de la décomposition asymptotique de $I(x_I, \xi_{\bar{I}}, h)$ peut être ramenée à la détermination de la solution asymptotique du problème de Cauchy

$$\begin{cases} -ih\dfrac{\partial \psi}{\partial t} + H\left(-ih\dfrac{\partial}{\partial x}, x\right)\psi = 0, \\ \psi(x, 0) = \psi_0(x), \end{cases} \tag{1.3}$$

où H est le hamiltonien de l'opération de contournement des foyers. La solution du problème (1.3) est donnée par la formule

$$\psi(x, t) = \frac{e^{-\frac{i\pi m}{4} + \frac{i\pi\sigma}{2}}}{(2\pi h \cdot \sin t)^{m/2}} \int_{\mathbf{R}^m} e^{\frac{i}{h}(\sin t)^{-1}\left[H(y, x)\cos t - \langle x_{\bar{I}}, u^{-1}\varepsilon u y_{\bar{I}}\rangle\right]} \psi_0(x_I, y_{\bar{I}})\, dy_{\bar{I}}, \tag{1.4}$$

où m est le nombre d'éléments de l'ensemble $\bar{I}$. A noter que si ψ_0 est une série asymptotique, la formule (1.4) nous donne la solution asymptotique du problème (1.3).

En faisant $t = \pi/2$ dans (1.4), on obtient

$$\psi\left(x, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{e^{-\frac{i\pi m}{4} + \frac{i\pi\sigma}{2}}}{(2\pi h)^{m/2}} \int_{\mathbf{R}^m} e^{-\frac{i}{h}\langle x_{\bar{I}}, u^{-1}\varepsilon u y_{\bar{I}}\rangle} \psi_0(x_I, y_{\bar{I}})\, dy_{\bar{I}}.$$

Donc la fonction $I(x_I, \xi_{\bar{I}}, h)$ est confondue avec la solution du problème de Cauchy (1.3) si l'on pose

$$\psi_0(x) = \left[e^{-\frac{i\pi\sigma}{2} + \frac{i}{h}\Phi(\alpha) - \frac{i}{2}\arg J(\alpha)} \left|J(\alpha)\right|^{-1/2} L\varphi(\alpha)\right]_{\alpha = \alpha(x)} \tag{1.5}$$

et alors

$$I(x_I, \xi_{\bar{I}}, h) = \psi(x_I, u^{-1}\varepsilon u \xi_{\bar{I}}, \pi/2). \tag{1.6}$$

La voie la plus naturelle pour obtenir une solution asymptotique est la suivante: on commence par trouver une représentation asymptotique de la solution de cette équation, puis on prouve, en utilisant l'estimation *a priori*

de la solution du problème de Cauchy non homogène correspondant, que cette représentation est une solution exacte du problème envisagé.

Avant d'entamer la démonstration du théorème 1.1, nous allons produire quelques majorations des solutions de l'équation de Schrödinger correspondant à l'opération de contournement des foyers du hamiltonien.

Lemme 1.1. *Soient $\psi_0(x), f(x,t)$ des fonctions différentiables de $x \in \mathbf{R}^m$ et $t \in [0, \pi/2]$ et soit $\psi(x,t)$ la solution du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} -ih\dfrac{\partial \psi}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{m} \varepsilon_j \left[\left(-ih\dfrac{\partial}{\partial x} \right)^2 + x^2 \right] \psi(x,t) = f(x,t), \\ \psi(x,0) = \psi_0(x), \end{cases} \tag{1.7}$$

où $\varepsilon_j = \pm 1$.

Pour l assez grand, on a les majorations

(1) $\|\psi(x,t)\|_{C_x^l(\mathbf{R}_x^m)} \leqslant C_{k,l}(R)\, h^{-k-l-[m/2]} \left(\|\psi_0\|_{C^{k+l}} + h^{-1} \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant \pi/2} \|f(x,t)\|_{C^{k+l}} \right)$

sous réserve que $\psi_0(x) \equiv 0$ et $f(x,t) \equiv 0$ pour $|x| > R$;

(2) $$\|\psi(x,t)\|_{C_x^l(\mathbf{R}_x^m)} \leqslant C_{k,l}(t)\, h^{-\frac{m}{2}-k} \|\psi_0\|_{C^{l+k+m}_{l+k+m}}, \qquad t \in [0, \pi/2)$$

sous réserve que $\psi_0(x) \in S$ et $f(x,t) \equiv 0$. La fonction $C_{k,l}(t)$ est ici continue en t.

Démonstration. Supposons que $f = 0$. La solution du problème de Cauchy (1.7) s'écrit alors

$$\psi(x,t) = \frac{e^{-\frac{i\pi m}{4} + \frac{i\pi\sigma}{2}}}{(2\pi h \sin t)^{m/2}} \times$$

$$\times \int_{\mathbf{R}^m} \exp\left\{ \frac{i}{h \sin t} \left[\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j \left(\frac{x_j^2 + y_j^2}{2} \cos t - x_j y_j \right) \right] \right\} \psi_0(y)\, dy \overset{\text{déf}}{=}$$

$$\overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} e^{-\frac{i\pi m}{4} + \frac{i\pi\sigma}{2}} (h \sin t)^{-m/2}\, I[\psi_0]. \tag{1.8}$$

Introduisons les notations

$$\Phi(x, y, t) = \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j \left(\frac{x_j^2 + y_j^2}{2} \cos t - x_j y_j \right).$$

Les dérivées de la fonction $\Phi(x, y, t)$ satisfont alors l'équation

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_j} = \varepsilon_j (y_j \cos t - x_j) \tag{1.9}$$

et, par suite, $\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}=0$ pour $y=x/\cos t$. Posons

$$\Omega(x,t)=\left\{y\in\mathbf{R}^m:\left|y-\frac{x}{\cos t}\right|<\frac{|x|+1}{2\cos t}\right\}$$

Alors $\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}\neq 0$ pour $y\in\mathbf{R}^m\setminus\Omega(x,t)$ et l'intégrale

$$I_1[\psi_0]=\int\limits_{\mathbf{R}^m\setminus\Omega(x,t)}\exp\left\{\frac{i}{h\sin t}\Phi(x,y,t)\right\}\psi_0(y)\,dy$$

peut être intégrée par parties et transformée en la somme d'intégrales suivante:

$$I_1[\psi_0]=-i\int\limits_{\partial\Omega(x,t)}\exp\left(\frac{i}{h\sin t}\Phi(x,y,t)\right)\psi_0(y)\frac{\partial g}{\partial n}\,d\sigma+$$

$$+h\sin t\int\limits_{\mathbf{R}^m\setminus\Omega(x,t)}\exp\left(\frac{i}{h\sin t}\Phi(x,y,t)\right)L\psi_0(y)\,dy,$$

où

$$L\varphi(y)\overset{\text{déf}}{=}i\,\mathrm{div}_y\big(g(x,y,t)\,\varphi(y)\big),\quad g=\Phi_y|\Phi_y|^{-2},\tag{1.10}$$

$d\sigma$ est l'élément d'aire de la sphère $d\Omega(x,t)$ et $\dfrac{\partial}{\partial n}$ la dérivée normale extérieure. En intégrant M fois par parties, on trouve

$$I_1[\psi_0]=-i\int\limits_{\partial\Omega(x,t)}\exp\left\{\frac{i}{h\sin t}\Phi(x,y,t)\right\}\times$$

$$\times\sum_{l=0}^{M-1}\left[(h\sin t)^l\,l^l\psi_0(y)\right]\frac{\partial g}{\partial n}\,d\sigma+$$

$$+(h\sin t)^M\int\limits_{\mathbf{R}^m\setminus\Omega(x,t)}\exp\left\{\frac{i}{h\sin t}\Phi(x,y,t)\right\}L^M\psi_0(y)\,dy$$

Par un calcul simple on déduit de (1.9) et (1.10) que

$$|L^M\psi_0|\leqslant c(a)\,|y\cos t-x|^{-M}\sup_{|j|\leqslant M}\left|\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^j\psi_0(y)\right|$$

pour tous les x, y et t tels que $|y\cos t-x|\geqslant a>0$, où $c(a)$ est une constante

dépendant de a. On a donc la majoration suivante pour l'intégrale $I_1[\psi_0]$:

$$|I_1[\psi_0]| \leqslant \text{const}\left[\sum_{l=0}^{M-1} (h \sin t)^l (|x|+1)^{-l-1+\frac{m}{2}} \|\psi_0\|_{C^l(\Omega(x,t))} + \right.$$

$$\left. + (h \sin t)^M (|x|+1)^{-M} \int_{\mathbf{R}^m} \sup_{|j| \leqslant M} \left| \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^j \psi_0(y) \right| dy. \qquad (1.11)$$

D'autre part, l'intégrale

$$I_2[\psi_0] = I[\psi_0] - I_1[\psi_0] = \int_{\Omega(x,t)} \exp\left\{\frac{i}{h}\Phi(x, y, t)\right\} \psi_0(y)\, dy$$

se majore sans peine comme suit:

$$|I_2[\psi_0]| \leqslant \int_{\Omega(x,t)} |\psi_0(y)|\, dy \leqslant \text{const}\, |x|^m \sup_{y \in \Omega(xm\, t)} |\psi_0(y)|.$$

En combinant la majoration de $I_2[\psi_0]$ et la majoration (1.11), on obtient

$$|I[\psi_0]| \leqslant \text{const}\, (|x|+1)^{-M} \|\psi_0\|_{C^M_{M+m}}. \qquad (1.12)$$

En dérivant (1.8), on constate que $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^j \psi(x, t)$ peut être acquise comme la somme de termes de la forme

$$c(x, t)\, (h \sin t)^{-\frac{m}{2}-l} x^k I[y^n \psi_0],$$

où

$$\frac{1}{2}|j| \leqslant l \leqslant |j|, \quad |n| \leqslant 2l - |j|, \quad |k| = 2l - |n| - |j|$$

et $c(x, t)$ est une fonction différentiable. Donc, la majoration (2) résulte directement de (1.12).

Passons maintenant à la démonstration de la majoration (1). Etablissons-la pour de grands x. Mettons la solution du problème de Cauchy (1.7) sous la forme

$$\psi = \overline{\psi} + \overline{\overline{\psi}},$$

où $\overline{\psi}$ et $\overline{\overline{\psi}}$ sont les solutions du problème de Cauchy (1.7) respectivement pour $f=0$ et $\psi_0=0$. Si $|x| \geqslant 2R+1$, alors $\operatorname{supp}\psi_0 \subset \Omega(x, t)$ et par suite $I_2[\psi_0]=0$. D'autre part,

$$|I_1[\psi_0]| \leqslant \text{const}\, (h \sin t)^M |x|^{-M} \|\psi_0\|_{C^M},$$

donc, pour $|x| \geqslant 2R+1$, on a la majoration

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^j \overline{\psi}(x, t)\right| \leqslant \text{const}\, (h \sin t)^{M-\frac{m}{2}-|j|} |x|^{|j|-M} \|\psi_0\|_{C^M}. \qquad (1.13)$$

La solution $\overline{\overline{\psi}}$ du problème de Cauchy (1.7) qui vérifie la condition initiale nulle peut être acquise sous la forme

$$\overline{\overline{\psi}}(x, t)=\frac{i}{h}\int_0^t \psi(x, t, \tau)\, d\tau,$$

où $\psi(x, t, \tau)$ est la solution du problème de Cauchy suivant:

$$-ih\frac{\partial \psi}{\partial t}+\sum_{j=1}^{m}\frac{\varepsilon_j}{2}\left[\left(-ih\frac{\partial}{\partial x}\right)^2+x^2\right]\psi=0,$$

$$\psi(x, t, \tau)_{t=\tau}=f(x, \tau).$$

Or $\psi(x, t, \tau)$ est justiciable d'une majoration identique à (1.13) dans laquelle il faut remplacer $\overline{\psi}$ par ψ, donc en intégrant le second membre de (1.13) par rapport à τ on obtient pour $|x|\geqslant 2R+1$ la majoration suivante:

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^j\overline{\overline{\psi}}(x, t)\right|\leqslant$$

$$\leqslant C_{M,j}(R)\, h^{M-\frac{m}{2}-|j|-1}\, t^{M-\frac{m}{2}-|j|+1}\,|x|^{|j|-M}\max_{0\leqslant t\leqslant \pi/2}\|f(x, t)\|_{C^M(\mathbf{R}_x^m)},$$

$$M>\frac{m}{2}+|j|-1.$$

De cette majoration et de l'inégalité (1.13), on déduit la majoration suivante pour les dérivées de la solution du problème de Cauchy (1.7) pour $|x|\geqslant 2R+1$:

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^j\overline{\overline{\psi}}(x, t)\right|\leqslant\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^j\overline{\psi}\right|+\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^j\overline{\overline{\psi}}\right|\leqslant$$

$$\leqslant C_{M,j}(R)h^{M-\frac{m}{2}-|j|}|x|^{|j|-M}\left(\|\psi_0\|_{C^M}+\max_t\|f\|_{C^M(\mathbf{R}_x^m)}\right). \qquad (1.14)$$

Ce qui prouve la majoration (1) pour $|x|\geqslant 2R+1$.

On sait que la solution du problème (1.7) satisfait l'inégalité

$$\|\psi\|_{L_2(\mathbf{R}_x^m)}\leqslant\|\psi_0\|_{L_2}+\frac{1}{h}\int_0^t\|f(x, \tau)\|_{L_2(\mathbf{R}_x^m)}d\tau. \qquad (1.15)$$

En posant $\psi^{(j)}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^j\psi$, on établit sans peine que la fonction $\psi^{(j)}$ est solution de l'équation (1.7) dont le second membre est une combinaison linéaire des fonctions $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^j f$, $\psi^{(l)}$ et $x_s\psi^{(p)}$, où $|l|=|j|-2$, $|p|=|j|-1$,

$s=1, 2, \ldots, n$. Grâce à (1.15) et au théorème d'immersion de Sobolev, on obtient pour $\psi^{(j)}$

$$\|\psi^{(j)}\|_{L_2(\mathbf{R}^n_x)} \leqslant \text{const}\, h^{-|j|}\left(\|\psi_0\|_{C^{|j|+\left[\frac{n}{2}\right]}} + h^{-1} \max_{0\leqslant t\leqslant \pi/2} \|f\|_{C^{|j|+\left[\frac{n}{2}\right]}(\mathbf{R}^n_x)}\right). \quad (1.16)$$

Prouvons la formule (1.16) par récurrence sur $|j|$. Pour $|j|=0$, cette formule résulte directement de (1.15), puisque toute fonction φ dont le support est contenu dans une boule $\overline{\Omega}_R \subset \mathbf{R}^n$ de rayon R vérifie l'inégalité

$$\|\varphi\|_{L_2(\mathbf{R}^n)} \leqslant \|\varphi\|_C \cdot V_R^{1/2},$$

où V_R est le volume de la sphère Ω_R. Supposons que la majoration (1.16) est valable pour tous les $|j| \leqslant N$. Etablissons la majoration (1.16) pour $\psi^{|k|}$ où $|k|=N+1$. Comme ψ_0 et f ont par hypothèse des supports compacts, de ce qui précède il s'ensuit les inégalités :

$$\left\|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k \psi_0\right\|_{L_2} \leqslant \text{const}\, \|\psi_0\|_{C^{N+1}}, \qquad \left\|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k f\right\|_{L_2} \leqslant \text{const}\, \|f\|_{C^{N+1}},$$

qui entraînent pour $|l|=N-1$, $|p|=N$

$$\|\psi^{(l)}\|_{L_2} \leqslant \text{const}\, h^{1-N}\left(\|\psi_0\|_{C^{N+\left[\frac{n}{2}\right]}} + h^{-1} \max_{0\leqslant t\leqslant \pi/2} \|f\|_{C^{N+\left[\frac{n}{2}\right]}(\mathbf{R}^n_x)}\right)$$

et pour $|p|=N$

$$\|x_s \psi^{(p)}\|_{L_2(\mathbf{R}^n_x)} \leqslant \text{const}\, h^{-N}\left(\|\psi_0\|_{C^{N+\left[\frac{n}{2}\right]}} + \frac{1}{h}\max_t \|f\|_{C^{N+\left[\frac{n}{2}\right]}(\mathbf{R}^n_x)}\right).$$

En se servant de ces majorations, de la formule (1.15) et de la remarque ci-dessus relativement au problème de Cauchy dont la solution est la fonction $\psi^{(k)}$, on obtient l'inégalité

$$\|\psi^{(k)}\|_{L_2(\mathbf{R}^n_x)} \leqslant \text{const}\, h^{-N-1}\left(\|\psi_0\|_{C^{N+\left[\frac{n}{2}\right]+1}} + \frac{1}{h}\max_t \|f\|_{C^{N+\left[\frac{n}{2}\right]+1}(\mathbf{R}^n_x)}\right)$$

dont la validité entraîne celle de (1.16) pour tout j.

De (1.16), en tenant compte du théorème d'immersion de Sobolev et en posant $M=N+\left[\frac{m}{2}\right]+1$ dans (1.14), on obtient pour tout indice multiple j et pour tous les $x \in \mathbf{R}^m$ la majoration

$$|\psi^{(j)}(x, t)| \leqslant \text{const}\, h^{-\left(|j|+\left[\frac{m}{2}\right]+1\right)}\left(\|\psi_0\|_{C^{|j|+2\left[\frac{m}{2}\right]+1}} + h^{-1}\max_t \|f\|_{C^{|j|+2\left[\frac{m}{2}\right]+1}}\right)$$

qui entraîne la majoration (1).

Corollaire 1.1. *Si $\psi_0(x, h)$ est une série h-asymptotique équivalente à 0, alors $F_{x_I \to \xi_{\bar{I}}}\psi_0 \approx 0$.*

Démonstration. Remarquons que

$$F_{x_{I'} \to \xi_{\bar{I}'}}\psi_0(x, h) = \psi(x_I, \xi_{\bar{I}}, \pi/2, h),$$

où $\psi(x, t, h)$ est la solution du problème (1.3) avec $\varepsilon=1$, $u=1$. La majoration (2) du lemme 1.1 nous donne $\psi(x_I, \xi_{\bar{I}}, \pi/2, h)\approx 0$.

Démonstration du théorème 1.1. Parallèlement à la solution exacte du problème (1.3) considérons la solution asymptotique que nous mettrons sous la forme

$$\psi_1(x, t, h)=e^{\frac{i}{h}S(x,t)}v(x, t, h). \tag{1.17}$$

En portant ψ_1 dans (1.3), on obtient

$$\left[-ih\frac{\partial}{\partial t}+H\left(-ih\frac{\partial}{\partial x}, x\right)\right]\psi_1=e^{\frac{i}{h}S}\{\hat{H}v+S_t v-ihv_t\},$$

où l'opérateur $\hat{H}$ est défini par la formule

$$\hat{H}=H(S_x, x)-ih\left[\frac{1}{2}\operatorname{tr}(H_{pp}S_{xx})+\left\langle H_p(S_x, x), \frac{\partial}{\partial x}\right\rangle\right]-\frac{h^2}{2}\operatorname{tr}\left(H_{pp}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right).$$

Soient $(\Lambda_t^n, r_t^n)=(g_H^t\Lambda^n, (dg_H^t)r^n)$ une variété lagrangienne à germe complexe, $\Phi(\alpha, t)$ une phase sur Λ_t^n et $\Pi: (\alpha, t)\to(x, t)$ un difféomorphisme correspondant à une zone non singulière. Posons $S=\Phi\circ\Pi^{-1}$. Comme prouvé au chapitre VI, la fonction $S(x, t)$ est solution de l'équation de Hamilton-Jacobi à dissipation

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H(S_x, x)\overset{\text{déf}}{=}g(x, t)=O_{S_2}(h^{3/2}).$$

En tenant compte de cette équation, on obtient l'équation de transport suivante pour v:

$$v_t+\langle H_p(S_x, x), v_x\rangle+\left[\frac{1}{2}\operatorname{tr}(H_{pp}S_{xx})+A\right]v\approx 0, \tag{1.18}$$

où

$$A=\frac{i}{h}g(x, t)-\frac{ih}{2}\operatorname{tr}\left(H_{pp}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\in\mathscr{P}.$$

D'après le théorème 6.2 du chapitre VI, la solution D-asymptotique de l'équation (1.18) peut être mise sous la forme

$$v=|J(\alpha, t)|^{-1/2}e^{-\frac{i}{2}\arg J(\alpha, t)}L\sum_{j=0}^{\infty}(I\delta)^j v_0(\alpha), \tag{1.19}$$

où $\delta\in\mathscr{P}$. Pour satisfaire la condition initiale $\psi_1|_{t=0}\approx\psi_0$, où ψ_0 est définie par la formule (1.6), on posera

$$v_0(\alpha)=e^{-\frac{i\pi}{2}\sigma}\varphi(\alpha).$$

Remarquons que $\beta(\alpha, \pi/2)=\beta_I(\alpha)$, $J(\alpha, \pi/2)=(-1)^\sigma J_I(\alpha)$ et que l'opérateur L se transforme en L_I pour $t=\dfrac{\pi}{2}$

Introduisons les notations: $\Phi\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right)=\Phi_I(\alpha)$ et $q\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right)=$ $=\{q_I(\alpha), u^{-1}\varepsilon up_{\bar{I}}(\alpha)\}$. On obtient alors pour $t=\frac{\pi}{2}$ et $x=\{q_I(\alpha), u^{-1}\varepsilon up_{\bar{I}}(\alpha)\}$ l'expression suivante pour $\psi_1(x, t, h)$:

$$\psi_1(q(\alpha, \pi/2), \pi/2, h)=e^{\frac{i}{h}\Phi(\alpha, \pi/2)}J_I^{-1/2}(\alpha)L_I v_I\varphi(\alpha),$$

où

$$v_I=\sum_{j=0}^{\infty}(I\hat{\delta})^j\big|_{t=\frac{\pi}{2}}$$

et

$$J_I^{-1/2}(\alpha) \stackrel{\text{déf}}{=} e^{-\frac{i}{2}[\arg J(\alpha, \pi/2)-\pi\sigma]}\left|J_I(\alpha)\right|^{-1/2}.$$

Remarquons que v_I est un opérateur D-asymptotique.

Pour achever la démonstration du théorème il nous faut montrer que $\psi_1(x, t, h)\approx\psi(x, t, h)$. Soit

$$\psi=\sum_{k\in K}\psi_k; \quad \psi_1=\sum_{k\in K_1}\psi_{1k}; \quad \Delta\psi=\psi-\psi_1$$

et soit

$$\psi^{(R)}=\sum_{k\in R}\psi_k; \quad \psi_1^{(R_1)}=\sum_{k\in R_1}\psi_{1k}; \quad \chi_{RR_1}=\psi^{(R)}-\psi_1^{(R_1)}$$

où R_1 et R sont des ensembles finis. Alors $\Delta\psi$ est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases}\left[-ih\dfrac{\partial}{\partial t}+H\left(-ih\dfrac{\partial}{\partial x}, x\right)\right]\Delta\psi=f,\\ \Delta\psi\big|_{t=0}\approx 0,\end{cases}$$

où le second membre de l'équation se représente sous la forme

$$f=e^{\frac{i}{h}\Phi(\alpha, t)}\rho(\alpha, t, h)\big|_{(\alpha, t)=\Pi^{-1}(x, t)},$$

ceci étant, $\rho\approx 0$ D-asymptotiquement. De là il s'ensuit que pour tous naturels k, l et N, il existe des ensembles finis $R'\subset K$ et $R_1'\subset K_1$ tels que

$$\left\|\chi_{R', R_1'}(x, 0, h)\right\|_{C^{k+l}(\mathbf{R}_x^n)}=O\left(h^{N+\left[\frac{m}{2}\right]+k+2}\right),$$

$$\left\|f_{R', R_1'}\right\|_{C^{k+l}(\mathbf{R}_x^n)}=O\left(h^{N+\left[\frac{m}{2}\right]+k+2}\right).$$

La fonction $\chi_{R', R_1'}$, qui est solution de l'équation

$$\left[-ih\frac{\partial}{\partial t}+H\left(-ih\frac{\partial}{\partial x}, x\right)\right]\chi_{R', R_1'}=f_{R', R_1'}(x, t, h),$$

vérifie en vertu du lemme 1.1 la majoration

$$\|\chi_{R', R_1'}\|_{C_t^k(\mathbf{R}_x^n)} = O(h^N).$$

Cette majoration exprime que $\Delta\psi \approx 0$ et $\psi \approx \psi_1$. Ce qui prouve le théorème.

Généralisons le théorème 1.1 au cas où α_0 n'appartient pas à l'intersection d'une carte non singulière avec les zones Ω et Ω_I. A cet effet, on se servira du fait que l'application $g_{H_0}^\tau$ associée au hamiltonien $H_0 = \frac{1}{2}(p^2+q^2)$ correspondant à un oscillateur harmonique envoie un voisinage de α_0 dans Λ^n dans un voisinage du point $g_{H_0}^\tau \alpha_0$ dans la variété $g_{H_0}^\tau \Lambda^n$, vérifiant les conditions du théorème 5.1 du chapitre VI pour τ assez petit.

Remarque. Soit $J(\alpha, \tau)$ le jacobien complexe associé à la famille $\{g_{H_0}^\tau \Lambda^n, dg_{H_0}^\tau r^n\}$. Choisissons la branche continue $\arg J(\alpha)$ de la phase de l'argument de $J(\alpha)$. Définissons $\arg J(\alpha, t)$ comme une fonction continue vérifiant les conditions

$$J(\alpha, \tau) = |J(\alpha, \tau)| \exp(i \arg J(\alpha, \tau)), \qquad \arg J(\alpha, 0) = \arg J(\alpha).$$

Considérons pour de petits $\tau > 0$ le hamiltonien H^τ de l'opération de contournement des foyers associé au point $g_{H_0}^\tau \alpha_0$ et au couple $(\bar{\Phi}, I)$, défini dans le théorème 5.1. Soit $J(\alpha, \tau, t)$ le jacobien complexe correspondant à l'opération de contournement des foyers de l'opérateur associé à H^τ. Définissons $\arg J(\alpha, \tau, t)$ comme une fonction continue en t satisfaisant les conditions

$$J(\alpha, \tau, t) = |J(\alpha, \tau, t)| \exp(i \arg J(\alpha, \tau, t)),$$
$$\arg J(\alpha, \tau, 0) = \arg J(\alpha, \tau).$$

Posons $\arg J_I(\alpha, \tau) = \arg J(\alpha, \tau, \pi/2) + \pi\sigma(\tau)$, où $\sigma(\tau)$ est le nombre de valeurs propres strictement négatives de la matrice $\varepsilon(\tau)$ qui figure dans le hamiltonien H^τ. Au § 3 on prouvera (lemme 3.5) l'existence de la limite

$$\lim_{\tau \to +0} \arg J_I(\alpha, \tau) \overset{\text{déf}}{=} \arg J_I(\alpha) \tag{1.22}$$

indépendamment du choix de H^τ. Adoptons la formule (1.22) pour définition de la valeur de l'argument de la phase de $J_I(\alpha)$.

Théorème 1.2. *Supposons qu'un point $\alpha_0 \in \Gamma$ appartient à l'intersection de deux cartes (u_γ, π_γ) et $(u_{\gamma'}, \pi_{\gamma'}^I)$. Alors, pour toute fonction $\varphi \in C_0^\infty$ dont le support contient un voisinage de α_0, on a l'équivalence des séries asymptotiques:*

$$F_{x_{\bar{I}} \to \xi_{\bar{I}}}\left[e^{\frac{i}{h}\Phi^\gamma(\alpha) - \frac{i}{2}\arg J(\alpha)} |J(\alpha)|^{1/2} L^\gamma \varphi(\alpha)\right]\Bigg|_{\alpha = \pi_\gamma^{-1}(x)} \approx$$
$$\approx \left[e^{\frac{i}{h}\Phi_I^\gamma(\alpha) - \frac{i}{2}\arg J_I(\alpha)} |J_I|^{-1/2} L_I^{\gamma'} v_{\bar{\Phi}, I}^{\gamma\gamma'} \varphi(\alpha)\right]\Bigg|_{\alpha = (\pi_{\gamma'}^I)^{-1}(x_I, \xi_{\bar{I}})}, \tag{1.23}$$

où l'opérateur D-asymptotique L_I^γ est défini par la formule

$$L_I^\gamma = \sum_{|j|=0} \frac{(\beta_\gamma^I)^j}{j!} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\right)^j;$$

$$\beta_\gamma^I = -C_I^{-1}[\{z_I, w_I^\gamma\} - \gamma'],$$

et $v_\Phi^{\gamma\gamma'}{}_I$ est un opérateur D-asymptotique quasi identique.

Pour prouver ce théorème, on aura besoin du

Lemme 1.2. *Supposons que $\alpha_0 \in \Gamma$ appartient à l'intersection des cartes (u_γ, π_γ^I) et $(u_{\gamma'}, \pi_{\gamma'}^I)$ dans la zone Ω_I. Alors pour toute fonction $\varphi \in C_0^\infty$ dont le support contient un voisinage du point α_0 et est contenu dans l'intersection des cartes indiquées, on a l'équivalence suivante de séries D-asymptotiques*

$$|J_I(\alpha)|^{-1/2} e^{\frac{i}{h}\Phi_I^\gamma(\alpha)} L_I^\gamma \varphi(\alpha)\big|_{\alpha=(\pi_\gamma^I)^{-1}(x)} \approx$$

$$\approx e^{\frac{i}{h}\Phi_I^{\gamma'}(\alpha)} |J_I(\alpha)|^{-1/2} L_I^{\gamma'} v_I^{\gamma,\gamma'} \varphi(\alpha)\big|_{\alpha=(\pi_{\gamma'}^I)^{-1}(x)}, \qquad (1.24)$$

où $v_I^{\gamma,\gamma'}$ est un opérateur D-asymptotique quasi identique, $[J_I(\alpha)]^{1/2}$ la branche différentiable de la racine du jacobien au voisinage de α_0.

Démonstration. Comme précédemment, il nous faut vérifier que (1.24) est valable pour le cas où la zone Ω_I n'est pas singulière. Nous prouverons tout d'abord l'équivalence locale

$$\exp\left\{\frac{i}{h}\Phi^\gamma(\sigma(\alpha))\right\} \overset{\alpha_0}{\approx} \exp\left\{\frac{i}{h}\Phi^{\gamma'}(\alpha)\right\} \psi(\alpha),$$

où $\sigma = \pi_\gamma \circ \pi_{\gamma'}^{-1}$ et ψ est une série D-asymptotique au point α_0 définie par la formule

$$\psi = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left[\frac{i}{h}\left(\Phi^\gamma(\sigma(\alpha)) - \Phi^{\gamma'}(\alpha)\right)\right]^j.$$

Les lemmes 3.3 et 3.4 du chapitre VI nous donnent

$$\sigma(\alpha) = \alpha + O_D(h^{1/2}) \quad \text{et} \quad \Phi^\gamma(\sigma(\alpha)) = \Phi^{\gamma'}(\alpha) + O_D(h^{3/2}).$$

Nous devons montrer que

$$\left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\right)^j \exp\left\{\frac{i}{h}\Phi^\gamma(\sigma(\alpha))\right\} \overset{\alpha_0}{\approx} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\right)^j \exp\left\{\frac{i}{h}\Phi^{\gamma'}(\alpha)\right\} \psi$$

pour tout indice multiple j. Procédons par récurrence sur $|j|$. Pour $|j| = 0$ la relation d'équivalence locale résulte de l'égalité

$$\exp\left\{\frac{i}{h}\Phi^\gamma(\sigma(\alpha))\right\} = \exp\left\{\frac{i}{h}\Phi^{\gamma'}(\alpha)\right\} \exp\left\{\frac{i}{h}[\Phi^\gamma(\sigma(\alpha)) - \Phi^{\gamma'}(\alpha)]\right\} =$$

$$= \sum_{j=0}^{N} \exp\left\{\frac{i}{h}\Phi^{\gamma'}(\alpha)\right\} \frac{1}{j!} \left\{\frac{i}{h}\left[\Phi^{\gamma}(\sigma(\alpha)) - \Phi^{\gamma'}(\alpha)\right]\right\}^{j} +$$

$$+ \frac{1}{(N+1)!} \left\{\frac{i}{h}\left[\Phi^{\gamma}(\sigma(\alpha)) - \Phi^{\gamma'}(\alpha)\right]\right\}^{N+1} \times$$

$$\times \exp\left\{\frac{i}{h}\left[\Phi^{\gamma'}(\alpha) + \theta(\alpha)\left(\Phi^{\gamma}(\sigma(\alpha)) - \Phi^{\gamma'}(\alpha)\right)\right]\right\},$$

où $0 < \theta(\alpha) < 1$. Pour pouvoir poursuivre la démonstration, on remarquera que

$$\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^{j} \exp\left\{\frac{i}{h}\Phi^{\gamma'}(\alpha)\right\}\psi = \exp\left\{\frac{i}{h}\Phi^{\gamma'}(\alpha)\right\}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{i}{h}\frac{\partial\Phi^{\gamma'}(\alpha)}{\partial\alpha}\right)^{j}\psi$$

et la formule

$$\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^{j} \exp\left\{\frac{i}{h}\Phi^{\gamma}(\sigma(\alpha))\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{i}{h}\Phi^{\gamma}(\sigma(\alpha))\right\}\psi\left(\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{i}{h}\frac{\partial\Phi^{\gamma}(\sigma(\alpha))}{\partial\alpha}\right)^{j} \cdot 1 \overset{\alpha_0}{\sim}$$

$$\overset{\alpha_0}{\sim} \exp\left\{\frac{i}{h}\Phi^{\gamma'}(\alpha)\right\}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{i}{h}\frac{\partial\Phi^{\gamma}(\sigma(\alpha))}{\partial\alpha}\right)^{j} 1$$

nous conduit à la relation

$$\left(\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{i}{h}\frac{\partial\Phi^{\gamma'}(\alpha)}{\partial\alpha}\right)^{j}\psi \overset{\alpha_0}{\approx} \psi\left(\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{i}{h}\frac{\partial\Phi^{\gamma}(\sigma(\alpha))}{\partial\alpha}\right)^{j} \cdot 1, \quad |j| \geqslant 1.$$

Cette relation nous conduit à son tour à la formule

$$\left(\frac{\partial}{\partial\alpha_s} + \frac{i}{h}\frac{\partial\Phi^{\gamma'}(\alpha)}{\partial\alpha_s}\right)\psi =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!}\left(\frac{i}{h}\right)^{r} \left\{r\left[\Phi^{\gamma}(\sigma(\alpha)) - \Phi^{\gamma'}(\alpha)\right]^{r-1}\left(\frac{\partial\Phi^{\gamma}(\sigma(\alpha))}{\partial\alpha_s} - \frac{\partial\Phi^{\gamma'}(\alpha)}{\partial\alpha_s}\right) +\right.$$

$$\left. + \frac{i}{h}\frac{\partial\Phi^{\gamma'}(\alpha)}{\partial\alpha_s}\left(\Phi^{\gamma}(\sigma(\alpha)) - \Phi^{\gamma'}(\alpha)\right)^{r}\right\} \overset{\alpha_0}{\approx}$$

$$\overset{\alpha_0}{\approx} \sum \frac{1}{r!}\left(\frac{i}{h}\right)^{r+1}\frac{\partial\Phi^{\gamma'}(\alpha)}{\partial\alpha_s}\left(\Phi^{\gamma}(\sigma(\alpha)) - \Phi^{\gamma'}(\alpha)\right)^{r} =$$

$$= \psi\left(\frac{\partial}{\partial\alpha_s} + \frac{i}{h}\frac{\partial\Phi^{\gamma'}(\alpha)}{\partial\alpha_s}\right) \cdot 1.$$

Supposons que la relation prouvée est valable pour tous les $|j|\leqslant N$. Soit $|k|=N+1$, $k_s\neq 0$. Alors

$$\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{i}{h}\frac{\partial\Phi^{\gamma'}(\alpha)}{\partial\alpha}\right)^k\psi=$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial\alpha_s}+\frac{i}{h}\frac{\partial\Phi^{\gamma'}(\alpha)}{\partial\alpha_s}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{i}{h}\frac{\partial\Phi^{\gamma'}(\alpha)}{\partial\alpha}\right)^{k-1_s}\psi\overset{\alpha_0}{\approx}$$

$$\overset{\alpha_0}{\approx}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha_s}+\frac{i}{h}\frac{\partial\Phi^{\gamma'}(\alpha)}{\partial\alpha_s}\right)\left[\psi\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{i}{h}\frac{\partial\Phi^{\gamma}(\sigma(\alpha))}{\partial\alpha}\right)^{k-1_s}\cdot 1\right]\overset{\alpha_0}{\approx}$$

$$\overset{\alpha_0}{\approx}\psi\left[\frac{i}{h}\frac{\partial\Phi^{\gamma}(\sigma(\alpha))}{\partial\alpha_s}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{i}{h}\frac{\partial\Phi^{\gamma}(\sigma(\alpha))}{\partial\alpha}\right)^{k-1_s}\cdot 1+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial\alpha_s}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{i}{h}\frac{\partial\Phi^{\gamma}(\sigma(\alpha))}{\partial\alpha}\right)^{k-1_s}\cdot 1\right]=\psi\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{i}{h}\frac{\partial\Phi^{\gamma}(\sigma(\alpha))}{\partial\alpha}\right)^k\cdot 1,$$

ce qui prouve cette relation pour tous les j.

Poursuivons la démonstration du lemme. De la relation

$$[J(\sigma(\alpha))]^{-1/2}=[J(\alpha)]^{-1/2}(1+\chi(\alpha)),$$

où $\chi(\alpha)=O_D(h^{1/2})$, on obtient

$$[L^{\gamma}\varphi](\sigma(\alpha))\approx\sum_{|j|=0}^{\infty}\sum_{|k|=0}^{\infty}\sum_{l\leqslant k}\frac{[\sigma(\alpha)-\alpha]^k}{l!\,j!\,(k-l)!}\frac{\partial^{|l|}\beta_{\gamma}^j}{\partial\alpha^l}\frac{\partial^{|j+k-l|}\varphi}{\partial\alpha^{j+k-l}}\approx$$

$$\approx\sum_{|r|=0}^{\infty}\sum_{s\leqslant r}\sum_{|l|=0}^{\infty}\frac{[\sigma(\alpha)-\alpha]^{l+s}}{l!\,s!\,(r-s)!}\frac{\partial^{|l|}\beta^{r-s}}{\partial\alpha^l}\frac{\partial^{|r|}\varphi}{\partial\alpha^r}\approx$$

$$\approx\sum_{|r|=0}^{\infty}\frac{1}{r!}[\sigma(\alpha)-\alpha+\beta_{\gamma}(\sigma(\alpha))]^r\frac{\partial^{|r|}\varphi}{\partial\alpha^r}\overset{\text{déf}}{=}L'\varphi.$$

Soit $R^{\gamma'}$ un opérateur différentiel D-asymptotique défini par la formule

$$R^{\gamma'}=\sum_{|j|=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\left(\sum_{|k|=1}^{\infty}\mathscr{P}_k(\beta_{\gamma'})\right)^j\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^j,$$

où $\{\mathscr{P}_k\}$ est la suite des polynômes du lemme 6.4 du chapitre VI. Le lemme 6.5 du chapitre VI nous dit que

$$L^{\gamma'}R^{\gamma'}\psi\approx\psi$$

pour toute série D-asymptotique ψ dont le support est contenu dans un voisinage assez petit du point α_0. Posons

$$v^{\gamma,\gamma'} = R^{\gamma'}\psi(1+\chi)L'.$$

Il nous reste ainsi à prouver que $v^{\gamma,\gamma'}$ est un opérateur quasi identique. Pour le montrer on remarquera que l'opérateur $L'-L^{\gamma'}$ élève l'ordre

En effet, pour toute fonction $\varphi \in C_0^\infty$ dont le support appartient à un voisinage de α_0, on a

$$(L'-L^{\gamma'})\varphi(\alpha) = \sum_{|r|=0}^{\infty} \frac{1}{r!}\{[\sigma(\alpha)-\alpha+\beta_\gamma(\sigma(\alpha))]^r - [\beta_{\gamma'}(\alpha)]^r\}\frac{\partial^{|r|}\varphi(\alpha)}{\partial\alpha^r}$$

Le lemme 3.3 du chapitre VI nous donne

$$\sigma(\alpha)-\alpha+\beta_\gamma(\sigma(\alpha))-\beta_{\gamma'}(\alpha) = O_D(h)$$

et par suite

$$[\sigma(\alpha)-\alpha+\beta_\gamma(\sigma(\alpha))]^r - [\beta_{\gamma'}(\alpha)]^r = O_D(h^{\frac{r+1}{2}}).$$

Donc, $\operatorname{ord}[(L'-L^{\gamma})\varphi(\alpha)] \geqslant \frac{1}{2} + \operatorname{ord}\varphi(\alpha)$ et la proposition annoncée résulte de l'identité

$$v^{\gamma,\gamma'} = R^{\gamma'}L^{\gamma'} + R^{\gamma'}(L'-L') + R^{\gamma'}(\psi-1+\chi\psi)L',$$

en remarquant que χ et $\psi-1$ élèvent l'ordre, $R^{\gamma'}$ et $L^{\gamma'}$ ne le diminuent pas et $R^{\gamma'}L^{\gamma'}$ est un opérateur quasi identique. Ce qui prouve le lemme.

Démonstration du théorème 1.2. Pour la commodité de la démonstration introduisons les notations suivantes. Pour toute série h-asymptotique ψ_0 posons $R_t\psi_0(x,h) = \psi(x,t,h)$, où la fonction $\psi(x,t,h)$ est la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} -ih\dfrac{\partial\psi}{\partial t} + \left[\dfrac{x^2}{2} - h^2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\psi = 0, & (1.25) \\ \psi|_{t=0} = \psi_0(x,h). & (1.26) \end{cases}$$

Supposons par ailleurs que $R_t^{\text{as}}\psi_0(x,h) = \psi_1(x,t,h)$ est la solution asymptotique du problème de Cauchy (1.25), (1.26) avec une condition initiale spéciale

$$\psi_0(x,h) = e^{\frac{i}{h}\Phi^{\gamma}(\alpha)}|J(\alpha)|^{-1/2}\, e^{-\frac{i}{2}\arg J(\alpha)} L^{\gamma}\varphi(\alpha,h)|_{\alpha=\pi_\gamma^{-1}(x)}$$

correspondant à la carte (u_γ, π_γ). La solution asymptotique de ce problème est de la forme

$$\psi_1(x,t,h) = e^{\frac{i}{h}\Phi^{\gamma}(\alpha,t)-\frac{i}{2}\arg J(\alpha,t)}|J(\alpha,t)|^{-1/2} L^{\gamma}\sum_{j=0}^{\infty}(I\delta)^j\varphi(\alpha,h)|_{\alpha=\alpha^{\gamma}(x,t)},$$

où $\alpha^{\gamma}(x,t)$ est solution de l'équation $q(\alpha,t)+\gamma(\alpha,t)=x$, $\delta \in \mathscr{P}$ et Φ^{γ}, J et L^{γ} les mêmes que dans le chapitre VI. L'opérateur R_t^{as} ainsi défini associe à

la série h-asymptotique

$$\psi_\tau(x,h)=\left[e^{\frac{i}{h}\Phi_I^\gamma(\alpha,\tau)-\frac{i}{2}\arg J_I(\alpha,\tau)}\left|J_I(\alpha,\tau)\right|^{-1/2}L_I^{\gamma'}\left|g^\tau_{H_0\Lambda^n}\varphi(\alpha,h)\right.\right]_{\alpha=\alpha_\gamma^{I\prime}(x,\tau)},$$

où $\alpha_\gamma^{I\prime}(x,\tau)$ est solution du système

$$q_I(\alpha,\tau)-\gamma_I'(\alpha,\tau)=x_I,$$
$$p_{\bar I}(\alpha,\tau)+\gamma_{\bar I}'(\alpha,\tau)=x_{\bar I},$$

la solution asymptotique de l'équation (1.25) avec la condition initiale $\psi|_{t=\tau}\approx\psi_\tau$. Soit F la h^{-1}-transformation de Fourier du $\bar I$-ième groupe de variables. Alors, pour toute série D-asymptotique χ dont le support contient un voisinage du point $g^\tau_{H_0}\alpha_0\in g^\tau_{H_0}\Lambda^n$, on a

$$F\psi(x,\tau,h)\approx F_{\text{as}}\psi(x,\tau,h),$$

où

$$\psi(x,\tau,h)=e^{\frac{i}{h}\Phi(\alpha,\tau)-\frac{i}{2}\arg J(\alpha,\tau)}\left|J(\alpha,\tau)\right|^{-1/2}L(\tau)\,\chi(\alpha)\big|_{\alpha=\alpha(x,\tau)}$$

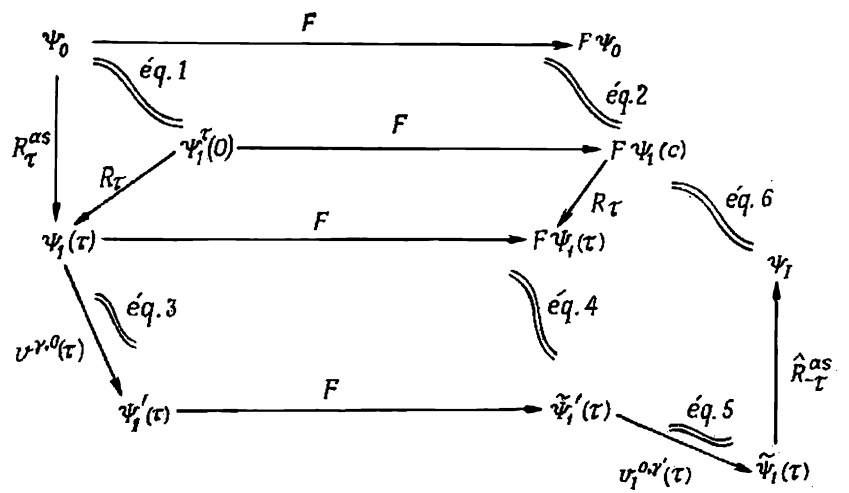
et l'opérateur F_{as} est défini par la formule

$$F_{\text{as}}\psi(x,\tau,h)\overset{\text{déf}}{=}e^{\frac{i}{h}\Phi(\alpha,\tau)-\frac{i}{2}\arg J_I(\alpha,\tau)}\left|J_I(\alpha,\tau)\right|^{-1/2}L_I(\tau)\,v_I(\tau)\,\chi(\alpha)\big|_{\alpha=\alpha^I(x,t)}.$$

Les opérateurs $L(\tau)$, $L_I(\tau)$ et $v_I(\tau)$ se définissent naturellement en fonction de $(g^\tau_{H_0}\Lambda^n,\ dg^\tau_{H_0}r^n)$.

Désignons enfin par $r_I^{\gamma,\gamma'}(\tau)$ l'opérateur qui associe à la série asymptotique du premier membre de (1.24) la série du second membre, φ étant une fonction quelconque dont le support contient un voisinage du point $g^\tau_{H_0}\alpha_0$.

Pour prouver le théorème considérons le diagramme:



Pour ψ_0 nous avons pris la série

$$\psi_0(x)=e^{\frac{i}{h}\Phi^\gamma(\alpha)-\frac{i}{2}\arg J(\alpha)}|J(\alpha)|^{-1/2}L^\gamma\varphi(\alpha)\big|_{\alpha=\pi_\gamma^{-1}(x)}.$$

Le résultat annoncé résulte du fait que $F\psi_0\approx\psi_I$. Les relations d'équivalence qui figurent dans le diagramme découlent des propositions suivantes:

éq. 1 du lemme 1.1,
éq. 2 de éq. 1 et du lemme 1.1,
éq. 3 du lemme 1.1,
éq. 4 de éq. 3 et du corollaire 1.1,
éq. 5 du lemme 1.2,
éq. 6 de éq. 4, éq. 5 et du lemme 1.1.

Ce qui achève la démonstration du théorème.

Remarque. Soit $\dfrac{\partial}{\partial l}=\left(\dfrac{\partial}{\partial l_1},\ldots,\dfrac{\partial}{\partial l_n}\right)$ un ensemble de champs de vecteurs complexes commutables sur u_γ linéairement indépendants en tout point. Le lemme 1.2 et les théorèmes 1.1 et 1.2 restent en vigueur si l'on pose

$$J_I(\alpha)=\frac{D(q_I+z_I,\,p_{\bar I}+w_{\bar I})}{Dl}=\det\frac{\partial\{q_I+z_I,\,p_{\bar I}+w_{\bar I}\}}{\partial l}. \tag{1.27}$$

§ 2. Formules de commutation du hamiltonien à l'exponentielle complexe

Dans ce paragraphe on établira les formules de commutation du hamiltonien à l'opérateur multiplicatif $\exp\left\{\dfrac{i}{h}S\right\}$.

Soient $x=(x_1,\ldots,x_n)$ un ensemble d'opérateurs de multiplication par des variables indépendantes x_i, définis dans l'échelle $\{H^k(\mathbf{R}^n)\}$ d'espaces de Sobolev de domaine de définition commun $D=C_0^\infty$, et $p=(p_1,\ldots,p_n)$ un ensemble de générateurs définis sur le même domaine et dans la même échelle par la formule $p_j=-ih\dfrac{\partial}{\partial x_j}$, où h est un paramètre >0.

Nous admettrons que la fonction

$$\mathscr{H}(x,p)\in\mathscr{B}_\infty(\mathbf{R}^{2n})\overset{\text{déf}}{=}\bigcap_{s=0}^{\infty}\mathscr{B}_s(\mathbf{R}^{2n}),\quad x\in\mathbf{R}^n,\quad p\in\mathbf{R}^n,$$

et que la fonction $S(x)$ est indéfiniment dérivable, de support borné et telle que $\operatorname{Im}S(x)\geqslant 0$. Pour hamiltonien nous prendrons l'opérateur $\mathscr{H}\left(\begin{matrix}2 & 1\\ x, & p\end{matrix}\right)$ de symbole $\mathscr{H}(x,p)$. Considérons d'abord les deux cas particuliers: $\operatorname{Re}S=0$ et $\operatorname{Im}S=0$.

Lemme 2.1. *Sous les conditions imposées ci-dessus à* $\mathscr{H}(x, p)$ *et à* $S(x)$ *et si* $\operatorname{Re} S = 0$, *alors pour tout naturel* k *on a la formule*

$$\mathscr{H}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ x, & p \end{pmatrix} e^{\frac{i}{h}S\binom{1}{x}} = \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant k-1} \frac{(-ih)^{|\alpha|}}{\alpha!} \times$$

$$\times \left(\frac{\partial^{|\alpha|} e^{\frac{i}{h}S\binom{2}{x}}}{\partial x^\alpha}\right)\left(\frac{\partial^{|\alpha|}\mathscr{H}}{\partial p^\alpha}\right)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ x, & p \end{pmatrix} + (-ih)^k r_k(S), \qquad (2.1)$$

où l'opérateur $r_k(S)$ *est continu dans chaque* H^l $(l \geqslant 0)$ *et*

$$\| r_k(S) \|_{H^l \to H^l} \leqslant C_{k,l}\, h^{-\frac{k+l}{2}}. \qquad (2.2)$$

Démonstration. En appliquant la formule d'interversion de l'ordre d'action des opérateurs du § 2 de l'Introduction, on obtient sans peine (2.1) et la formule suivante pour $r_k(S)$:

$$r_k(S) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{|\alpha| = k-1 \\ \alpha_{j+1} = \ldots = \alpha_n = 0}} \left\{ \frac{1}{\alpha!} \left[\!\!\left[\frac{\partial^k e^{\frac{i}{h}S}}{\partial x^\alpha \partial x_j} \right]\!\!\right]^{2} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial p^\alpha} \frac{\delta}{\delta p_j} \mathscr{H}\right)\begin{pmatrix} 4 & 1 & & 1 & 3 & & 3 \\ x, & p_1, & \ldots, & p_j, & p_j, & & p_n \end{pmatrix} \right\} \qquad (2.3)$$

Le corollaire 1.1 du chapitre VI entraîne

$$\left\| \frac{\partial^k e^{\frac{i}{h}S}}{\partial x^\alpha \partial x_j} \right\|_{C^1(\mathbb{R}^n)} \leqslant \text{const} \cdot h^{-\frac{k+l}{2}}.$$

Donc, en désignant par A l'opérateur de multiplication par $\dfrac{\partial^k e^{\frac{i}{h}S}}{\partial x^\alpha \partial x_j}$ de H^l dans H^l, on trouve que

$$\| A \| \leqslant \text{const} \cdot h^{-\frac{k+l}{2}}.$$

La majoration (2.2) résulte de là et de la majoration

$$\left\| {}^{2}Af\begin{pmatrix} 4 & 1 & & 1 & 3 & & 3 \\ x, & p_1, & \ldots, & p_j, & p_j, & \ldots, & p_n \end{pmatrix} \right\|_{H_l \to H_l} \leqslant \text{const} \ \| A \|_{H^l \to H^l} \| f \|_{\mathscr{B}_l}$$

qui est valable pour tout $f \in \mathscr{B}_\infty$.

Pour prouver le lemme 2.1 pour le cas où $\operatorname{Im} S = 0$, nous aurons besoin des opérateurs différentiels non linéaires $P^{(l)}_{\alpha,B}$ que nous définirons comme suit: si $\dfrac{\partial S}{\partial x}(x_0) = 0$, alors $P^{(l)}_{\alpha,\beta}(S)|_{x=x_0}$ se définissent à partir de la formule

$$e^{-\frac{i}{h}S(x)}\left(-ih\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} e^{\frac{i}{h}S(x)}(x-x_0)^{\beta}\big|_{x=x_0}=\sum_{l=0}^{|\alpha|}(-ih)^l\alpha!\,\beta!\,P^{(l)}_{\alpha,\beta}(S)\big|_{x=x_0}. \quad (2.4)$$

Dans le cas général, on a

$$P^{(l)}_{\alpha,\beta}(S)\big|_{x=x_0}=P^{(l)}_{\alpha,\beta}(S_0)\big|_{x=x_0},$$

où

$$S_0(x)=S(x_0)-\left\langle x-x_0,\frac{\partial S}{\partial x}(x_0)\right\rangle$$

En particulier,

$$P^{(0)}_{0,0}(S)=1,$$
$$P^{(1)}_{\alpha,\beta}(S)=0 \quad \text{si } |\alpha|=1,\ |\beta|=0 \quad \text{où } |\alpha|=2,\ |\beta|=1,$$
$$P^{(1)}_{\alpha,\beta}(S)=\langle\alpha,\beta\rangle \quad \text{si } |\alpha|=|\beta|=1,$$
$$P^{(1)}_{\alpha,\beta}(S)=\frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^{\alpha}S}{\partial x^{\alpha}} \quad \text{si } |\alpha|=2.$$

Lemme 2.2. *Si $\mathscr{H}(x,\xi)\in\mathscr{B}_{\infty}(\mathbf{R}^{2n})$ et $S(x)$ est une fonction réelle positive indéfiniment dérivable à support borné, alors pour tout k naturel, on a*

$$\mathscr{H}\left(\begin{matrix}3 & 2\\ x, & p\end{matrix}\right) e^{\frac{i}{h}s\binom{1}{x}}=e^{\frac{i}{h}S(x)}\left\{\sum_{l=0}^{k-1}(-ih)^l\Phi_l(S)+h^k\bar{r}_k(S)\right\}, \quad (2.5)$$

où l'opérateur

$$\bar{r}_k(S)\in\mathrm{Hom}(H^{s+k},H^s) \text{ pour tout } s\in\mathbf{R}$$

et les opérateurs $\Phi_l(S)$ sont définis par la formule

$$\Phi_l(S)=\sum_{0\leqslant|\beta|\leqslant l}\frac{\partial^{|\alpha|}\mathscr{H}}{\partial p^{\alpha}}\left(x,\frac{\partial S}{\partial x}\right)P^{(l)}_{\alpha,\beta}(S)\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^{\beta}} \quad (2.6)$$

En particulier, $\Phi_0(S)=\mathscr{H}\left(x,\dfrac{\partial S}{\partial x}\right)$.

Démonstration. La formule de commutation d'un opérateur différentiel à une exponentielle nous donne

$$\mathscr{H}\left(\begin{matrix}3 & 2\\ x, & p\end{matrix}\right) e^{\frac{i}{h}s\binom{1}{x}}=e^{\frac{i}{h}s\binom{2}{x}}\,\mathscr{H}\left(\begin{matrix}2 & 1\\ x, & \frac{\partial S}{\partial x}+p\end{matrix}\right),$$

donc la formule (2.5) sera prouvée lorsqu'on aura montré que

$$\mathscr{H}\left(\begin{matrix}2 & 1\\ x, & \frac{\partial S}{\partial x}+p\end{matrix}\right)=\sum_{l=0}^{k-1}(-ih)^l\Phi_l(S)+h^k\bar{r}_k(S). \quad (2.5')$$

Au premier membre de (2.5′) figure un opérateur $\mathscr{H}\left(\overset{2}{C}, \overset{1}{A+B}\right)$ pour lequel on a établi au § 2 de l'Introduction une formule de développement en série de Newton, qui en dimension n pour le symbole $\mathscr{H}(x,p)$ s'écrit

$$\mathscr{H}\left(\overset{2}{C}, \overset{1}{A+B}\right) =$$

$$= \mathscr{H}\left(\overset{2}{C}, \overset{1}{A}\right) + \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{1\leqslant j_1\leqslant\ldots\leqslant j_l\leqslant n} \overset{2}{B}_{j_1}\ldots\overset{2l}{B}_{j_l} \frac{\delta^l \mathscr{H}}{\delta_{j_1}\ldots\delta p_{j_l}} \left(\overset{2l+2}{C}, \overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{1}{A}_{j_1}, \overset{3}{A}_{j_1}, \ldots, \overset{2l-1}{A}_{j_l}, \overset{2l+1}{A}_{j_l}, \ldots, \overset{2l+1}{A}_n\right) + \sum_{1\leqslant j_1\leqslant\ldots\leqslant j_k\leqslant n} \overset{2}{B}_{j_1}\ldots\overset{2k}{B}_{j_k} \frac{\delta^k \mathscr{H}}{\delta p_{j_1}\ldots\delta p_{j_k}} \left(\overset{2k+2}{C}, \overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{1}{A}_{j_1}, \overset{3}{A}_{j_1}, \ldots, \overset{2k-1}{A}_{j_k}, \overset{2k+1}{A}_{j_k} + \overset{2k+1}{B}_{j_k}, \ldots, \overset{2k+1}{A}_n + \overset{2k+1}{B}_n\right)$$

Ici $C=x$, $A=\dfrac{\partial S}{\partial x}$ et $B=-ih\dfrac{\partial}{\partial x}$. (On remarquera que l'opérateur A_j+B_j commute à A_s+B_s pour tous les $1\leqslant j, s\leqslant n$.) Posons

$$\tilde{\Phi}_l(S) = \sum_{1\leqslant j_1\leqslant\ldots\leqslant j_l\leqslant n} \overset{2}{\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}}\ldots\overset{2l}{\frac{\partial}{\partial x_{j_l}}} \times \times \frac{\delta^l \mathscr{H}}{\delta p_{j_1}\ldots\delta p_{j_l}} \left(\overset{1}{S}_{x_1}, \ldots, \overset{1}{S}_{x_{j_1}}, \overset{3}{S}_{x_{j_1}}, \ldots, \overset{2l-1}{S}_{x_{j_l}}, \overset{2l+1}{S}_{x_{j_l}}, \ldots, \overset{2l+1}{S}_{x_n}\right)$$

et montrons que $\tilde{\Phi}_l(S)=\Phi_l(S)$, ce qui prouvera la formule (2.6).

Modifions l'ordre d'action des opérateurs $\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ et $\dfrac{\partial S}{\partial x_j}$ dans $\tilde{\Phi}_l(S)$ de telle sorte que les opérateurs différentiels agissent les premiers. Puisque le commutateur $\left[\dfrac{\partial}{\partial x_j}, \dfrac{\partial S}{\partial x_k}\right]=\dfrac{\partial^2 S}{\partial x_j \partial x_k}$, la formule d'interversion de l'ordre d'action des opérateurs du § 2 de l'Introduction nous donne

$$\tilde{\Phi}_l(S) = \sum_{\substack{l\leqslant|\alpha|\leqslant 2l \\ 0\leqslant|\beta|\leqslant l}} \frac{\partial^\alpha \mathscr{H}}{\partial p^\alpha}\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) Q^{(l)}_{\alpha,\beta}(S) \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta.$$

Il nous reste donc à prouver que $Q^{(l)}_{\alpha,\beta}(S)=P^{(l)}_{\alpha,\beta}(S)$.

Remarquons que les formules établies pour les besoins de la démonstration du lemme sont valables pour $\mathscr{H}=p^\alpha$ aussi. Donc

$$\overset{2}{p^\alpha}\, e^{\frac{i}{h}S\left(\overset{1}{x}\right)} = e^{\frac{i}{h}S(x)} \sum_{l=0}^{|\alpha|} (-ih)^l \tilde{\Phi}_l(S),$$

où

$$\tilde{\Phi}_l(S)=\sum_{\substack{l\leqslant|\gamma|\leqslant 2l\\ 0\leqslant|\delta|\leqslant l}}\frac{\alpha!}{(\alpha-\gamma)!}(S_x)^{\alpha-\gamma}\,Q^{(l)}_{\gamma,\delta}\,\frac{\partial^{|\delta|}}{\partial x^\delta}.$$

D'où l'égalité opératorielle

$$e^{-\frac{i}{h}S(x)}\left(-ih\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha e^{\frac{i}{h}S(x)}-\sum_{l=0}^{|\alpha|}(-ih)^l\,\tilde{\Phi}_l(S).$$

En comparant cette égalité à la formule (2.4), on obtient d'une part en vertu de (2.4)

$$\sum_{l=0}^{|\alpha|}(-ih)^l\,\tilde{\Phi}_l(S)\,(x-x_0)^\beta\big|_{x=x_0}=\sum_{l=0}^{|\alpha|}(-ih)^l\,\alpha!\,\beta!\,P^{(l)}_{\alpha,\beta}(S)\big|_{x=x_0},$$

et de l'autre, en vertu de la définition de $\tilde{\Phi}_l(S)$ pour $\mathscr{H}=p^\alpha$, en admettant que $\left.\dfrac{\partial S}{\partial x}\right|_{x=x_0}=0$:

$$\sum_{l=0}^{|\alpha|}(-ih)^l\,\tilde{\Phi}_l(S)\,(x-x_0)^B\big|_{x=x_0}=\sum_{l=0}^{|\alpha|}(-ih)^l\,\alpha!\,\beta!\;Q^{(l)}_{\alpha,B}(S)\big|_{x=x_0},$$

ce qui prouve le lemme.

Les lemmes prouvés permettent de généraliser la formule (2.5) en se dédouanant de la condition $\operatorname{Im}S=0$.

Théorème 2.1. *Pour toute fonction $\mathscr{H}\in\mathscr{B}_\infty(\mathbf{R}^{2n})$ et toute fonction $S\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ telle que $\operatorname{Im}S\geqslant 0$, on a la formule*

$$\mathscr{H}\left(\begin{matrix}3 & 2\\ x, & p\end{matrix}\right)e^{\frac{i}{h}S\binom{1}{x}}=e^{\frac{i}{h}S(x)}\sum_{k=0}^{N-1}(-ih)^k\Phi^{(N)}_k(S)+R_N(S),\qquad(2.9)$$

où N est un naturel quelconque et

$$\Phi^{(N)}_k(S)=\sum_{\substack{0\leqslant|\gamma|\leqslant 2(N-k)-1\\ k\leqslant|\alpha|\leqslant 2k\\ 0\leqslant|\beta|\leqslant k}}\frac{1}{\gamma!}\left(i\frac{\partial\operatorname{Im}S}{\partial x}\right)^\gamma\times$$

$$\times\frac{\partial^{|\alpha|+|\gamma|}}{\partial p^{\alpha+\gamma}}\left(x,\frac{\partial\operatorname{Re}S}{\partial x}\right)P^{(k)}_{\alpha,\beta}(S)\,\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^\beta},\qquad(2.10)$$

et de plus

$$\|R_N(S)\|_{H^{N+l}\to H^l}\leqslant c_{N,l}\,h^{N-\frac{3}{2}l},\qquad l=0,1,2,\ldots\qquad(2.11)$$

Démonstration. Posons $S_1 = \operatorname{Re} S$, $S_2 = \operatorname{Im} S$. La formule (2.1) établie dans le lemme 2.1 nous donne

$$\mathscr{H}\left(\begin{smallmatrix}3 & 2\\ x, & p\end{smallmatrix}\right) e^{-\frac{1}{h}S_2\left(\begin{smallmatrix}1\\ x\end{smallmatrix}\right)} \cdot e^{\frac{i}{h}S_1\left(\begin{smallmatrix}1\\ x\end{smallmatrix}\right)} = \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant 2N-1} \left\{ \frac{(-ih)^{|\alpha|}}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} e^{-\frac{1}{h}S_2\left(\begin{smallmatrix}3\\ x\end{smallmatrix}\right)}}{\partial x^\alpha} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\partial^{|\alpha|}\mathscr{H}}{\partial p^\alpha}\left(\begin{smallmatrix}3 & 2\\ x, & p\end{smallmatrix}\right) \cdot e^{\frac{i}{h}S_1\left(\begin{smallmatrix}1\\ x\end{smallmatrix}\right)} \right\} + R_{N,1}(S), \qquad (2.12)$$

ou $R_{N,1}(S) = (-ih)^{2N} r_{2N}(S_2) \cdot e^{\frac{i}{h}S_1(x)}$.

Utilisons maintenant la formule (2.5) en prenant pour hamiltonien l'opérateur $\dfrac{\partial^{|\alpha|}\mathscr{H}}{\partial p^\alpha}\left(\begin{smallmatrix}3 & 2\\ x, & p\end{smallmatrix}\right)$:

$$\frac{\partial^{|\alpha|}\mathscr{H}}{\partial p^\alpha}\left(\begin{smallmatrix}3 & 2\\ x, & p\end{smallmatrix}\right) e^{\frac{i}{h}S_1\left(\begin{smallmatrix}1\\ x\end{smallmatrix}\right)} =$$

$$= e^{\frac{i}{h}S_1(x)} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{k \leqslant |\gamma| \leqslant 2k} \sum_{0 \leqslant |\beta| \leqslant k} \left[(-ih)^k \frac{\partial^{|\alpha+\gamma|}\mathscr{H}}{\partial p^{\alpha+\gamma}}\left(x, \frac{\partial S_1}{\partial x}\right) \cdot P^{(p)}_{\gamma,\beta}(S_1) \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^\beta}\right] +$$

$$+ h^N \bar{r}_{N,\alpha}(S_1), \qquad (2.13)$$

où $\bar{r}_{N,\alpha}(S_1) \in \operatorname{Hom}(H^{s+N}, H^s)$ pour tout $s \in \mathbf{R}$.

En portant la formule (2.13) dans (2.12), on obtient

$$\mathscr{H}\left(\begin{smallmatrix}3 & 2\\ x, & p\end{smallmatrix}\right) e^{\frac{i}{h}S\left(\begin{smallmatrix}1\\ x\end{smallmatrix}\right)} =$$

$$= e^{\frac{i}{h}S} \sum_{k=0}^{N-1} (-ih)^k \sum_{\substack{0 \leqslant |\gamma| \leqslant k \\ k \leqslant |\alpha| \leqslant 2k \\ 0 \leqslant |\beta| \leqslant 2(N-k)-1}} \left\{ \frac{\partial^{|\alpha+\beta|}\mathscr{H}}{\partial p^{\alpha+\beta}}(x, S_{1x}) (iS_{2x})^\beta \times \right.$$

$$\left. \times Q_{k,\alpha,\beta,\gamma}(S)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\gamma \right\} + R_{N,1}(S) + R_{N,2}(S) + R_{N,3}(S), \qquad (2.14)$$

où $Q_{k,\alpha,\beta,\gamma}(S)$ est un polynôme des dérivées des fonctions S_1 et S_2 d'ordre $\leqslant k+1$

$$R_{N,2}(S) = \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant 2N-1} \frac{(-ih)^{|\alpha|+N}}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} e^{-\frac{1}{h}S_2}}{\partial x^\alpha} e^{\frac{i}{h}S_1} \bar{r}_{N,\alpha}(S_1), \qquad (2.15)$$

$R_{N,3}(S)$ se représente par une somme d'opérateurs de la forme

$$e^{\frac{i}{h}S(x)}\, h^k f(x) \left(\frac{\partial S_2}{\partial x}\right)^{\beta} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\gamma},$$

dans lesquels $f \in C_0^{\infty}$, $|\gamma| \leqslant N-1$, $k+\dfrac{|\beta|}{2} \geqslant N$.

Pour calculer $Q_{k,\alpha,\beta,\gamma}$ on se servira du procédé utilisé dans le lemme 2.2 pour $Q^{(k)}_{\alpha,\beta}$. Si l'on pose $\mathscr{H}(x,p)=p^{\delta}$, alors pour N assez grand, les opérateurs $R_{N,1}$, $R_{N,2}$ et $R_{N,3}$ disparaissent et l'on obtient

$$\overset{2}{p}{}^{\delta}\, e^{\frac{i}{h}S\binom{1}{x}} = e^{\frac{i}{h}S(x)} \sum_{k,\alpha,\beta,\gamma} \left[(-ih)^k \frac{\delta!}{(\delta-\alpha-\beta)!} \left(\frac{\partial S_1}{\partial x}\right)^{\delta-\alpha-\beta} \times \right.$$

$$\left. \times \left(i\frac{\partial S_2}{\partial x}\right)^{\beta} Q_{k,\alpha,\beta,\gamma}(S) \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\gamma} \right].$$

Appliquons cet opérateur à la fonction x^{ε}, où ε est un indice multiple. Supposons que $\left.\dfrac{\partial S_1}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$. Alors

$$\hat{p}^{\delta}\, e^{\frac{i}{h}S(x)}\, x^{\varepsilon}\Big|_{x=0} = e^{\frac{i}{h}S(x)} \sum_{k,\beta} (-ih)^k\, \delta!\, \varepsilon! \times$$

$$\times \left(i\frac{\partial S_2}{\partial x}\right)^{\beta} Q_{k,\delta-\beta,\beta,\varepsilon}(S)\Big|_{x=0} \qquad (2.16)$$

Signalons que la formule (2.8) est valable non seulement pour les S réels, mais dans le cas général aussi. La formule (2.8) s'écrit alors

$$\hat{p}^{\delta}\, e^{\frac{i}{h}S(x)}\, x^{\varepsilon}\Big|_{x=0} = e^{\frac{i}{h}S(x)} \sum_{k,\gamma} (-ih)^k \frac{\delta!\,\varepsilon!}{(\delta-\gamma)!} \left(i\frac{\partial S_2}{\partial x}\right)^{\delta-\gamma} p^{(k)}_{\gamma,\varepsilon}(S)\Big|_{x=0}. \qquad (2.8')$$

En comparant la formule obtenue à (2.16), on constate que

$$Q_{k,\alpha,\beta,\gamma} = \frac{1}{\beta!}\, P^{(k)}_{\alpha,\gamma}.$$

Pour achever la démonstration, il reste à établir la validité de la majoration (2.11).

Pour cela il faut estimer l'opérateur

$$R_N(S) = R_{N,1}(S) + R_{N,2}(S) + R_{N,3}(S).$$

Pour évaluer $R_{N,2}(S)$, considérons le terme principal de la somme du second membre de (2.15)

$$A \overset{\text{déf}}{=} h^{N+|\alpha|} \frac{\partial^{|\alpha|}\, e^{-\frac{1}{h}S_2}}{\partial x^{\alpha}} \cdot e^{\frac{i}{h}S_1}\, \bar{r}_{N,\alpha}(S_1).$$

Le lemme 2.2 entraîne

$$\|\tilde{r}_{N,\alpha}(S_1)\|_{H^{N+l}\to H^l} \leqslant \text{const}.$$

Dans le même temps $\|e^{\frac{i}{h}S_1}\|_{H^l\to H^l} \leqslant h^{-l}$ const et

$$\left\|\frac{\partial^{|\alpha|}\, e^{-\frac{1}{h}S_2}}{\partial \overline{x}^{\alpha}}\right\|_{H^l\to H^l} \leqslant \text{const}\, h^{-\frac{|\alpha|+l}{2}}$$

ce qui résulte de la démonstration du lemme 2.1. On a donc la majoration

$$\|A\|_{H^{N+l}\to H^l} \leqslant \text{const}\, h^{N-\frac{3}{2}l}$$

qui entraîne la majoration annoncée de l'opérateur $R_{N,2}$. Les opérateurs $R_{N,1}$ et $R_{N,3}$ se majorent de façon analogue. Ce qui achève la démonstration du théorème.

Pour établir les formules de commutation de l'opérateur canonique à l'exponentielle, il nous faut établir aussi la formule de commutation du hamiltonien $\mathscr{H}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ x, & p \end{pmatrix}$ à l'opérateur $F^{-1}_{\xi_I\to x_{\bar{I}}}\cdot e^{\frac{i}{h}S(\xi_I, x_{\bar{I}})}$, où l'opérateur $F^{-1}_{\xi_I\to x_{\bar{I}}}$ est la transformation inverse de Fourier par rapport au I-ième groupe de variables, c'est-à-dire que

$$F^{-1}_{\xi_I\to x_{\bar{I}}}\varphi(\xi_I, x_{\bar{I}}) = (2\pi h)^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbf{R}^m} e^{\frac{i}{h}\langle \xi_I, x_I\rangle}\varphi(\xi_I, x_{\bar{I}})\, d\xi_I,$$

où m est le nombre d'éléments de l'ensemble I_0.

Avant d'entamer la démonstration du théorème, définissons l'opérateur r_I :

$$r_I\varphi(x) = \varphi(-x_I, x_{\bar{I}}), \qquad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

et introduisons la notation

$$P^{I,I}_{\alpha,\beta} = (-1)^{|\beta_I|} r_I \circ P^{(I)}_{\alpha,\beta}\circ r_I.$$

Théorème 2.2. *Si l'on se place dans les conditions du théorème* 2.1, *pour tout N naturel on a la formule*

$$\mathscr{H}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ x, & p \end{pmatrix}\cdot F^{-1}_{\xi_I\to x_{\bar{I}}}\cdot e^{\frac{i}{h}S(\xi_I, x_{\bar{I}})}\varphi(\xi_I, x_{\bar{I}}) =$$

$$= F^{-1}_{\xi_I\to x_I} e^{\frac{i}{h}S(\xi_I, x_{\bar{I}})} \sum_{k=0}^{N-1} (-ih)^k \Phi^N_{k,I}(S)\varphi(\xi_I, x_{\bar{I}}) + R_N(S)\varphi(\xi_I, x_{\bar{I}}),$$

dans laquelle l'opérateur

$$\Phi^N_{k,I}(S) = \sum_{k\leqslant|\alpha|\leqslant 2k} \sum_{0\leqslant\beta\leqslant k} \sum_{\gamma\leqslant\beta,} \sum_{0\leqslant|\delta|\leqslant 2N-2k-1} \begin{Bmatrix} \beta_I! \\ \gamma!(\beta_I-\gamma)!\delta! \end{Bmatrix} \times$$

$$\times \frac{\partial^{|\alpha|+|\gamma|+|\delta|}\mathscr{H}}{\partial x_I^{\alpha_I+\delta_I}\partial p_{\bar{I}}^{\alpha_{\bar{I}}+\delta_{\bar{I}}}\partial p_I^{\gamma}}\left(-\frac{\partial S_1}{\partial \xi_I}, x_{\bar{I}}, \xi_I, \frac{\partial S_1}{\partial x_{\bar{I}}}\right)\times$$

$$\times P_{\alpha,\beta}^{k,I}(S)\left(-i\frac{\partial S_2}{\partial \xi_I}\right)^{\delta_I}\left(i\frac{\partial S_2}{\partial x_{\bar{I}}}\right)^{\delta_{\bar{I}}}\frac{\partial^{|\beta|-|\gamma|}}{\partial x_{\bar{I}}^{\beta_{\bar{I}}}\partial \xi_I^{\beta_I-\gamma}}\Bigg\}$$

L'opérateur $R_N(S)$ satisfait la majoration

$$\|R_N S\|_{H^{I,1}_{l,l+N}\to H^l} \leqslant c_{N,l}\cdot h^{N-\frac{5}{2}l}.$$

Démonstration. Signalons que la formule à démontrer peut se mettre sous la forme suivante:

$$\mathscr{H}\left(ih\frac{\partial}{\partial \xi_I}, {}^2x_{\bar{I}}, {}^1\xi_I, -ih\frac{\partial}{\partial x_{\bar{I}}}\right)\circ e^{\frac{i}{h}S(\xi_I, x_{\bar{I}})} =$$

$$= e^{\frac{i}{h}S(\xi_I, x_{\bar{I}})}\sum_{k=0}^{N-1}(-ih)^k\Phi_{k,I}^N(S)+\overline{R}_N(S), \qquad (2.17)$$

où $\overline{R}_N(S)=F_{x_I\to\xi_I}\circ R_N(S)$ et

$$\mathscr{H}\left(ih\frac{\partial}{\partial \xi_I}, {}^2x_{\bar{I}}, {}^1\xi_I, -ih\frac{\partial}{\partial x_I}\right) \overset{\text{déf}}{=} F_{\xi_I\to x_I}\circ\mathscr{H}\binom{2}{x}, {}^1p\Big)\circ F^{-1}_{\xi_I\to x_I}.$$

L'espace $H^{I,h}_{l,l}$ pouvant être plongé continûment dans l'espace $F_{x_I\to\xi_I}H^l$, l'inégalité

$$\|\overline{R}_N(S)\|_{H^{I,h}_{l,l+N}\to H^{I,h}_{l,l}} \leqslant c_{l,N}h^{N-\frac{5}{2}l} \qquad (2.18)$$

entraîne la majoration annoncée de $R_N(S)$.

Ainsi, la démonstration du théorème passe par celle des formules (2.17) et (2.18). Ces formules se prouvent en trois étapes.

(1) De la même manière qu'on a établi la formule (2.1) dans le lemme 2.1, on trouve que (2.17) se ramène à la forme

$$\mathscr{H}\left(ih\frac{\partial}{\partial \xi_I}, {}^2x_{\bar{I}}, {}^1\xi_I, -ih\frac{\partial}{\partial x_{\bar{I}}}\right)\circ e^{-\frac{1}{h}S_2(\xi_I, x_{\bar{I}})} =$$

$$= \sum_{\alpha|=0}^{k-1}\frac{(-ih)^\alpha}{\alpha!}(-1)^{|\alpha_I|}\frac{\partial^\alpha e^{-\frac{1}{h}S_2(\xi_I, x_{\bar{I}})}}{\partial \xi_I^{\alpha_I}\partial x_{\bar{I}}^{\alpha_{\bar{I}}}}\times$$

$$\times\frac{\partial^\alpha\mathscr{H}}{\partial x_I^{\alpha_I}\partial p_{\bar{I}}^{\alpha_{\bar{I}}}}\left(ih\frac{\partial}{\partial \xi_I}, {}^2x_{\bar{I}}, {}^1\xi_I, -ih\frac{\partial}{\partial x_{\bar{I}}}\right)+(-ih)^k r_k(S_2) \qquad (2.19)$$

dans laquelle l'opérateur $r_k(S_2)$ est défini par la formule

$$r_k(S_2)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{|\alpha|=k\neq 1}\left\{\frac{(-1)^{|\alpha_I|+\varepsilon_j}}{\alpha!}\left[\!\!\left[\frac{\partial^k e^{-\frac{1}{h}S_2(\xi_I,\,x_{\bar I})}}{\partial y^\alpha\,\partial y^j}\right]\!\!\right]^{3}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\frac{\delta}{\delta z_j}\,\overline{\mathscr{H}}\left(\overset{1}{\xi}_I,\ \overset{5}{x}_{\bar I},\ \overset{2}{z}_1,\dots,\ \overset{2}{z}_j,\ \overset{4}{z}_j,\dots,\ \overset{4}{z}_n\right)\right\},\qquad(2.20)$$

où

$$y=(p_I,\,x_{\bar I}),\quad \hat z=\left(ih\frac{\partial}{\partial\xi_I},\,-ih\frac{\partial}{\partial x_{\bar I}}\right),$$

$$\overline{\mathscr{H}}(y,\,z)=\mathscr{H}\left((z_I,\,y_{\bar I}),\,(y_I,\,z_{\bar I})\right),$$

$$\varepsilon_j=\begin{cases}1 & \text{si } j\in I,\\ 0 & \text{si } j\in\bar I\end{cases}$$

La formule (2.20) et le lemme 2.1 entraînent aussitôt la majoration

$$\left\|r_k(S_2)\right\|_{H^{l,h}_{l,l}\to H^{l,h}_{l,l}}\leqslant c_{k,l}\,h^{-\frac{k+l}{2}}.\qquad(2.21)$$

(2) En reproduisant la démonstration de la formule (2.9) du lemme 2.2, on trouve une formule identique à (2.9)

$$\mathscr{H}\left(ih\frac{\partial}{\partial\xi_I},\ \overset{2}{x}_{\bar I},\ \overset{1}{\xi}_I,\ -ih\frac{\partial}{\partial x_{\bar I}}\right)\circ e^{\frac{i}{h}S_1(\xi_I,\,x_{\bar I})}=$$

$$=e^{\frac{i}{h}S_1(\xi_I,\,x_{\bar I})}\left\{\sum_{l=0}^{k-1}(-ih)^l\,\Phi_{l,I}(S_1)+h^k\bar r_k(S_1)\right\},\qquad(2.22)$$

où l'opérateur $\bar r_k(S_1)\in\mathrm{Hom}(H^{I,h}_{l,l+k},\,H^{I,h}_{l,l})$, ainsi qu'il résulte du lemme 2.2, et les opérateurs $\Phi_{l,I}(S)$ sont définis par la formule

$$\Phi_{l,I}(S)=\sum_{l\leqslant|\alpha|\leqslant 2l}\sum_{0\leqslant|\beta|\leqslant l}\left\{\frac{\partial^{|\alpha|}\mathscr{H}}{\partial x_I^{\alpha_I}\partial p_{\bar I}^{\alpha_{\bar I}}}\left(-\frac{\partial S}{\partial\xi_I},\ \overset{3}{x}_{\bar I},\ \overset{1}{\xi}_I,\frac{\partial S}{\partial x_{\bar I}}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left[\!\!\left[P^{l,I}_{\alpha,\beta}(S)\right]\!\!\right]^{3}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_I}\right)^{\beta_I}\left(\frac{\partial}{\partial x_{\bar I}}\right)^{\beta_{\bar I}}\right\}.$$

En intervertissant l'ordre d'action des opérateurs ξ_I et $\dfrac{\partial}{\partial\xi_I}$ dans la dernière formule, on obtient

$$\Phi_{l,I}(S)=\sum_{|\alpha|=l}^{2l}\sum_{|\beta|=0}^{k}\sum_{\gamma\leqslant\beta_I}\left\{\frac{\beta_I!}{\gamma!\,(\beta_I-\gamma)!}\,\frac{\partial^{|\alpha|+|\gamma|}\mathscr{H}}{\partial x_I^{\alpha_I}\partial p_{\bar I}^{\alpha_{\bar I}}\partial p_I^{\gamma}}\times\right.$$

$$\times\left(-\frac{\partial S}{\partial \xi_I}, x_{\bar{I}}, \xi_{\bar{I}}, \frac{\partial S}{\partial x_{\bar{I}}}\right) P^{I,I}_{\alpha,\beta}(S)\,\frac{\partial^{|\beta|-|\gamma|}}{\partial x_I^{\beta_I}\partial \xi_I^{\beta_I-\gamma}}\Bigg\}. \tag{2.23}$$

(3) En reprenant maintenant la démonstration du théorème 2.1 et en remplaçant les formules (2.1) et (2.5) respectivement par les formules (2.19) et (2.20), on obtient une formule (2.17) identique à la formule (2.9), et l'analogue de la majoration (2.11) sera la majoration

$$\|\overline{R}_N(S)\|_{H^{I,h}_{l,l+N}\to H^{I,h}_{l,l}} \leqslant c_{N,l}\,h^{N-\frac{3}{2}l}.$$

Reste enfin à remarquer que pour toute fonction $f\in H^{I,h}_{l,l+N}$

$$|f\|_{H^{I,h}_{l,l+N}} \leqslant \text{const}\, h^{-l}\|f\|_{H^{I,1}_{l,l+N}}$$

ce qui prouve le théorème 2.2.

Corollaire. *Si les conditions du théorème 2.2 sont remplies, il existe un opérateur S_2-asymptotique $\hat{\mathscr{H}}$ tel que pour tout $\varphi\in C_0^\infty$*

$$\hat{\mathscr{H}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ x, & p\end{pmatrix} F^{-1}_{\xi_I\to x_I} e^{\frac{i}{h}S(\xi_I, x_{\bar{I}})}\varphi(\xi_I, x_{\bar{I}}) = F^{-1}_{\xi_I\to x_I} e^{\frac{i}{h}S(\xi_I, x_{\bar{I}})}\hat{\mathscr{H}}\varphi(\xi_I, x_{\bar{I}}). \tag{2.24}$$

Cette proposition découle directement du théorème 2.2 et de la définition d'un opérateur S_2-asymptotique. Signalons que la formule (2.24) reste en vigueur lorsque φ est une série S_2-asymptotique. Explicitons en conclusion l'opérateur $\hat{\mathscr{H}}$:

$$\hat{\mathscr{H}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ x, & p\end{pmatrix} F^{-1}_{\xi_I\to x_I} e^{\frac{i}{h}S(\xi_I, x_{\bar{I}})}\varphi(\xi_I, x_{\bar{I}}) \approx$$

$$\approx F^{-1}_{\xi_I\to x_I} e^{\frac{i}{h}S(\xi_I, x_{\bar{I}})} \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{|\alpha|=k}^{2k}\sum_{|\beta|=0}^{k}\sum_{\gamma\leqslant\beta_I}\sum_{|\delta|=0}^{\infty}\Bigg\{(-ih)^k \times$$

$$\times\frac{\beta_I!}{\gamma!(\beta_I-\gamma)!\,\delta!}\cdot\frac{\partial^{|\alpha|+|\gamma|+|\delta|}\mathscr{H}}{\partial x_I^{\alpha_I+\delta_I}\partial p_I^{\alpha_{\bar{I}}+\delta_{\bar{I}}}\partial p_I^{\gamma}}\times$$

$$\times\left(-\frac{\partial S_1}{\partial \xi_I}, x_{\bar{I}}, \xi_I, \frac{\partial S_1}{\partial x_{\bar{I}}}\right)P^{k,I}_{\alpha,\beta}(S)\cdot\left(-i\frac{\partial S_2}{\partial \xi_I}\right)^{\delta_I}\left(i\frac{\partial S_2}{\partial x_{\bar{I}}}\right)^{\delta_{\bar{I}}}\times$$

$$\times\frac{\partial^{|\beta|-|\gamma|}}{\partial x_I^{\beta_I}\partial \xi_I^{\beta_I-\gamma}}\varphi(\xi_I, x_{\bar{I}})\Bigg\} \overset{\text{déf}}{=} F^{-1}_{\xi_I\to x_I} e^{\frac{i}{h}S(\xi_I, x_{\bar{I}})}\hat{\mathscr{H}}\varphi(\xi_I, x_{\bar{I}}). \tag{2.25}$$

Exemple. Soit $\psi(\alpha)$ une fonction de C_0^∞ dont le support est contenu dans un γ-domaine u_γ de la zone $\Omega_{\bar{I}}$ d'une variété lagrangienne à germe

complexe. Soit X l'image de l'ensemble $\Gamma \cap \operatorname{supp}\psi$ par l'application $\alpha \to q(\alpha)$. Alors, pour toute fonction $\chi \in C_0^\infty$ dont le support est extérieur au domaine X on a

$$\chi(x) F^{-1}_{\xi_I \to x_I} \left[e^{\frac{i}{h}\Phi^\gamma_I(\alpha)} \psi(\alpha) \Big|_{\alpha=(\pi^I_\gamma)^{-1}(\xi_I, x_{\bar I})} \right] \approx 0.$$

En effet, en posant $S = \Phi^\gamma_I \circ (\pi^{\bar I}_\gamma)^{-1}$, $\varphi = \psi \circ (\pi^{\bar I}_\gamma)^{-1}$ et en se servant des formules (2.24) et (2.25), on obtient

$$\chi(x) F^{-1}_{\xi_I \to x_I} e^{\frac{i}{h} S(\xi_I, x_{\bar I})} \varphi(\xi_I, x_{\bar I}) \approx$$

$$\approx F^{-1}_{\xi_I \to x_I} e^{\frac{i}{h} S(\xi_I, x_{\bar I})} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k}^{2k} \sum_{|\beta|=0}^{k} \sum_{|\delta|=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-ih)^k}{\delta!} \times \right.$$

$$\times \frac{\partial^{|\alpha|+|\delta|}\chi}{\partial x^{\alpha+\delta}} \left(-\frac{\partial S_1}{\partial \xi_I}, x_{\bar I} \right) P^{k,I}_{\alpha,\beta}(S) \times$$

$$\left. \times \left(-i \frac{\partial S_2}{\partial \xi_I} \right)^\delta \frac{\delta^{|\beta|}}{\partial x^{\beta_{\bar I}}_{\bar I} \partial \xi^{\beta_I}_I} \varphi(\xi_I, x_{\bar I}) \right\}.$$

Il est évident que le support de chaque terme de la série asymptotique est le sous-ensemble $\operatorname{supp}\chi\left(-\frac{\partial S_1}{\partial \xi_I}(\xi_I, x_{\bar I}) \right) \varphi(\xi_I, x_{\bar I})$. Posons

$$\hat\chi(\alpha) = \chi\left(-\frac{\partial S_1}{\partial \xi_I}(p_I(\alpha) + \gamma_I(\alpha), q_{\bar I}(\alpha) + \gamma_{\bar I}(\alpha)), q_{\bar I}(\alpha) + \gamma_{\bar I}(\alpha) \right).$$

Il suffit de prouver que $\hat\chi(\alpha)\psi(\alpha)$ s'annule au voisinage de Γ. De la formule (3.3) du chapitre VI il résulte que $\hat\chi(\alpha) = \chi(q(\alpha) + f(\alpha))$, où $f(\alpha) = O_D(h^{1/2})$. Soit u un voisinage de l'ensemble X tel que $u \cap \operatorname{supp}\chi = \varnothing$; alors l'image réciproque de u par l'application $\alpha \to q(\alpha) + f(\alpha)$ est le voisinage de l'ensemble $\Gamma \cap \operatorname{supp}\psi$ sur lequel $\hat\chi$ est nulle.

§ 3. Variétés C-lagrangiennes et indice d'un germe

Supposons que M est une variété réelle de dimension n et f une application différentiable de M dans $\mathbf{C}^{2n}$, espace de phase complexe muni des coordonnées $P = (P_1, \ldots, P_n)$, $Q = (Q_1, \ldots, Q_n)$, définie par

$$P = P(\alpha), \quad Q = Q(\alpha),$$

où $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ sont des coordonnées locales sur M.

Introduisons les notations

$$P_\alpha = B = \left\| \frac{\partial P_i}{\partial \alpha_j} \right\|, \quad Q_\alpha = C = \left\| \frac{\partial Q_i}{\partial \alpha_j} \right\|, \quad C_I = \frac{\partial (Q_I, P_{\bar I})}{\partial \alpha}, \quad B_I = \frac{\partial (P_I, -Q_{\bar I})}{\partial \alpha}. \quad (3.1)$$

Définition. On dira qu'un point $\alpha_0 \in M$ est *C-lagrangien* pour l'application f si sont réalisées les conditions

(C1)

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} B(\alpha_0) \\ C(\alpha_0) \end{pmatrix} = n.$$

Autrement dit, M est localement plongé au point α_0 dans l'espace $\mathbf{C}^{2n}$, et l'espace tangent à M en α_0 est isomorphe à un espace réel à n dimensions.

(C2) Le crochet de Lagrange des fonctions $P(\alpha)$ et $Q(\alpha)$ est nul au point α_0, c'est-à-dire que

$$\left[\left\langle \frac{\partial P}{\partial \alpha_j}, \frac{\partial Q}{\partial \alpha_k} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial P}{\partial \alpha_k}, \frac{\partial Q}{\partial \alpha_j} \right\rangle\right]_{\alpha=\alpha_0} = 0$$

pour tous j, k.

(C3) La partie complexe de la forme quadratique

$$F(g) = (B(\alpha_0)g, \quad C(\alpha_0)g), \quad g \in \mathbf{C}^n \tag{3.2}$$

est positive.

Les conditions (C1) à (C3) sont visiblement indépendantes du choix des coordonnées locales.

Remarquons que la condition (C3) est équivalente à la condition :

(C3′) Pour un certain I la partie complexe de la forme quadratique

$$F_I(g) = (B_I(\alpha_0)g, \quad C_I(\alpha_0)g) \tag{3.3}$$

est positive.

On dit qu'un sous-ensemble d'une variété M est *C-lagrangien* s'il est composé de points C-lagrangiens.

Exemple. Tout sous-ensemble Γ d'une variété lagrangienne à germe complexe est C-lagrangien pour l'application

$$Q(\alpha) = q(\alpha) + z(\alpha), \quad P(\alpha) = p(\alpha) + w(\alpha). \tag{3.4}$$

En effet, (C1) et (C2) résultent immédiatement des définitions (p. 484) du chapitre VI. Il reste donc à vérifier la condition (C3′) pour tout point $\alpha \in \Gamma$. Posons $\mathscr{E}_I = B_I C_I^{-1}$, $\mathscr{E}_I = \mathscr{E}_I^{(1)} + i\mathscr{E}_I^{(2)}$, où $\mathscr{E}_I^{(1)}$ et $\mathscr{E}_I^{(2)}$ sont des matrices réelles. Soit $\alpha \in \Omega_I$, où $h_1, h_2 \in \mathbf{R}^n$. Alors

$$\operatorname{Im}(\mathscr{E}_I h, h) = -(\mathscr{E}_I^{(1)} h_1, h_2) + (\mathscr{E}_I^{(1)} h_2, h_1) + (\mathscr{E}_I^{(2)} h_1, h_1) + (\mathscr{E}_I^{(2)} h_2, h_2).$$

Les matrices $\mathscr{E}_I^{(1)}$ et $\mathscr{E}_I^{(2)}$ sont symétriques l'une de l'autre et la matrice $\mathscr{E}_I^{(2)}$ est définie positive de par la condition d'absorption. D'où

$$\operatorname{Im}(\mathscr{E}_I h, h) = (\mathscr{E}_I^{(2)} h_1, h_1) + (\mathscr{E}_I^{(2)} h_2, h_2) \geqslant 0;$$

en posant $g = C_I^{-1} h$, on trouve que

$$\operatorname{Im}(B_I g, C_I g) \geqslant 0.$$

Formulons et prouvons les corollaires élémentaires de la définition.

Lemme 3.1. *Si un point* α *de* M *est C-lagrangien, la matrice* $(B_I(\alpha)+itC_I(\alpha))$ *n'est pas dégénérée pour* $t>0$.

Démonstration. Supposons que le vecteur $g\neq 0$ et que $(B_I+itC_I)g=0$ pour un $t>0$. Alors $B_Ig=-itC_Ig$ et, par suite, $F(g)=-it\|C_Ig\|^2$. D'où $C_Ig=0$, puisque α est C-lagrangien. Mais alors $B_Ig=0$ aussi. Donc la condition (C1) est violée et α ne peut être C-lagrangien. Ce qui prouve le lemme.

Lemme 3.2. *Soit* $\alpha_0\in M$ *un point C-lagrangien pour l'application* $P=P(\alpha)$, $Q=Q(\alpha)$. *Soit* $H(p, q)$ *une forme quadratique réelle et supposons que les fonctions*

$$P=P(\alpha, t), \qquad Q=Q(\alpha, t) \tag{3.5}$$

sont les solutions du système hamiltonien

$$\begin{aligned} \dot{P}&=-H_q(P, Q),\\ \dot{Q}&=H_p(P, Q) \end{aligned} \tag{3.6}$$

qui satisfont les conditions initiales $P(\alpha, t)\big|_{t=0}=P(\alpha)$, $Q(\alpha, t)\big|_{t=0}=Q(\alpha)$. *Alors le point* α_0 *est C-lagrangien pour l'application* (3.5) *quel que soit* $t\in\mathbf{R}$.

Démonstration. Montrons tout d'abord que

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} P_\alpha(\alpha_0, t)\\ Q_\alpha(\alpha_0, t)\end{pmatrix}=n.$$

Soient $P(\alpha, \beta)$ et $Q(\alpha, \beta)$ des fonctions linéaires en $\beta\in\mathbf{R}^n$ vérifiant les conditions

$$P(\alpha, 0)=P(\alpha),\ Q(\alpha, 0)=Q(\alpha), \qquad \det\frac{\partial(P, Q)}{\partial(\alpha, \beta)}\bigg|_{\alpha=\alpha_0}\neq 0.$$

Supposons maintenant que $P(\alpha, \beta, t)$, $Q(\alpha, \beta, t)$ sont les solutions du système (3.6) qui vérifient les conditions initiales $P(\alpha, \beta, 0)=P(\alpha, \beta)$, $Q(\alpha, \beta, 0)=Q(\alpha, \beta)$. Posons

$$J(\alpha, \beta, t)=\det\frac{\partial\big(P(\alpha, \beta, t),\ Q(\alpha, \beta, t)\big)}{\partial(\alpha, \beta)}.$$

En appliquant la méthode qui a servi à prouver le lemme 2.2 du chapitre VI, on trouve que $\dfrac{\partial}{\partial t}J(\alpha, \beta, t)=0$. Donc $J(\alpha_0, 0, t)\neq 0$ et la condition (C1) est réalisée pour l'application (3.5).

Prouvons ensuite que la condition (C2) a également lieu pour l'application (3.5). Puisque les matrices $P_\alpha(\alpha, t)$ et $Q_\alpha(\alpha, t)$ vérifient les équations

$$\begin{aligned} \dot{Q}_\alpha&=H_{pp}P_\alpha(\alpha, t)+H_{pq}Q_\alpha(\alpha, t),\\ \dot{P}_\alpha&=-H_{qp}P_\alpha(\alpha, t)-H_{qq}Q_\alpha(\alpha, t), \end{aligned} \tag{3.7}$$

un calcul immédiat nous montre que $\dfrac{d}{dt}\{Q, P\}_{j,k}=0$.

Vérifions enfin la condition (C3), c'est-à-dire prouvons que

$$\operatorname{Im}\left(P_\alpha(\alpha_0, t)h,\ Q_\alpha(\alpha_0, t)h\right) \geqslant 0.$$

Les équations (3.6) nous donnent

$$\frac{d}{dt}\left(P_\alpha(\alpha, t)h,\ Q_\alpha(\alpha, t)h\right) =$$

$$= \left(P_\alpha(\alpha, t)h,\ H_{pp}P_\alpha(\alpha, t)h\right) - \left(Q_\alpha(\alpha, t)h,\ H_{qq}Q_\alpha(\alpha, t)h\right).$$

Donc la dérivée $\dfrac{d}{dt}\left(P_\alpha(\alpha, t)h,\ Q(\alpha, t)h\right)$ est réelle en tant que somme de deux formes quadratiques qui sont hermitiennes. D'où il vient que $\operatorname{Im}\left(P_\alpha(\alpha, t)h,\ Q_\alpha(\alpha, t)h\right)$ ne dépend pas de t. Ceci achève la démonstration, puisque $\operatorname{Im}\left(P_\alpha(\alpha, 0)h,\ Q_\alpha(\alpha, 0)h\right) \geqslant 0$ pour tout h.

Etudions une question importante pour la suite qui est rattachée au choix de la branche correspondante de l'argument de la phase du jacobien. Soit $\alpha_0 \in M$ un point C-lagrangien pour les applications $Q = Q(\alpha)$, $P = P(\alpha)$ et supposons que sont remplies les conditions

$$J(\alpha) \stackrel{\text{déf}}{=} \left.\frac{DQ}{D\alpha}\right|_{\alpha=\alpha_0} \neq 0, \qquad J_I(\alpha) \stackrel{\text{déf}}{=} \left.\frac{D(Q_I, P_{\bar{I}})}{D\alpha}\right|_{\alpha=\alpha_0} \neq 0.$$

Si le hamiltonien $H = \dfrac{1}{2}\left(p_{\bar{I}}^2 + q_{\bar{I}}^2\right)$, les solutions du système (3.6) qui vérifient les conditions initiales $P(\alpha, 0) = P(\alpha)$, $Q(\alpha, 0) = Q(\alpha)$ sont visiblement les suivantes :

$$\begin{aligned} Q_{\bar{I}}(\alpha, t) &= Q_{\bar{I}}(\alpha)\cos t + P_{\bar{I}}(\alpha)\sin t; \qquad Q_I(\alpha, t) = Q_I(\alpha), \\ P_{\bar{I}}(\alpha, t) &= P_{\bar{I}}(\alpha)\cos t - Q_{\bar{I}}(\alpha)\sin t; \qquad P_I(\alpha, t) = P_I(\alpha). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Supposons que $\arg J(\alpha_0)$ a été choisi. Définissons $\arg J_I(\alpha_0)$ qui est relié à $\arg J(\alpha_0)$ comme suit. Définissons tout d'abord une famille $\left(Q^\tau(\alpha), P^\tau(\alpha)\right)$, $\tau \geqslant 0$, d'applications

$$Q^\tau(\alpha) = Q(\alpha) - i\tau P(\alpha), \qquad P^\tau(\alpha) = P(\alpha) + i\tau Q(\alpha). \tag{3.9}$$

Posons ensuite $J(\alpha, \tau) \stackrel{\text{déf}}{=} \dfrac{DQ^\tau}{D\alpha}$ et définissons $\arg J(\alpha_0, \tau)$ comme une fonction continue vérifiant la condition $\arg J(\alpha_0, 0) = \arg J(\alpha_0)$. Les fonctions (3.8) induisent l'application $\alpha \to Q^\tau(\alpha) = \left(Q_I^\tau(\alpha), P_{\bar{I}}^\tau(\alpha)\right)$,

$$Q_I^\tau(\alpha) = Q_I(\alpha) - i\tau P_I(\alpha), \qquad P_{\bar{I}}^\tau(\alpha) = P_{\bar{I}}(\alpha) + i\tau Q_{\bar{I}}(\alpha).$$

Introduisons les notations :

$$Q^\tau(\alpha, t) = \left(Q_I^\tau(\alpha),\ Q_{\bar{I}}^\tau(\alpha)\cos t + P_{\bar{I}}^\tau(\alpha)\sin t\right), \qquad 0 \leqslant t \leqslant \pi/2,$$

$$Q^\tau(\alpha) = Q^\tau(\alpha, 0), \qquad \hat{Q}^\tau(\alpha) = Q^\tau\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right).$$

Pour tout τ, l'application

$$t \to J(\alpha_0, \tau, t) \stackrel{\text{déf}}{=} \left. \frac{DQ^{\tau}(\alpha, t)}{D\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_0} \tag{3.10}$$

est un chemin dans $\mathbf{C}$ d'origine $J(\alpha_0, \tau)$ et d'extrémité $J_I(\alpha_0, \tau) \stackrel{\text{déf}}{=}$ $\stackrel{\text{déf}}{=} \dfrac{D\hat{Q}^{\tau}(\alpha)}{D\alpha}$. Montrons que $J(\alpha_0, \tau, t) \neq 0$ pour $\tau > 0$. En effet, du lemme 3.2 il résulte que le point α_0 est C-lagrangien pour l'application $\alpha \to (Q(\alpha, t), P(\alpha, t))$, où $Q(\alpha, t)$ et $P(\alpha, t)$ sont définies par les formules (3.8). Par ailleurs, du lemme 3.1 il vient pour $\tau > 0$

$$\det\left(\frac{\partial Q(\alpha, \tau)}{\partial \alpha} - i\tau \frac{\partial P(\alpha, t)}{\partial \alpha} \right)\Bigg|_{\alpha=\alpha_0} \neq 0.$$

Reste maintenant à rappeler seulement que

$$Q^{\tau}(\alpha, t) = Q(\alpha, t) - i\tau P(\alpha, t).$$

Puisque le chemin (3.10) ne passe pas par 0, la valeur de $\arg J_I(\alpha_0, \tau)$ est déterminée de façon unique, donc on peut définir $\arg J_I(\alpha_0)$ comme $\lim\limits_{\tau \to +0} \arg J_I(\alpha_0, \tau)$, c'est-à-dire que

$$\lim_{\tau \to +0} \arg J_I(\alpha_0, \tau) \stackrel{\text{déf}}{=} \arg J_I(\alpha_0). \tag{3.11}$$

Dans le lemme suivant, nous montrerons l'existence de la limite (3.11) et la validité de la définition de $\arg J_I(\alpha_0)$.

Lemme 3.3. *Si* $J_I(\alpha_0, 0) \neq 0$, *alors* $\arg J_I(\alpha_0, \tau)$ *est uniformément continu sur* $]0, \tau_0[$ *pour tout* $\tau_0 > 0$.

Démonstration. Soit $0 < \tau_1 < \tau_2 < \tau_0$. Considérons les chemins suivants sur C:

$$\begin{aligned}
&l_1 : \tau \to J(\alpha_0, \tau), && \tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2, \\
&l_2 : t \to J(\alpha_0, \tau_1, t), && 0 \leqslant t \leqslant \pi/2, \\
&l_3 : t \to J(\alpha_0, \tau_2, t), && 0 \leqslant t \leqslant \pi/2, \\
&l_4 : \tau \to J_I(\alpha_0, \tau), && \tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2,
\end{aligned}$$

Supposons que $l_1 + l_3 - l_4 - l_2$ est fermé. En désignant par Δ_j l'accroissement de $\arg J_I(\alpha_0, \tau)$ sur le chemin l_j, on trouve que $\Delta_1 + \Delta_3 = \Delta_2 + \Delta_4$. Ceci résulte du fait que le chemin fermé considéré est homotope à un point dans $\mathbf{C} \setminus \{0\}$. D'où $\arg J_I(\alpha_0, \tau_2) - \arg J_I(\alpha_0, \tau_1) = \Delta_1 + \Delta_3 - \Delta_2 = \Delta_4$. Soit $m = \min\limits_{0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0} |J_I(\alpha_0, \tau)|$. Si $\max\limits_{\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2} |J_I(\alpha_0, \tau_1) - J_I(\alpha_0, \tau)| < m$, un calcul simple nous conduit à la majoration

$$|\sin\Delta_4| < \frac{1}{m}\left|J_I(\alpha_0, \tau_1) - J_I(\alpha_0, \tau_2)\right|$$

qui entraîne l'équicontinuité de $\arg J_I(\alpha_0, \tau)$.

Définition. La fonction $\arg J_I(\alpha_0)$ définie par la formule (3.11) sera dite *compatible* avec $\arg J(\alpha_0)$.

Supposons que $\alpha_0 \in \Omega \cap \Omega_I \cap \Gamma$ est un point d'une variété lagrangienne à germe complexe.

Au § 1 nous avons introduit une autre règle de compatibilité de $\arg J_I(\alpha_0)$ avec $\arg J(\alpha_0)$ liée à l'opération de contournement des foyers. Nous allons montrer que ces règles sont équivalentes. Lorsque α_0 appartient à l'intersection de cartes non singulières des zones Ω et Ω_I, ce fait résulte immédiatement de la proposition suivante.

Lemme 3.4. *Supposons qu'un point $\alpha_0 \in M$ est C-lagrangien pour l'application $\alpha \to (Q(\alpha), P(\alpha))$, que $Q^\tau(\alpha)$ et $P^\tau(\alpha)$ sont des fonctions définies par les formules* (3.9), *que $\bar{I} = \{1, 2, \ldots, k\}$. Soient*

$$\begin{aligned}
Q_I^{\tau,\varepsilon}(\alpha, t) &\stackrel{\text{déf}}{=} Q_I^\tau(\alpha)\cos t + \varepsilon P_I^\tau(\alpha)\sin t,\\
Q_{\bar{I}}^{\tau,\varepsilon}(\alpha, t) &\stackrel{\text{déf}}{=} Q_{\bar{I}}^\tau(\alpha),\\
P_I^{\tau,\varepsilon}(\alpha, t) &\stackrel{\text{déf}}{=} P_I^\tau(\alpha)\cos t - \varepsilon Q_I^\tau(\alpha)\sin t,\\
P_{\bar{I}}^{\tau,\varepsilon}(\alpha, t) &\stackrel{\text{déf}}{=} P_{\bar{I}}^\tau(\alpha),\\
J_\varepsilon(\alpha, \tau, t) &\stackrel{\text{déf}}{=} \frac{DQ^{\tau,\varepsilon}(\alpha, t)}{D\alpha}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

pour toute matrice orthogonale symétrique ε de dimension $k \times k$. Définissons $\arg J_\varepsilon(\alpha_0, \tau_0, 0)$ comme une fonction continue en ε (à noter que $J_\varepsilon(\alpha_0, \tau_0, 0)$ ne dépend pas de ε), et $\arg J_\varepsilon(\alpha_0, \tau, t)$ comme une fonction continue en t à $\tau > 0$ fixe. Alors la somme $\arg J_\varepsilon(\alpha_0, \tau, \pi/2) + \pi\sigma_\varepsilon$, où σ_ε est le nombre des valeurs propres strictement négatives de la matrice ε, ne dépend pas de ε.

Démonstration. La continuité de la fonction $\arg J_\varepsilon(\alpha_0, \tau, \pi/2)$ pour $\tau > 0$ s'établit comme dans le lemme 3.3. Considérons la différence

$$\Delta_{\varepsilon,\varepsilon'}(\tau) = [\arg J_\varepsilon(\alpha_0, \tau, \pi/2) + \pi\sigma_\varepsilon] - [\arg J_{\varepsilon'}(\alpha_0, \tau, \pi/2) + \pi\sigma_{\varepsilon'}].$$

De (3.12) il vient que

$$(-1)^{\sigma_\varepsilon} J_\varepsilon(\alpha_0, \tau, \pi/2) = (-1)^{\sigma_{\varepsilon'}} J_{\varepsilon'}(\alpha, \tau, \pi/2),$$

donc $\Delta_{\varepsilon,\varepsilon'}(\tau) \equiv 0 \pmod{2\pi}$. Ce fait entraîne que $\Delta_{\varepsilon,\varepsilon'}(\tau)$ ne dépend pas de τ, puisque continue. Le lemme sera donc prouvé quand on aura montré que $\Delta_{\varepsilon,\varepsilon'}(1) = 0$ pour tous $\varepsilon, \varepsilon'$.

A cet effet, mettons le jacobien $J_\varepsilon(\alpha_0, \tau, t)$ sous la forme

$$J_\varepsilon(\alpha, \tau, t) = v(t)\det(C^\tau\cos t + \hat{\varepsilon} C_I^\tau \sin t),$$

où

$$v(t)=\det\begin{pmatrix}1 & 0 & \\ 0 & 1 & \\ & & \cos t+\sin t\cdot 1_{n-k}\end{pmatrix}>0,$$

$$C^\tau=\frac{\partial Q^\tau}{\partial\alpha}(\alpha_0),\qquad C_I^\tau=\frac{\partial(P_I^\tau,\,Q_I^\tau)}{\partial\alpha}(\alpha_0),$$

$$\hat{\varepsilon}=\begin{pmatrix}\varepsilon & 0\\ 0 & 1_{n-k}\end{pmatrix}$$

et 1_j est la matrice unité de dimension $j\times j$. En particulier,

$$J_\varepsilon(\alpha_0,\,1,\,t)=v(t)\cdot\det(C^1\cos t-\hat{\varepsilon}C_I^1\sin t).$$

Signalons que $P^1=iQ^1$. Donc

$$\frac{\partial(P_I^1,\,Q_I^1)}{\partial\alpha}=\frac{\partial(iQ_I^1,\,Q_I^1)}{\partial\alpha}=\begin{pmatrix}i1_k & 0\\ 0 & 1_{n-k}\end{pmatrix}\frac{\partial Q^1}{\partial\alpha}.$$

Donc le jacobien $J_\varepsilon(\alpha_0,\,1,\,t)$ peut être calculé comme suit:

$$J_\varepsilon(\alpha_0,\,1,\,t)=(\cos t+\sin t)^{n+k}\det C^1\left(\cos t\cdot 1_n+\hat{\varepsilon}\begin{pmatrix}i1_k & 0\\ 0 & 1_{n-k}\end{pmatrix}\sin t\right)=$$

$$=\det C^1\prod_{s=1}^{k}(\cos t+i\lambda_s\sin t),$$

où λ_s sont les valeurs propres de la matrice ε.

Pour tout $z\in C\setminus\{0\}$ définissons $\operatorname{Arg}z$ de la phase z de telle sorte que $\pi<\operatorname{Arg}z\leqslant\pi$. Donc, $\operatorname{Arg}(\cos t+i\lambda_s\sin t)\neq\pi$ pour $t\in[0,\pi/2]$, puisque $\sum_{s=1}^{k}\operatorname{Arg}(\cos t+i\lambda_s\sin t)$ est continue sur $[0,\pi/2]$. On obtient la formule

$$\arg J_\varepsilon(\alpha_0,\,1,\,t)=\arg J_\varepsilon(\alpha_0,\,1,\,0)+\sum_{s=1}^{k}\operatorname{Arg}(\cos t+i\lambda_s\sin t).$$

En faisant $t=\pi/2$ dans cette formule, on constate que

$$\arg J_\varepsilon(\alpha_0,\,1,\,\pi/2)=\arg J_\varepsilon(\alpha_0,\,1,\,0)+\pi k/2-\pi\sigma_\varepsilon,\tag{3.13}$$

donc $\arg J_\varepsilon(\alpha_0,\,1,\,\pi/2)+\pi\sigma_\varepsilon$ ne dépend pas de ε, et, par suite, $\Delta_{\varepsilon,\,\varepsilon'}(1)=\Delta_{\varepsilon,\,\varepsilon'}(\tau)$ ne dépend pas de ε et de ε'. Ce qui prouve le lemme.

Considérons maintenant le cas où $\alpha_0\in\Omega\cap\Omega_1\cap\Gamma$ n'appartient pas à l'intersection de cartes non singulières des zones Ω et Ω_I. Au § 1 nous avons défini $\arg J_I(\alpha_0)$ par la formule (1.22). Dans le lemme suivant nous prouverons l'équivalence des formules (1.22) et (3.11).

Lemme 3.5. *La limite de la formule* (1.22) *existe et la fonction* $\arg J_I(\alpha_0)$ *définie par la formule* (1.22) *est compatible avec* $\arg J(\alpha_0)$ *au sens de la définition* 3.2.

Démonstration. Supposons que α_0 vérifie les hypothèses du théorème 1.2 et que $Q^{\tau,\varepsilon}(\alpha, t, s)$ et $P^{\tau,\varepsilon}(\alpha, t, s)$ sont définies par les formules (3.12) dans lesquelles il faut remplacer $Q(\alpha)$ et $P(\alpha)$ respectivement par $q(\alpha, s)+z(\alpha, s)$ et $p(\alpha, s)+w(\alpha, s)$, où

$$\big(p(\alpha, s), q(\alpha, s)\big)=g^s_{H_0}\big(p(\alpha), q(\alpha)\big),$$
$$\big(w(\alpha, s), z(\alpha, s)\big)=dg^s_{H_0}\big(w(\alpha), z(\alpha)\big),$$
$$H_0(p, q)=\frac{1}{2}(p^2+q^2).$$

Considérons le jacobien

$$J_\varepsilon(\alpha, \tau, t, s)=\det\frac{\partial Q^{\tau,\varepsilon}(\alpha, t, s)}{\partial\alpha}$$

et choisissons pour tout $s\in]0, s_0[$ une matrice $\varepsilon(s)$ symétrique orthogonale de telle sorte que $J_{\varepsilon(s)}(\alpha_0, 0, t, s)\neq 0$ pour tout $t\in[0, \pi/2]$.

Supposons qu'on ait choisi une phase $\arg J(\alpha_0)$ du jacobien $J(\alpha_0)$. Définissons à partir de cette phase une fonction $\arg J_{\varepsilon(s)}(\alpha_0, 0, 0, s)$, puis la phase $\arg J_{\varepsilon(s)}(\alpha_0, \tau, 0, s)$ pour $\tau\geqslant 0$ à $s\in]0, s_0[$ fixe et enfin $\arg J_{\varepsilon(s)}(\alpha_0, \tau, t, s)$ pour s et τ fixes. Du lemme 3.4 il résulte que la somme $\pi\sigma_{\varepsilon(s)}+\arg J_{\varepsilon(s)}(\alpha_0, \tau, \pi/2, s)$ ne dépend pas de $\varepsilon(s)$ pour tout $\tau>0$ et s fixe. On a donc l'égalité

$$\pi\sigma_{\varepsilon(s)}+\operatorname{Arg}J_{\varepsilon(s)}(\alpha_0, \tau, \pi/2, s)=\operatorname{Arg}J_{1_n}(\alpha_0, \tau, \pi/2, s). \qquad (3.14)$$

Suivant le lemme 3.3, on peut prouver la continuité uniforme de la fonction $\arg J_{1_n}(\alpha_0, \tau, \pi/2, s)$ dans le rectangle ouvert $0<\tau<\tau_0$, $0<s<s_0$, d'où l'existence de la limite

$$\lim_{\substack{\tau\to 0\\ s\to 0}} J_{1_n}(\alpha_0, \tau, \pi/2, s)\overset{\text{déf}}{=}J_I(\alpha_0)\neq 0.$$

Grâce à (3.14), cette relation entraîne l'existence de la limite (1.22). La seconde partie de la proposition du lemme découle du fait que

$$\lim_{s\to 0} J_{1_n}(\alpha_0, \tau, \pi/2, s)=J_I(\alpha_0, \tau).$$

Les résultats établis dans les lemmes 3.4 et 3.5 combinés au résultat du lemme 2.4 nous permettent de formuler la définition suivante de la zone Ω_I.

Définition. Pour l'application différentiable $\alpha\to\big(P(\alpha), Q(\alpha)\big)$ de la variété réelle M dans $\mathbf{C}^{2n}$, l'ensemble Ω_I est *l'ensemble de tous les points C-lagrangiens* $\alpha\in M$ pour lesquels

$$\det\frac{\partial(Q_I, P_{\bar I})}{\partial\alpha}\overset{\text{déf}}{=}J_I(\alpha)\neq 0.$$

Supposons que $\alpha_0 \in \Omega_I \cap \Omega_K$. Il se pose alors la question de la compatibilité de $\arg J_I(\alpha_0)$ et $\arg J_K(\alpha_0)$. Définissons une règle de compatibilité de ces arguments. Supposons que $\arg J_I(\alpha_0)$ a été choisi et définissons l'argument de la phase du jacobien

$$J_I(\alpha, \tau) = \frac{D(Q_I^\tau(\alpha), P_I^\tau(\alpha))}{D\alpha},$$

où Q^τ et P^τ sont les mêmes que dans (3.9), comme une fonction continue satisfaisant la condition $\arg J_I(\alpha_0, 0) = \arg J_I(\alpha_0)$.

Considérons le hamiltonien

$$H(p, q) = \frac{1}{2}(p_{I_1}^2 - q_{I_1}^2 - p_{K_1}^2 - q_{K_1}^2)$$

où $I_1 = I \setminus K$ et $K_1 = K \setminus I$.

Les trajectoires de H issues des points $(Q(\alpha), P(\alpha))$ sont définies par les équations

$$\begin{aligned} Q_{I_1}(\alpha, t) &= Q_{I_1}(\alpha)\cos t + P_{I_1}(\alpha)\sin t, \\ P_{I_1}(\alpha, t) &= P_{I_1}(\alpha)\cos t - Q_{I_1}(\alpha)\sin t, \\ Q_{K_1}(\alpha, t) &= Q_{K_1}(\alpha)\cos t - P_{K_1}(\alpha)\sin t, \\ P_{K_1}(\alpha, t) &= P_{K_1}(\alpha)\cos t + Q_{K_1}(\alpha)\sin t, \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$Q_{\bar{I}_1 \cap \bar{K}_1}(\alpha, t) = Q_{\bar{I}_1 \cap \bar{K}_1}(\alpha), \qquad P_{\bar{I}_1 \cap \bar{K}_1}(\alpha, t) = P_{\bar{I}_1 \cap \bar{K}_1}(\alpha).$$

Les équations (3.15) induisent l'application $Q: (\alpha, \tau, t) \to \mathbf{C}^n$ définie par les formules

$$\begin{aligned} Q_I^\tau(\alpha, t) &= (Q_{I_1}^\tau(\alpha)\cos t + P_{I_1}^\tau(\alpha)\sin t, \quad Q_{I\cap K}^\tau(\alpha)), \\ P_I^\tau(\alpha, t) &= (P_{K_1}^\tau(\alpha)\cos t + Q_{K_1}^\tau(\alpha)\sin t, \quad P_{I\cap\bar{K}}^\tau(\alpha)), \\ &0 \leqslant t \leqslant \pi/2. \end{aligned}$$

Posons $Q_{K,I}^\tau(\alpha, t) = Q$. En appliquant les lemmes 3.1 et 3.2 au cas étudié, on trouve que

$$J_{K,I}(\alpha_0, \tau, t) = \det \frac{\partial Q_{K,I}^\tau(\alpha_0, t)}{\partial \alpha} \neq 0 \tag{3.16}$$

pour $\tau > 0$. De plus, $\arg J_I(\alpha_0, \tau, t)$ peut être définie pour $\tau > 0$ comme une fonction continue en τ. Par analogie avec le lemme 3.3 on peut prouver la validité de la définition de $\arg J_K(\alpha_0)$ à l'aide de la formule suivante

$$\arg J_K(\alpha_0) = \lim_{\tau \to +0} J_I(\alpha_0, \tau, \pi/2). \tag{3.17}$$

Définition. On dira que $\arg J_K(\alpha_0)$ est *compatible* avec $\arg J_I(\alpha_0)$ et on notera $\arg J_K(\alpha_0) \succcurlyeq \arg J_I(\alpha_0)$ si $\arg J_K(\alpha_0)$ est définie par la formule (3.17).

Lemme 3.6. *La relation de compatibilité* « $\succcurlyeq$ » *est transitive.*

Démonstration. Soit $\arg J_K(\alpha_0) \leftarrow \arg J_I(\alpha_0)$ et $\arg J_I(\alpha_0) \leftarrow \arg J_L(\alpha)$. Montrons que $\arg J_K(\alpha_0) \leftarrow \arg J_L(\alpha_0)$. Sans restreindre la généralité, on peut admettre que $\overline{L} = \varnothing$, c'est-à-dire que $L = \{1, 2, \ldots, n\}$. Conservons les notations précédentes et posons

$$J_I(\alpha, \tau, t) = \det \frac{\partial\left(Q_I^\tau(\alpha),\ Q_{\overline{I}}^\tau(\alpha)\cos t + P_{\overline{I}}^\tau(\alpha)\sin t\right)}{\partial\alpha},$$

$$J_K(\alpha, \tau, t) = \det \frac{\partial\left(Q_K^\tau(\alpha),\ Q_{\overline{K}}^\tau(\alpha)\cos t + P_{\overline{K}}^\tau(\alpha)\sin t\right)}{\partial\alpha}$$

Pour prouver le lemme il suffit de montrer que

$$\Delta(\tau) = \arg J_I(\alpha_0, \tau, \pi/2) - \arg J_I(\alpha_0, \tau, 0) + \\ + \arg J_{K,I}(\alpha_0, \tau, \pi/2) - \arg J_{I,K}(\alpha_0, \tau, 0) \\ - (\arg J_K(\alpha_0, \tau, \pi/2) + \arg J_K(\alpha_0, \tau, 0)) = 0$$

pour tout $\tau > 0$. Etant continue et vérifiant la condition $\Delta(\tau) \equiv 0 \pmod{2\pi}$, la fonction $\Delta(\tau)$ est constante et $\Delta(\tau) = \Delta(1)$. Il nous suffit donc de montrer que $\Delta(1) = 0$.

Soient m_1, m_2, m_3 le nombre des éléments des ensembles respectifs $I \setminus K$, $K \setminus I$, $I \cap K$. La formule (3.13) avec $\varepsilon = 1_{n\times n}$ nous donne

$$\arg J_I(\alpha_0, 1, \pi/2) - \arg J_I(\alpha_0, 1, 0) = \pi/2\,(n - m_1 - m_3). \tag{3.18}$$

De là (cf. démonstration du lemme 3.4) on déduit sans peine la formule

$$J_{K,I}(\alpha, t, \tau) = (\sin t + \cos t)^{-n+m_1+m_2} \times \\ \times \det \left[\frac{\partial\left(Q_I^\tau(\alpha),\ P_{\overline{I}}^\tau(\alpha)\right)}{\partial\alpha} \cos t + \frac{\partial\left(Q_K^\tau(\alpha),\ P_{\overline{K}}^\tau(\alpha)\right)}{\partial\alpha} \sin t \right].$$

En posant $\tau = 1$ dans cette formule, on obtient

$$J_{K,I}(\alpha, t, 1) = \frac{D\left(Q(\alpha) - iP(\alpha)\right)}{D\alpha}\, i^{n-m_1-m_2-m_3} \times \\ \times (\cos t + i \sin t)^{m_1} (i \cos t + \sin t)^{m_2}.$$

Donc

$$\arg J_{K,I}(\alpha_0, 1, \pi/2) - \arg J_{K,I}(\alpha_0, 1, 0) = \pi/2\,(m_1 - m_2). \tag{3.19}$$

Le calcul de $\Delta(1)$ à l'aide des formules (3.18) et (3.19) nous donne $\Delta(1) = 0$, ce qui prouve le lemme.

Définition. On dira qu'une variété réelle M est *C-lagrangienne* si chacun de ses points est C-lagrangien pour l'application $f: M \to \mathbf{C}^{2n}$.

Nous disposons maintenant de tous les éléments pour définir l'indice d'un germe complexe.

Commençons par définir l'indice d'un chemin fermé sur une variété C-lagrangienne. Soient $u \in M$ et l un chemin pas nécessairement fermé situé

dans un voisinage de coordonnées du point u. Soit $\Delta(l, \tau)$, $\tau > 0$, l'accroissement de l'argument de la phase du déterminant $\det(C(\alpha) - i\tau B(\alpha)) = \det\left(\frac{\partial Q}{\partial \alpha} - i\tau \frac{\partial P}{\partial \alpha}\right)$ le long du chemin l. Il est évident que $\Delta(l, \tau)$ ne dépend pas des coordonnées locales. En effet, un changement de coordonnées revient à multiplier $\det(C(\alpha) - i\tau(B(\alpha))$ par un nombre réel. Si le chemin l n'est entièrement contenu dans aucun voisinage de coordonnées, on définit $\Delta(l, \tau)$ additivement en sommant les accroissements de l'argument pour chaque partie du chemin contenue dans une carte. Il est clair aussi que $\Delta(l, \tau)$ ne dépend pas de τ mais seulement de l si l est un chemin fermé. Cette circonstance nous permet de définir l'indice de l fermé par la formule

$$\operatorname{ind} l = \frac{1}{2\pi} \Delta(l, \tau), \quad \tau > 0.$$

Cette formule peut être mise sous la forme

$$\operatorname{ind} l = -\frac{1}{2\pi} \oint_l d \ln \left| \frac{D(Q - i\tau P)}{D\alpha} \right| \Big/ \left| \frac{D(Q - i\tau P)}{D\alpha} \right|. \tag{3.20}$$

De la formule (3.20), il vient immédiatement que l'homotopie du chemin l en un point entraîne la nullité de $\operatorname{Ind} l$. Donc, sur la variété M est définie une classe de cohomologie à une dimension.

Supposons que le chemin l relie deux points non singuliers (c'est-à-dire des points pour lesquels $\frac{DQ}{D\alpha} \neq 0$). Appelons la quantité

$$\Delta l = \lim_{\tau \to +0} \Delta(l, \tau) \tag{3.21}$$

rotation du jacobien le long du chemin l. L'existence de la limite (3.21) s'acquiert comme (3.11).

Supposons que $\operatorname{Ind} l = 0$ pour tout chemin fermé l sur M. En d'autres termes, la classe de cohomologie introduite ci-dessus est triviale. Alors la rotation du jacobien le long de tout chemin reliant deux points non singuliers α^1 et α^2 ne dépend que de ces points et pas du chemin qui les relie. Fixons un point α^0 non singulier de M et appelons-le *initial*. Choisissons une valeur de l'argument $\arg \frac{DQ}{D\alpha}(\alpha^0)$ de la phase du jacobien $\det Q_\alpha(\alpha^0)$. Nous pouvons maintenant définir de façon unique $\arg \frac{DQ}{D\alpha}$ en tout point non singulier α_1 appartenant à la composante connexe de M contenant α^0

à l'aide de la formule suivante:

$$\arg\frac{DQ}{D\alpha}(\alpha_1)=\arg\frac{DQ}{D\alpha}(\alpha^0)+\Delta l[\alpha^0, \alpha_1], \tag{3.22}$$

où $l[\alpha^0, \alpha_1]$ est le chemin reliant α^0 et α_1. En particulier, la formule (3.22) définit une orientation locale sur la variété M au point α_1. On peut donc définir une orientation locale sur M en tout point d'une zone non singulière d'une composante connexe de M.

Montrons que si M est une variété connexe, les orientations locales définissent une orientation globale sur une zone Ω. Soient α^1, $\alpha^2 \in \Omega$ et u_1, u_2 des voisinages de coordonnées respectifs de ces points. Soient x et y des coordonnées de u_1 et u_2 compatibles avec l'orientation locale sur M aux points α^1 et α^2. Si $\alpha \in u_1 \cap u_2$, les coordonnées x et y sont compatibles avec l'orientation locale en α. Pour s'en assurer, il suffit de considérer la rotation du jacobien le long des deux chemins suivants reliant α^0 et α:

(1) $l[\alpha^0, \alpha^1]+l[\alpha^1, \alpha]$;

(2) $l[\alpha^0, \alpha^2]+l[\alpha^2, \alpha]$,

où le chemin $l[\alpha^1, \alpha]$ est entièrement contenu dans u_1, et $l[\alpha^2, \alpha]$, dans u_2. Donc $\frac{Dy}{Dx}>0$, ce qui définit bien une orientation globale sur Ω.

Nous avons ainsi montré que la trivialité de la classe de cohomologie envisagée entraîne l'orientabilité de la zone non singulière. De fait, la trivialité de cette classe suppose l'orientabilité de la variété M. Pour le prouver considérons l'application suivante

$$\alpha \to (Q(\alpha)-i\tau P(\alpha), \quad P(\alpha)+i\tau Q(\alpha)) \tag{3.23}$$

pour un $\tau>0$. Il est immediat de verifier que M est C-lagrangienne pour cette application, et tous ses points, ainsi qu'il résulte du lemme 3.1, sont non singuliers.

La condition de trivialité permet de définir de façon unique $\arg J_I(\alpha)$ pour tout point α, pourvu que soit donné le point initial $\alpha^0 \in M$ et que soit dûment choisie la valeur $\arg\frac{DQ}{D\alpha}(\alpha^0)$. Considérons à cet effet les procédures suivantes de calcul de $\arg J_I(\alpha)$.

(1) Pour $\tau \geqslant 0$ définissons la fonction continue $\arg J(\alpha^0, \tau)$, du jacobien

$$J(\alpha^0, \tau)=\det(Q_\alpha - i\tau P_\alpha)\big|_{\alpha=\alpha_0}.$$

(2) Pour $\tau>0$ définissons $\arg J(\alpha, \tau)$ par la formule

$$\arg J(\alpha, \tau)=\arg J(\alpha^0, \tau)+\Delta(l[\alpha^0, \alpha], \tau).$$

Donc, $\arg J(\alpha, \tau)$ est continue en α.

(3) Pour $\tau>0$ prenons $\arg J_I(\alpha, \tau)$ du jacobien

$$J_I(\alpha, \tau)=\frac{D\,(Q_I-i\tau P_I,\ P_{\bar{I}}+i\tau Q_{\bar{I}})}{D\alpha}$$

compatible avec $\arg J(\alpha, \tau)$ au sens de la définition p. 573.

(4) Posons enfin

$$\arg J_I(\alpha)=\lim_{\tau\to+0}\arg J_I(\alpha, \tau).$$

Nous pouvons maintenant traiter une variété lagrangienne à germe complexe comme une variété contenant un sous-ensemble Γ C-lagrangien. On pourrait définir sur cette variété Ind_Γ en considérant des chemins situés dans un petit voisinage de Γ. Mais il semble plus commode de définir Ind_Γ en termes de théorie de cohomologie de Čech dans laquelle les chemins fermés sont remplacés par des chaînes de cartes fermées et l'indice d'un chemin, par une notion identique. Pour mettre en lumière le lien qui existe entre ces deux notions, définissons Ind comme une classe de cohomologie de Čech d'une variété C-lagrangienne M.

Commençons par le cas où $M=\Omega$ est une zone non singulière. Soit $\{u_j\}$ un recouvrement de M par des sous-ensembles ouverts u_j tels que l'accroissement de $\arg J$ correspondant à un chemin quelconque contenu dans u_j soit $<\pi/2$; un tel recouvrement sera dit *admissible*. Pour tout j fixons un point $\alpha^j\in u_j$ que nous appellerons *point central* de u_j. Définissons une 1-cochaîne $\Delta\arg J$ à coefficients réels de la manière suivante: pour tout couple d'ensembles non disjoints (u_j, u_k) désignons par $(\Delta\arg J)_{jk}$ l'accroissement de $\arg J$ le long du chemin $l[\alpha^j, \alpha^k]$ composé de deux arcs, l'un contenu dans u_j, l'autre dans u_k. Il est évident que $(\Delta\arg J)_{jk}$ ne dépend pas du choix des chemins $l[\alpha^j, \alpha^k]$, puisque $|\Delta\arg J|_{jk}<\pi$, d'après la propriété du recouvrement $\{u_j\}$. Il est aisé de montrer que $\Delta\arg J$ est un cocycle.

Définition. Désignons par Ind et appelons *indice* la classe de cohomologie définie par le 1-cocycle $\frac{1}{2\pi}\Delta\arg J$.

Montrons que Ind est indépendant du choix des points centraux. En effet, soit $\{\bar{\alpha}^j\}$ une autre famille de points centraux, et soit δ_j l'accroissement de l'argument associé au chemin $l[\alpha^j, \bar{\alpha}^j]$ contenu dans u_j. Le cobord de la 0-cochaîne $[\delta_j]$ est la dérivée des 1-cocycles $\Delta\arg J$ correspondant aux familles $\{\bar{\alpha}^j\}$ et $\{\alpha^j\}$. Donc, ces deux cocycles sont cohomologiques.

Lemme 3.7. *Une condition nécessaire et suffisante pour que la classe* Ind *d'une variété C-lagrangienne M soit triviale est l'existence d'une branche continue.*

Démonstration. Suffisance. Si $\arg J$ est une branche continue, alors $\{\arg J(\alpha^j)\}$ est une 0-cochaîne de cobord $\Delta\arg J$.

Nécessité. Soit Ind une classe triviale. Alors, pour un recouvrement admissible $\{u_j\}$ (avec une famille quelconque fixe de points centraux), il existe une famille $\{a_j\}$ de nombres réels telle que $(\Delta \arg J)_{jk} = a_k - a_j$, où $(\Delta \arg J)_{jk}$ est la cochaîne associée au recouvrement $\{u_j\}$. Sans nuire à la généralité, on peut admettre que M est une variété connexe et a^{j_0} une des valeurs de $\arg J(\alpha^{j_0})$ pour un certain j_0. Alors, a_j est visiblement une des valeurs de $\arg J(\alpha^j)$ pour tout j. Cette valeur de $\arg J(\alpha^j)$ permet de déterminer dans u_j une branche continue $\arg J$ telle que $\arg J$ soit défini comme une 0-cochaîne à coefficients appartenant à un faisceau de germes de fonctions différentiables. Pour démontrer la nécessité, il reste à montrer que cette cochaîne est un cocycle. Or ceci est une conséquence immédiate du fait que $|a_j - a_k| < \pi$ si $u_j \cap u_k \neq \varnothing$. Ce qui prouve le lemme.

Revenons maintenant à l'hypothèse que $M = \Omega$. Supposons que l'application $\alpha \to (P(\alpha), Q(\alpha))$ munit M d'une structure de variété C-lagrangienne. On rappelle que M est une zone non singulière pour l'application (3.9) pour $\tau > 0$. Ceci définit une famille Ind^τ de classes de cohomologie sur M. Mais en fait Ind^τ est indépendant de τ. Pour s'en assurer, considérons deux nombres τ_1 et τ_2, $0 < \tau_1 < \tau_2$, et supposons que le recouvrement $\{u_j\}$ de la variété M est tel que pour tout j l'accroissement de $\arg J(\alpha, t)$ correspondant à tout chemin contenu dans u_j est $< \pi/2$ dès que $\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$. Soient par ailleurs $\{\delta^{\tau_1}_{ik}\}$, $\{\delta^{\tau_2}_{ik}\}$ les cocycles de $\Delta \arg J$ correspondant à l'application (3.9) respectivement pour $\tau = \tau_1$ et $\tau = \tau_2$. On obtient alors

$$\delta^{\tau_2}_{jk} - \delta^{\tau_1}_{jk} = \Delta^k_{\tau_1 \tau_2} - \Delta^j_{\tau_1 \tau_2},$$

où $\Delta^j_{\tau_1 \tau_2}$ est l'accroissement de $\arg J(\alpha^j, \tau)$ correspondant à l'accroissement de τ de τ_1 à τ_2. Donc, les cocycles $\{\delta^{\tau_2}_{jk}\}$ et $\{\delta^{\tau_1}_{jk}\}$ sont cohomologiques.

Nous pouvons maintenant définir l'indice d'une variété C-lagrangienne en posant

$$\mathrm{Ind} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{Ind}^\tau, \quad \tau > 0.$$

Le lemme 3.7 nous conduit au critère suivant de trivialité de la classe Ind.

Proposition 3.1. *Une condition nécessaire et suffisante pour que la classe* Ind *d'une variété C-lagrangienne M soit triviale est l'existence pour toute zone* $\Omega_I \subset M$, *d'une branche continue* $\arg J_I$. *Ceci étant, les arguments sont compatibles dans l'intersection des zones.*

Passons maintenant à la définition de Ind_Γ. Soit M une variété réelle différentiable sur laquelle est définie une application $M \to \mathbf{C}^{2n}$ telle que $\Gamma \subset M$ soit C-lagrangien pour cette application.

Considérons un préfaisceau Π de quasi constantes sur M défini comme suit

$$\Pi(u) = \begin{cases} \mathbf{R} & \text{si} \quad u \cap \Gamma \neq \varnothing, \\ 0 & \text{si} \quad u \cap \Gamma \neq \varnothing. \end{cases}$$

Définissons Ind_Γ comme une classe de cohomologie de Čech à coefficients dans Π.

Supposons tout d'abord que le jacobien J ne s'annule pas sur Γ. Soit $\{u_j\}$ un recouvrement de M par des ensembles ouverts u_j tels que si $u_j \cap \Gamma \neq \varnothing$, alors J ne s'annule pas sur u_j et pour tout chemin situé dans u_j l'accroissement de $\arg J$ est $< \pi/2$.

Fixons un point central $\alpha^j \in u_j$ pour tout j et définissons $\{\Delta \arg J\}_{jk}$ comme nous l'avons fait pour la variété C-lagrangienne pour j et k tels que $u_j \cap u_k \cap \Gamma \neq \varnothing$. Nous avons ainsi défini un 1-cocycle à coefficients dans Π. Désignons-le par $\Delta_\Gamma \arg J$. Définissons enfin Ind_Γ comme une classe de cohomologie induite par $\dfrac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \arg J$.

Lemme 3.8. *Supposons que $J(\alpha) \neq 0$ sur Γ. La classe de cohomologie Ind_Γ est triviale si et seulement s'il existe une branche continue $\arg J$ sur Γ.*

Démonstration. Suffisance. Soit $\arg J$ une branche continue. Choisissons un recouvrement $\{u_j\}$ tel que

$$|\arg J(\bar{\alpha}) - \arg J(\bar{\bar{\alpha}})| < \pi/2$$

dès que $\bar{\alpha}$, $\bar{\bar{\alpha}} \in u_j \cap \Gamma$. Choisissons ensuite une famille de points centraux $\{\alpha^j\}$ tels que $\alpha^j \in \Gamma$ pour les j tels que $u_j \cap \Gamma \neq \varnothing$. Donc le cobord de la 0-cochaîne $\{\arg J(\alpha^j)\}$ est $\Delta_\Gamma \arg J$. D'où $\mathrm{Ind}_\Gamma = 0$.

Nécessité. Supposons que $\mathrm{Ind}_\Gamma = 0$. Il existe alors un recouvrement $\{u_j\}$ et une famille de nombres réels $\{a_j\}$ tels que

$$(\Delta \arg J)_{jk} = a_k - a_j$$

pour tous les j, k tels que $u_j \cap u_k \cap \Gamma \neq \varnothing$. Fixons j_0 pour lequel $a_{j_0} = \arg J(\alpha^{j_0})$. Comme dans le lemme 3.7, choisissons une famille de points centraux $\{\alpha^j\}$ telle que $\alpha^j \in \Gamma$ dès que $u_j \cap \Gamma \neq \varnothing$. Supposons que des points α' et α'' peuvent être reliés par une chaîne $(u_{j_1}, u_{j_2}, \ldots, u_{j_m})$ d'éléments du recouvrement $\{u_j\}$ telle que

$$\alpha' \in u_1, \quad \alpha'' \in u_m, \quad u_{j_s} \cap u_{j_{s+1}} \cap \Gamma \neq \varnothing, \quad s = 1, 2, \ldots, m-1.$$

En admettant que $\alpha' = \alpha^{j_0}$ et $\alpha'' = \alpha^{j_m}$, on voit que a^{j_m} est confondu avec une valeur de $\arg J(\alpha^{j_m})$. Définissons une 0-cochaîne à coefficients dans le faisceau des germes de fonctions différentiables sur Γ en associant à tout j tel que $u_j \cap \Gamma \neq \varnothing$ une branche continue $\arg J$ sur u_j vérifiant la condition $\arg J(\alpha^j) = a_j$. Reprenons les mêmes raisonnements que dans le lemme 3.7 pour montrer que la cochaîne est un cocycle, ce qui achèvera la démonstration du lemme.

Revenons à l'hypothèse : $\Gamma \subset \Omega$. En se servant encore des applications (3.9), on obtient une famille de classes de cohomologie Ind_Γ^τ, $\tau > 0$. Il est immédiat de vérifier que Ind_Γ^τ est indépendant de τ. Ceci nous permet de définir un indice sur Γ en posant

$$\mathrm{Ind}\,\Gamma = \mathrm{Ind}_\Gamma^\tau, \quad \tau > 0.$$

On en déduit, en particulier, que Ind_Γ est défini sur toute variété lagrangienne à germe complexe.

Le lemme 3.8 nous conduit immédiatement au critère suivant de trivialité de Ind_Γ.

Proposition. *Une condition nécessaire et suffisante pour que la classe* Ind_Γ *sur* M *soit triviale est que l'argument de la phase du jacobien possède une branche* $\arg J_I$ *continue sur* $\Omega_I \cap \Gamma$. *De plus* $\arg J_I$ *est compatible avec* $\arg J_K$ *sur* $\Omega_I \cap \Omega_K \cap \Gamma$.

Les résultats de ce paragraphe seront appliqués dans le suivant pour la construction d'un opérateur canonique. A noter qu'un rôle important incombera au lien existant entre les branches continues de la racine carrée du jacobien pour des zones différentes et non pas du jacobien lui-même. Cette circonstance nous suggère d'introduire Ind_Γ (mod 2).

Soit $a \in \mathbf{R}$. Posons $\mathbf{R}_a = \mathbf{R}/a$, c'est-à-dire que $\mathbf{R}_a$ est l'ensemble des classes d'équivalence $\mathbf{R}$ modulo a. Il est évident que $\mathbf{R}_a$ est un module sur $\mathbf{Z}$. Modifions le préfaisceau Π dans la définition de Ind_Γ en utilisant $\mathbf{R}_2$ au lieu de $\mathbf{R}$. Supposons que $J \neq 0$ sur Γ. Nous avons vu que cette proposition était essentielle dans le cas général. Soit $\mathrm{ind}_{jk} = (\Delta \arg J)_{jk} \bmod 2$. Alors $\{\mathrm{ind}_{jk}\}$ est un cocycle. Désignons par Ind_Γ (mod 2) la classe de cohomologie induite par ce cocycle. La condition nécessaire et suffisante de trivialité de Ind_Γ (mod 2) répète *ad litteram* la proposition 3.2 sous réserve que $\arg J_I$ soit traité comme une fonction à valeurs dans $\mathbf{R}_{4\pi}$ et $\arg J_I(\alpha_0)$ et $\arg J_K(\alpha_0)$ soient supposés compatibles s'ils le sont comme fonctions à valeurs dans $\mathbf{R}$.

Remarque. Certaines applications de la théorie de l'opérateur canonique impliquent une notion de l'indice plus générale que celle de Ind_Γ (mod 2). Introduisons cette notion de la manière suivante. Soit $\partial/\partial l = (\partial/\partial l_1, \ldots, \partial/\partial l_n)$ un ensemble de n champs de vecteurs complexes sur M, commutables, linéairement indépendants en tout point. En remplaçant $J(\alpha)$ par $\det \partial Q/\partial l$ dans la construction de l'indice, on définit une classe de cohomologie sur M qui sera désignée par $\mathrm{Ind}_{\Gamma, \partial/\partial l}$ (mod 2).

Il est aisé de remarquer que $\mathrm{Ind}_{\Gamma, \partial/\partial l}$ (mod 2) ne diffère de Ind_Γ (mod 2) que dans les traits généraux. Le critère de trivialité de la classe $\mathrm{Ind}_{\Gamma, \partial/\partial l}$ est exactement le même que celui de la classe Ind_Γ.

§ 4. Opérateur canonique

Partout dans ce paragraphe, on admettra que les arguments de phase des jacobiens sont définis modulo 4π.

1. Définition des opérateurs canoniques locaux. Introduisons quelques notations et définitions.

Appelons $\mathscr{A}(\Lambda^n, r^n)$ l'ensemble des classes d'équivalence des séries D-asymptotiques sur une variété lagrangienne Λ^n à germe complexe r^n. Il est évident que $\mathscr{A}(\Delta^n, r^n)$ est un module à gauche sur l'anneau des opérateurs D-asymptotiques. On dira qu'un point $\alpha_0 \in \Lambda^n$ est *essentiel* pour $\varphi \in \mathscr{A}(\Lambda^n, r^n)$ si φ admet un représentant non nul en ce point. Il est évident

que si α_0 est un point essentiel pour φ, tous les représentants de φ sont non nuls en α_0. L'ensemble de tous les points essentiels pour φ sera appelé *support* de φ et noté supp φ. Des définitions du § 1 il résulte que le support de tout $\varphi \in \mathcal{A}(\Lambda^n, r^n)$ est un sous-ensemble compact de l'ensemble Γ.

Soit u un sous-ensemble de la variété Λ^n. Désignons par $\mathcal{A}(u)$ l'ensemble de tous les éléments de $\mathcal{A}(\Lambda^n, r^n)$ dont le support est contenu dans u. Désignons par $\mathcal{A}(\mathbf{R}^n)$ l'ensemble de toutes les classes d'équivalence des séries h-asymptotiques dans $\mathbf{R}^n$.

On dira qu'une γ-carte d'une variété lagrangienne à germe complexe est *admissible* si l'inégalité de dissipation

$$c(\alpha)\,\Phi_I^\gamma(\alpha) \geqslant D(\alpha)$$

y est réalisée pour $\varepsilon = 0$.

Soit (u, π_γ^I) une γ-carte admissible sur (Λ^n, r^n). Considérons n champs de vecteurs (éventuellement complexes) $\dfrac{\partial}{\partial l} = \left(\dfrac{\partial}{\partial l_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial l_n}\right)$ linéairement indépendants en tout point de l'ensemble u.

Posons $J_I = \det \dfrac{\partial (q_I + z_I,\ p_{\bar{I}} + w_{\bar{I}})}{\partial l}$ et fixons la branche de $\arg J_I$ qui est continue sur u. Définissons un opérateur canonique local $\mathcal{K}_I^\gamma : \mathcal{A}(u) \to \mathcal{A}(\mathbf{R}^n)$ comme suit :

$$(\mathcal{K}_I^\gamma \varphi)(x) = F^{-1}_{\xi_{\bar{I}} \to x_{\bar{I}}} \left\{ e^{i\left(\frac{1}{h}\Phi_h^\gamma(\alpha) - \frac{1}{2}\arg J_I(\alpha)\right)} |J_I(\alpha)|^{-1/2} L_I^\gamma \varphi(\alpha)\big|_{\alpha = (\pi_\gamma^I)^{-1}(x_I, \xi_{\bar{I}})} \right\}, \quad (4.1)$$

(L_I^γ a été défini au § 1 de ce chapitre, cf. (1.27)).

Proposition 4.1. *$\mathcal{K}_I^\gamma \varphi \lessapprox 0$ si x n'appartient pas à l'image de l'ensemble Γ par l'application $\alpha \to q(\alpha)$.*

Cette proposition résulte immédiatement de l'exemple 2.1.

Proposition 4.2. *$\mathcal{K}_I^\gamma$ est un monomorphisme.*

Pour prouver cette proposition, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 4.1. *Si $D > 0$, $c \geqslant 0$, $a_i \in \mathbf{C}$, $i = 0, 1, \ldots, [2\rho - 1] \overset{\text{déf}}{=} r$, satisfont l'inégalité*

$$\left| \sum_{j=0}^{r} a_j h^{j/2} \right| e^{-D/h} \leqslant c h^\rho \quad (4.2)$$

pour tous les $h > 0$, alors il existe une fonction $k(\rho)$, $\rho \geqslant \dfrac{1}{2}$, telle que

$$|a_j| e^{-D/h} \leqslant k(\rho)\, c \cdot h^{\rho - j/2}, \quad j = 0, \ldots, r,$$

pour tous les $h > 0$.

Démonstration. Dans la formule (4.2), posons $h=D\cdot y^2$, où y prend des valeurs strictement positives. L'inégalité (4.2) devient alors

$$\left|\sum_{j=0}^{r} a_j y^j D_2^{j/2}\right| \leqslant c y^{2\rho} e^{1/y^2 D^\rho}.$$

Donc, pour tout ensemble de $r+1$ nombres strictement positifs $y=(y_0,\ldots,y_r)$ et $r+1$ nombres réels $b=(b_0,\ldots,b_r)$, on a l'inégalité

$$\left|\sum_{j=0}^{r}\sum_{l=0}^{r} b_j a_j y_j^l D^{l/2}\right| \leqslant c f(y,b) D^\rho. \tag{4.3}$$

Fixons y de telle sorte que $y_j \neq y_l$ pour $j\neq l$ et considérons le système d'équations linéaire non homogène en b:

$$\sum_{j=0}^{r} y_j^l b_j = \delta_{ls}, \qquad l=0,\ldots,r, \tag{4.4}$$

où s est un entier donné. Le système (4.4) admet une seule solution $b=b(s)$ puisque son déterminant est un déterminant non nul de Vandermonde. En portant cette solution dans (4.3), on trouve que

$$|a_s| \leqslant c k'(\rho)\, D^{\rho - s/2},$$

où $k'(\rho)=\max\limits_{0\leqslant s\leqslant r} f(y, b(s))$.

Pour achever la démonstration, il reste à appliquer les résultats du § 1, chapitre VI.

Démonstration de la proposition 4.2. Il est évident que l'opérateur $e^{-\frac{i}{2}\arg J_I(\alpha)}|J_I(\alpha)|^{-1/2} L_I^\gamma$ est un monomorphisme de $\mathscr{A}(u)$ sur lui-même et $F^{-1}_{\xi_I\to x_I}$ un monomorphisme de $\mathscr{A}(\mathbf{R}^n)$ sur lui-même. Il faut donc prouver que l'opération de multiplication par $e^{i/h\,\Phi_I^\gamma(\alpha)}$ ne peut associer à une série D-asymptotique non équivalente à 0 et à support dans u une série h-asymptotique équivalente à 0.

Soit $\psi=\sum\limits_{j\in J}^{0}\psi_j$ une série D-asymptotique à support dans u.

(1) Montrons tout d'abord que

$$(e^{\frac{i}{h}\Phi_I^\gamma}\psi \sim 0) \Rightarrow (\psi\sim 0).$$

En effet, si $e^{\frac{i}{h}\Phi_I^\gamma}\psi\sim 0$, alors pour tout N, il existe un ensemble fini $J_0\subset J$ tel que

$$\left|\sum_{j\in K} e^{\frac{i}{h}\Phi_I^\gamma(\alpha)}\psi_j(\alpha,h)\right| \leqslant \text{const}\, h^N$$

pour tout $K\supset J_0$ fini. Puisque

$$\sum_{j\in K}\psi_j(\alpha,h)=h^{-s/2}\sum_{l=0}^{l_0}h^{l/2}a_l(\alpha),$$

le lemme 4.1 entraîne

$$a_l=O_D\left(h^{N+\frac{s-l}{2}}\right)$$

pour $l<2N+s$. Donc

$$\sum_{j\in K}\psi_j=O_D(h^N),$$

ce qui exprime que $\psi\sim 0$.

(2) Supposons maintenant que $e^{\frac{i}{h}\Phi_I^\gamma}\psi\approx 0$, c'est-à-dire que

$$\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^k e^{\frac{i}{h}\Phi_I^\gamma(\alpha)}\psi(\alpha)\sim 0$$

pour tout indice multiple k. Montrons par récurrence que $\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^k\psi(\alpha)\sim 0$ pour tout k. Pour $k=0$, ceci résulte de (1).

Supposons que $\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^l\psi\sim 0$ pour $|l|\leqslant N$ et soit $|k|=N+1$. Alors

$$\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^k e^{\frac{i}{h}\Phi_I^\gamma}\psi=e^{\frac{i}{h}\Phi_I^\gamma}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^k\psi+e^{\frac{i}{h}\Phi_I^\gamma}L^{-N-1}\hat{L}\psi,$$

où $\hat{L}$ est un opérateur différentiel d'ordre N dont les coefficients sont des polynômes en h à coefficients différentiables par rapport à α. D'après l'hypothèse de récurrence, on a $\hat{L}\psi\sim 0$, donc

$$e^{\frac{i}{h}\Phi_I^\gamma}h^{-N-1}\hat{L}\psi\sim 0,\qquad e^{\frac{i}{h}\Phi_I^\gamma}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^k\psi\sim 0.$$

D'où, en vertu de (1), il vient que $\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^k\psi\sim 0$. Ce que nous voulions.

2. Opérateurs de transport. Considérons deux cartes admissibles (u,π_γ^I) et $(u',\pi_{\gamma'}^K)$ d'une variété lagrangienne à germe complexe et les branches continues $\arg J_I$ et $\arg J_K$ définies respectivement sur u et u' et compatibles sur $u\cap u'$.

Fixons un ensemble de n champs de vecteurs $\frac{\partial}{\partial l}$ sur $u\cap u'$ commutables, linéairement indépendants en tout point de $u\cap u'$. Les opérateurs canoniques locaux $\mathscr{K}_I^\gamma:\mathscr{A}(u)\to\mathscr{A}(\mathbf{R}^n)$ et $\mathscr{K}_K^{\gamma'}:\mathscr{A}(u')\to\mathscr{A}(\mathbf{R}^n)$ sont définis de façon unique. Considérons un opérateur local $V_{IK}^{\gamma\gamma'}$ de $\mathscr{A}(u\cap u')$ sur lui-même (un opérateur de transport de (u,π_γ^I) dans $(u',\pi_{\gamma'}^K)$) défini par la formule

$$\mathscr{K}_I^\gamma\varphi=\mathscr{K}_K^{\gamma'}V_{IK}^{\gamma\gamma'}\varphi. \tag{4.5}$$

Formulons une proposition qui généralise le théorème 1.2 et entraîne immédiatement l'existence de l'application $V_{IK}^{\gamma\gamma'}$.

Proposition 4.3. *Soit* $\alpha_0 \in \Gamma \cap u \cap u'$. Alors, pour tout $\varphi(\alpha) \in C_0^\infty$ *dont le support contient le point* α_0, *on a*:

$$F_{X_{I_1} \to \xi_{\pi_1}} F^{-1}_{\xi_{K^1} \to x_{K^1}} \left[e^{\frac{i}{h}\Phi_I^\gamma(\alpha)} \left| J_I(\alpha) \right|^{-1/2} e^{\frac{i}{2}\arg J_I(\alpha)} L_I^\gamma \varphi(\alpha) \right]_{\alpha = (\pi_\gamma^I)^{-1}(x_I, \xi_{\bar{I}})} \approx$$

$$\approx \left[e^{\frac{i}{h}\Phi_K^{\gamma'}(\alpha)} \left| J_K(\alpha) \right| e^{-\frac{i}{2}\arg J_K(\alpha)} L_K^{\gamma'} V_{IK}^{\gamma\gamma'} \varphi(\alpha) \right]_{\alpha = (\pi_{\gamma'}^K)^{-1}(x_K, \xi_{\bar{K}})},$$

où $I_1 = I \setminus K$, $K_1 = K \setminus I$, $\arg J_K$ *est compatible avec* $\arg J_I$ et $V_{IK}^{\gamma\gamma'}$ *est un opérateur D-asymptotique quasi identique.*

Cette proposition se prouve comme la proposition 2.2 et le lemme 3.5, ou encore en se servant de l'application canonique associée au hamiltonien H_I (exemple 2.1, p. 491).

La définition de $V_{IK}^{\gamma\gamma'}$ est correcte au sens qu'il n'existe qu'un seul opérateur satisfaisant l'équation (4.5), ce qui résulte du caractère monomorphe de l'opérateur canonique local. Bien plus, il est aisé de remarquer que $V_{IK}^{\gamma\gamma'}$ est indépendant du choix des champs de vecteurs $\partial/\partial l$ et des branches compatibles des fonctions $\arg J_I$ et $\arg J_K$. En effet, de la définition de l'opérateur de translation, on a

$$V_{IK}^{\gamma\gamma'} V_{KJ}^{\gamma'\gamma''} \varphi = V_{IJ}^{\gamma\gamma''} \varphi,$$

pour tout triple de γ-cartes admissibles (u, π_γ^I), $(u', \pi_{\gamma'}^K)$, $(u'', \pi_{\gamma''}^J)$ et tout $\varphi \in \mathscr{A}$ $(u \cap u' \cap u'')$. En particulier $V_{KI}^{\gamma\gamma'}$ est le réciproque de $V_{IK}^{\gamma\gamma'}$.

3. Définition d'un opérateur canonique sur (Λ^n, r^n). Considérons une variété lagrangienne Λ^n à germe complexe r^n et fixons les objets suivants:

(1) un γ-atlas admissible, c'est-à-dire composé de cartes admissibles $\{w_j, \pi_{\gamma(j)}^{I(j)}\}$, tel que le recouvrement d'un voisinage de l'ensemble Γ est localement fini. Appelons un tel atlas *atlas pondéré*;

(2) une subdivision «pondérée» C^∞-différentiable de l'unité $\{\rho_j\}$

$$\Sigma \rho_j = 1, \ \operatorname{supp} \rho_j \subset w_j;$$

(3) n champs de vecteurs complexes $\partial/\partial l = \partial/\partial l_1, \ldots, \partial/\partial l_n)$ sur Λ^n commutables linéairement indépendants en tout point. Signalons que ces champs existent toujours: nous pouvons poser par exemple

$$\frac{\partial}{\partial l} = \frac{\partial}{\partial (p + iq)};$$

(4) l'ensemble des branches continues compatibles $\arg J_I|_{\Omega_I \cap \Gamma}$ (I parcourt toutes les parties de l'ensemble $(1, \ldots, n)$). Donc, la classe de cohomologie $\operatorname{Ind}_{\Gamma, \partial/\partial l}$ (mod 2) est triviale.

Définissons l'opérateur canonique

$$\mathscr{K} : \mathscr{A}(\Lambda^n, r^n) \to \mathscr{A}(\mathbf{R}^n)$$

par la formule

$$\mathscr{K}\varphi = \sum_j \mathscr{K}_{I(j)}^{\gamma(j)} \rho_j \varphi. \tag{4.6}$$

A noter que le nombre de termes non nuls de cette somme est fini.

Proposition 4.4. *Soient* $\varphi \in \mathscr{A}(\Lambda^n, r^n)$ *et* $\{u_k, \pi_{\gamma(n)}^{I(n)}\}$ *un* γ*-atlas admissible dans un voisinage de supp* φ *et soit* $\{e_k\}$ *une subdivision* C^∞*-différentiable de l'unité subordonnée au recouvrement* $\{u_k\}$. *Alors*

$$\mathscr{K}\varphi = \sum_{j,k} \mathscr{K}_{I_k}^{\gamma_k} V_{I(j)I_k}^{\gamma_j\gamma_k} \rho^j e^k \varphi.$$

Démonstration. De la définition de l'opérateur de transport il s'ensuit immédiatement que

$$\mathscr{K}_{I_k}^{\gamma_k} \cdot V_{I(j)I_k}^{\gamma(j)\gamma_k} \rho_j e_k \varphi = \sum_j \mathscr{K}_{I(j)}^{\gamma(j)} \rho_j \sum_k e_k \varphi = \sum_j \mathscr{K}_{I(j)}^{\gamma(j)} \rho_j \varphi = \mathscr{K}\varphi.$$

Remarque 4.1. Nous supposerons dans la suite l'existence d'une S-action sur Λ^n (ou dans un petit voisinage de Γ). Cette hypothèse est équivalente à la trivialité d'une classe de cohomologie sur Λ^n. En effet, soit $\{u_j\}$ un recouvrement local fini de Γ par des sous-ensembles ouverts vérifiant la condition: si $u_j \cap u_k \cap \Gamma \neq \varnothing$, alors $\oint p\,dq = 0$ pour tout chemin fermé contenu dans $u_j \cap u_k$. Choisissons un point central $\alpha^j \in u_j$, $\forall j$, et posons

$$\delta_{jk} = \frac{1}{\pi h} \oint_{l[\alpha^j, \alpha^k]} p\,dq \pmod 2,$$

où $l[\alpha^j, \alpha^k]$ est un chemin de $u_j \cap u_k$ reliant α^j à α^k. La famille $\{\delta_{jk}\}$ définit un cocycle (dépendant de h) à coefficients dans un préfaisceau identique à celui de la classe Ind_Γ (mod 2). Ce faisceau induit sur Λ^n une classe de cohomologie que nous allons désigner par $\frac{1}{\pi h} \oint_\Gamma p\,dq$. Si h est un paramètre continu, il existe une S-action conditionnée par la trivialité de cette classe de cohomologie pour tous les $h > 0$.

Si la S-action n'existe pas au voisinage de Γ, la condition

$$\frac{1}{\pi h} \oint_\Gamma p\,dq = 0 \pmod 2$$

définit un ensemble M de valeurs (admissibles) du paramètre h. Si 0 est un point limite de l'ensemble M, on ne peut définir l'opérateur canonique que pour $h \in M$.

4. Commutation d'un opérateur canonique à un hamiltonien.

Proposition 4.5. *Un opérateur canonique sur* Λ^n *est un monomorphisme.*

Démonstration. Soit $\chi(x)$ une fonction de classe C_0^∞ égale à 1 pour $|x| < 1$ et nulle pour $|x| > 2$. Posons

$$\chi_\varepsilon(x) = \chi(\varepsilon^{-1}x), \qquad \cdot_\varepsilon(\alpha) = \chi_\varepsilon(q(\alpha)), \qquad f_\varepsilon(\alpha) = \chi_\varepsilon(p(\alpha)).$$

Soient φ un élément non nul de $\mathscr{A}(\Lambda^n, r^n)$ et $\varphi_0 \in \operatorname{supp}\varphi$. Sans nuire à la généralité, on peut admettre que $p(\alpha_0)=q(\alpha_0)=0$. Supposons que $\mathscr{K}\varphi=0$. Pour tout $\varepsilon>0$, on a $\chi_\varepsilon \mathscr{K}\varphi=0$ et $\chi_\varepsilon \mathscr{K}(1-e_{2\varepsilon})\varphi=0$, ce qui résulte de la proposition 4.1. La définition de l'opérateur canonique entraîne

$$\chi_\varepsilon \mathscr{K} e_{2\varepsilon}\varphi=\sum_j \chi_\varepsilon \mathscr{K}^{\gamma(j)}_{I(j)} \rho_j e_{2\varepsilon}\varphi=\sum_j \mathscr{K}^{\gamma(j)}_{I(j)} \hat{\chi}^{(j)}_\varepsilon \rho_j e_{2\varepsilon}\varphi=0,$$

où $\hat{\chi}^{(j)}_\varepsilon$ est un opérateur différentiel D-asymptotique laissant invariant le monôme principal en α_0. La formule obtenue entraîne

$$\sum_j F_{x\to\xi} \mathscr{K}^{\gamma(j)}_{I(j)} \hat{\chi}^{(j)}_\varepsilon \rho_j e_{2\varepsilon}\varphi=0.$$

Posons $\tilde{\mathscr{K}}^\gamma_I=F_{x\to\xi}\mathscr{K}^\gamma_I$. Puisque l'opérateur $\tilde{\mathscr{K}}^\gamma_I$ peut être représenté par la formule

$$(\tilde{\mathscr{K}}^\gamma_I\psi)(\xi)=F_{X_I\to\xi_I}\left\{e^{\frac{i}{h}\Phi^\gamma_I(\alpha)} e^{-\frac{i}{2}\arg J_I(\alpha)} |J_I(\alpha)|^{-1/2} L^\gamma_I\varphi(\alpha)\big|_{\alpha=(\pi^I_\gamma)^{-1}(x_I,\xi_{\bar{I}})}\right\},$$

la proposition 4.1 reste en vigueur lorsqu'on remplace $\mathscr{K}^\gamma_I$ par $\tilde{\mathscr{K}}^\gamma_I$ et l'application $\alpha\to q(\alpha)$ par $\alpha\to p(\alpha)$. Donc

$$\chi_\varepsilon \sum_j \tilde{\mathscr{K}}^{\gamma(j)}_{I(j)} f_{2\varepsilon}\hat{\chi}^{(j)}_\varepsilon \rho_j e_{2\varepsilon}\varphi=0.$$

En commutant χ_ε à $\tilde{\mathscr{K}}^{\gamma(j)}_{I(j)}$ et en se servant de la transformation inverse de Fourier, on obtient

$$\sum_j \tilde{\mathscr{K}}^{\gamma(j)}_{I(j)} \bar{\chi}^{(j)} f_{2\varepsilon}\hat{\chi}^{(j)}_\varepsilon e_{2\varepsilon}\rho_j\varphi=0, \tag{4.9}$$

où $\bar{\chi}^{(j)}_\varepsilon$ est un opérateur différentiel D-asymptotique laissant invariant le monôme principal en α_0.

Soit ε une petite quantité telle que $\operatorname{supp}(f_{2\varepsilon}\ e_{2\varepsilon})$ est une γ-carte (u, π^I_γ). Alors, la formule (4.9) peut être mise sous la forme

$$\mathscr{K}^{\gamma_0}_{I_0}\sum_j V^{\gamma_0\gamma(j)}_{I_0 I(j)} \bar{\chi}^{(j)}_\varepsilon f_{2\varepsilon}\hat{\chi}^{(j)}_\varepsilon e_{2\varepsilon}\rho_j\varphi=0.$$

L'élément

$$\psi=\sum_j V^{\gamma_0\gamma(j)}_{I_0 I(j)} \bar{\chi}^{(j)}_\varepsilon f_{2\varepsilon}\hat{\chi}^{(j)}_\varepsilon e_{2\varepsilon}\rho_j\varphi$$

ne s'annule pas, puisque les classes φ et ψ possèdent des représentants ayant les mêmes monômes principaux. Mais ceci contredit le fait que $\mathscr{K}^\gamma_I$ est un monomorphisme. Ce qui prouve la proposition.

Soit $\mathscr{H}(p, x)\in S^\infty(\mathbf{R}^{2n})$. Puisque l'opérateur $\mathscr{H}\left(\begin{smallmatrix}1 & 2\\ p, & x\end{smallmatrix}\right)$ conserve la propriété d'une série h-asymptotique de s'annuler, il engendre un opérateur de $\mathscr{A}(\mathbf{R}^n)$ dans lui-même, que nous désignerons aussi par $\mathscr{H}\left(\begin{smallmatrix}1 & 2\\ p, & x\end{smallmatrix}\right)$.

Théorème 4.1. *Soient donnés un opérateur $\mathscr{H}\in S^\infty(\mathbf{R}^{2n})$ et un opérateur canonique $\mathscr{K}$ sur (Λ^n, r^n). Il existe alors un opérateur $P_{\mathscr{H}}$ de $\mathscr{A}(\Lambda^n, r^n)$ dans*

lui-même tel que

$$\mathscr{H}\begin{pmatrix}1 & 2\\ p, & x\end{pmatrix}\mathscr{K}=\mathscr{K}P_{\mathscr{H}}.$$

Pour prouver ce théorème, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 4.2. *Tout opérateur D-asymptotique quasi identique est un automorphisme de* $\mathscr{A}(\Lambda^n, r^n)$ *dans lui-même.*

Démonstration. Soit V un opérateur D-asymptotique quasi identique qui est un endomorphisme de $\mathscr{A}(\Lambda^n, r^n)$. Il est clair que V est un monomorphisme. Reste à prouver que V est arbitraire.

Soit $\varphi\in\mathscr{A}(\Lambda^n, r^n)$. Il faut montrer que l'équation $V\psi=\varphi$ admet une solution. Soit $\hat{\varphi}$ une série D-asymptotique représentant φ. Cherchons la série D-asymptotique représentant ψ sous la forme $\hat{\psi}=\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j$. Posons $\psi_0=m[\hat{\varphi}]$ et définissons ψ_j, $j=1, 2, \ldots$, par la formule récurrentielle

$$\psi_j=m\left[\hat{\varphi}-\sum_{k=0}^{j-1}V\psi_k\right].$$

Il est clair que la série $\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j$ est D-asymptotique.

A noter que puisque

$$\psi_{j+1}=m\left[\hat{\varphi}-\sum_{k=0}^{j-1}V\psi_k-Vm\left[\hat{\varphi}-\sum_{k=0}^{j-1}V\psi_k\right]\right]$$

et que l'opérateur V est quasi identique, on a pour tout j l'une au moins des trois propositions suivantes:

(1) $\operatorname{ord}\psi_{j+1}>\operatorname{ord}\psi_j$;

(2) le type de ψ_{j+1} est strictement supérieur à celui de ψ_j;

(3) $\psi_j=0$ (dans ce cas $\psi_k=0$ pour $k\geqslant j$).

Etant donné que le type d'un monôme est $\leqslant$ à son ordre, pour tout N naturel, il existe un j_0 tel que $\operatorname{ord}\psi_j\geqslant\frac{N}{2}$ si $j\geqslant j_0$. Nous avons donc prouvé que la série envisagée est D-asymptotique.

Montrons, par ailleurs, que $V\tilde{\psi}\approx\hat{\varphi}$. Soit $j_0(N)$ une fonction à valeurs entières dépendant d'un entier N tel que $\operatorname{ord}\psi_j\geqslant\frac{N}{2}$ pour $j\geqslant j_0(N)$. Alors

$$\operatorname{ord}\left(V\sum_{j=j_0(N)}^{\infty}\psi_j\right)\geqslant\frac{N}{2}$$

et

$$\operatorname{ord}\left(V\sum_{j=0}^{j_0(N)-1}\psi_j-\hat{\varphi}\right)=\operatorname{ord}(-\psi_{j_0}(N))\geqslant\frac{N}{2},$$

de sorte que $\operatorname{ord}(V\tilde{\psi}-\hat{\varphi})\geqslant N/2$. Donc $\operatorname{ord}(V\tilde{\psi}-\hat{\varphi})=\infty$, ce qui achève la démonstration.

Remarque. Il est immédiat de vérifier que si V est un opérateur quasi identique, il en est de même de V^{-1}.

Démonstration du théorème 4.1. Soit (u, π_γ^I) une carte γ-admissible et soit $\varphi \in \mathscr{A}(u)$. En appliquant la formule de commutation d'un hamiltonien et d'un opérateur de multiplication par une exponentielle complexe et de la transformation de Fourier, on trouve

$$\mathscr{H}\begin{pmatrix}1 & 2\\ p, & x\end{pmatrix} \mathscr{K}_I^\gamma \varphi = F^{-1}_{\xi_I \to \alpha_I}\left[e^{\frac{i}{h}\Phi_I^\gamma(\alpha)}\, \hat{\mathscr{H}}\, \frac{e^{-\frac{i}{h}\arg J_I(\alpha)}}{\sqrt{|J_I(\alpha)|}}\, L_I^\gamma \varphi(\alpha)\right]_{\alpha=(\pi_\gamma^I)^{-1}(x_I,\xi_I)},$$

où $\hat{\mathscr{H}}$ est un opérateur différentiel D-asymptotique défini par (2.24) (relevé à Λ^n par le difféomorphisme π_γ^I). Donc

$$\mathscr{H}\begin{pmatrix}1 & 2\\ p, & x\end{pmatrix} \mathscr{K}_I^\gamma = \mathscr{K}_I^\gamma P^I \mathscr{H}^\gamma, \tag{4.10}$$

où

$$P^I \mathscr{H}^\gamma = R_I^\gamma \sqrt{J_I}\, \hat{\mathscr{H}} \frac{1}{\sqrt{J_I}}, \qquad \sqrt{J_I} \overset{\text{déf}}{=} |J_I|^{1/2} e^{\frac{i}{h}\arg J_I},$$

R_I^γ est le réciproque de l'opérateur L_I^γ dans le groupe des automorphismes $\mathscr{A}(u)$.

De (4.10) on déduit que pour tout $\varphi \in \mathscr{A}(\Lambda^n, r^n)$ il existe une famille $\{\psi_j\}$ d'éléments de $\mathscr{A}(\Lambda^n, r^n)$ telle que

$$\mathscr{H}\begin{pmatrix}1 & 2\\ p, & x\end{pmatrix} \mathscr{K}\varphi = \sum_j \mathscr{K}_{I(j)}^{\gamma(j)} \psi_j,\ \psi_j \in \mathscr{A}(u_j).$$

Montrons qu'il existe un élément $\varphi \in \mathscr{A}(\Lambda^n, r^n)$ vérifiant la condition

$$\sum_j \mathscr{K}_{I(j)}^{\gamma(j)} \psi_j = \mathscr{K}\varphi. \tag{4.11}$$

A cet effet, il suffit de trouver un élément $\overline{\psi}_j \in \mathscr{A}(w_j)$ tel que pour tout j l'on ait

$$\mathscr{K}_{I(j)}^{\gamma(j)} \psi_j = \mathscr{K}\overline{\psi}_j. \tag{4.12}$$

Mettons (4.12) sous la forme suivante

$$\mathscr{K}_{I(j)}^{\gamma(j)} \psi_j = \sum_i \mathscr{K}_{I(j)}^{\gamma(j)} V_{I(i)\,I(j)}^{\gamma(i)\,\gamma(j)} \rho_j \overline{\psi}_j. \tag{4.13}$$

La dernière équation équivaut à la suivante:

$$\mathscr{A}_j \overline{\psi}_j = \psi_j, \tag{4.14}$$

où

$$\mathscr{A}_j = \sum_i V_{I(i)\,I(j)}^{\gamma(i)\,\gamma(j)} \rho_i.$$

A noter que $\mathscr{A}_j$ est un opérateur quasi identique, donc l'équation (4.14) admet une solution d'après le lemme 4.2.

Nous avons donc montré que pour tout $\varphi \in \mathscr{A}(\Lambda^n, r^n)$, il existe un $\psi \in \mathscr{A}(\Lambda^n, r^n)$, solution de l'équation $\mathscr{H}\binom{1\ 2}{p,\ x} \mathscr{K}\varphi = \mathscr{K}\psi$, l'unicité de ψ résultant du fait que $\mathscr{K}$ est un monomorphisme. Il est évident que l'opérateur $P_{\mathscr{K}}$ qui associe φ à ψ est linéaire.

5. Opérateur canonique sur la famille $\{\Lambda_t^n, r_t^n\}$. Soit $\{\Lambda_t^n, r_t^n\}$, $0 \leqslant t \leqslant T$, une famille de variétés lagrangiennes à germe complexe, image de (Λ^n, r^n) par une famille d'applications canoniques complexes engendrées par le hamiltonien $\mathscr{H}$. Soit M^{n+1} une variété à $n+1$ dimensions (à germe complexe $w(\alpha, t)$, $z(\alpha, t)$, de dissipation $D(\alpha, t)$ et de potentiel $E(\alpha, t)$) associée à $\{\Lambda_t^n, r_t^n\}$. L'opérateur canonique $\mathscr{K}_{M^{n+1}}$ sur M^{n+1} se définit comme sur une variété Λ^n aux modifications suivantes près :

(1) l'espace $\mathscr{A}(\Lambda^n, r^n)$ doit être remplacé par $\mathscr{A}(M^{n+1})$, et l'espace $\mathscr{A}(\mathbf{R}^n)$, par $\mathscr{A}(\mathbf{R}^n \times [0, T])$. La définition est évidente sur ces nouveaux espaces. Signalons l'inclusion naturelle de $\mathscr{A}(\Lambda^n, r^n)$ dans $\mathscr{A}(M^{n+1})$;

(2) les champs de vecteurs complexes $\partial/\partial l$ doivent être choisis de telle sorte que leurs expressions dépendent uniquement de α;

(3) dans la définition des opérateurs canoniques locaux, il faut remplacer les difféomorphismes π_γ^I par Π_γ^I (cf. § 4, chapitre VI).

Il est aisé de vérifier que les opérateurs canoniques définis sur M^{n+1} sont justiciables de propositions identiques aux propositions 4.1, 4.2, 4.4, 4.5 et au théorème 4.1.

Signalons tout particulièrement la formule de commutation de l'opérateur canonique $\mathscr{K}_{M^{n+1}}$ à un opérateur pseudo-différentiel de la forme

$$\hat{H} = -ih\frac{\partial}{\partial t} + \mathscr{H}\binom{1\ 2}{p,\ x,\ t,\ h}, \quad \mathscr{H} \in \mathscr{S}^\infty, \tag{4.15}$$

où

$$\mathscr{H}(p, q, t, 0) = \mathscr{H}^0(p, q, t). \tag{4.16}$$

On dira qu'une variété M^{n+1} est *subordonnée* à un opérateur $\hat{H}$ défini par (4.15) si est remplie la condition (4.16).

Théorème 4.2. *Si M^{n+1} est subordonnée à un opérateur $\hat{H}$ défini par* (4.15), *alors*

$$\hat{H}\mathscr{K}_{M^{n+1}} = -ih\mathscr{K}_{M^{n+1}}\left(\frac{d}{dt} + G(p, q, t)\right)\varkappa,$$

où $\varkappa$ est un opérateur quasi identique, et

$$G(p, q, t) = -\frac{1}{2}\operatorname{tr}\mathscr{H}_{pq}^0(p, q, t) + i\mathscr{H}_h(p, q, t, 0).$$

Démonstration. On a

$$\hat{H}\mathscr{K}_{M^{n+1}} = \hat{H}\sum_j \mathscr{K}_{I(j)}^{\gamma(j)}\rho_j = \sum_j \mathscr{K}_{I(j)}^{\gamma(j)}\overline{H}_j\rho_j, \tag{4.17}$$

où $\overline{H}_j$ apparaît lors de la commutation de l'opérateur $\hat{H}$ à l'opérateur

canonique local $\mathscr{K}_{I(j)}^{\gamma(j)}$. De (2.24) et des résultats du § 6, chapitre VI, il vient

$$\overline{H}_j = -ih\left(\frac{d}{dt} + G + A_j\right), \tag{4.18}$$

où A_j est un opérateur différentiel D-asymptotique de classe $\mathscr{P}$.

Soit P un opérateur associant à tout élément $\varphi \in \mathscr{A}(M^{n+1})$ la solution ψ de l'équation

$$\hat{H}\,\mathscr{K}_{M^{n+1}}\varphi = \mathscr{K}_{M^{n+1}}\psi \tag{4.19}$$

(on rappelle que cette équation admet une seule solution). Posons

$$\psi = -ih\frac{d\varphi}{dt} - ih\varepsilon\varphi - ihG\varphi, \tag{4.20}$$

où ε est le paramètre inconnu. En portant $\psi = P\varphi$ dans (4.19) et en calculant les termes du premier membre de (4.19) à l'aide des formules (4.17) et (4.18), on obtient l'équation suivante pour ε:

$$\mathscr{K}_{M^{n+1}}\varepsilon\varphi = \sum_j \mathscr{K}_{I(j)}^{\gamma(j)}\left[\rho_j\varphi + A_j\rho_j\varphi\right]. \tag{4.21}$$

Soit $\{V_j\}$ une famille d'opérateurs quasi identiques tels que

$$\mathscr{K}_{I(j)}^{\gamma(j)}(\dot{\rho}_j\varphi + A_j\rho_j\varphi) = \mathscr{K}_{\Lambda^{n+1}} V_j(\dot{\rho}_j\varphi + A_j\rho_j\varphi).$$

L'équation (4.21) peut être mise sous la forme

$$\varepsilon\varphi = \sum_j V_j(\dot{\rho}_j\varphi + A_j\rho_j\varphi).$$

Comme $\sum_j \dot{\rho}_j = 0$ pour $\chi = \sum_j V_j\rho_j\varphi$, l'une des deux propositions suivantes a lieu:

(1) $\operatorname{ord}\chi \leqslant \operatorname{ord}\varphi$;

(2) $\operatorname{ord}\chi = \operatorname{ord}\varphi$ mais $\operatorname{typ}\chi > \operatorname{typ}\varphi$.

Ces propositions restent en vigueur si l'on remplace χ par $I = \sum_j A_j\rho_j\varphi$, où I est un opérateur de $\mathscr{A}(M^{n+1})$ dans lui-même et engendré par l'opérateur d'intégration par rapport à t:

$$f(\alpha, t) \to \int_0^t f(\alpha, \tau)\,d\tau.$$

Donc

$$\varkappa = 1 + e^{-\int_0^t G\,dt} I e^{\int_0^t G\,dt}\varepsilon$$

est un opérateur quasi identique. Par ailleurs, $\varkappa$ satisfait la condition

$$\frac{d}{dt} + G + \varepsilon = \left(\frac{d}{dt} + G\right)\varkappa.$$

Ce qui prouve le théorème.

L'équation $\left(\frac{d}{dt}+G\right)\varkappa=0$, où $\varkappa$ et G sont les mêmes que dans le théorème 4.2, sera appelée *équation de transport*.

Pour tout $\varphi\in\mathscr{A}(M^{n+1})$, on désignera par $\varphi|_{t=0}$ l'élément de $\mathscr{A}(\Lambda^n, r^n)$ engendré par $\sum\varphi_j|_{t=0}$, où $\sum_{j\in J}\varphi_j$ est une série D-asymptotique représentant φ. La définition de l'élément $\varphi|_{t=0}$ est manifestement correcte, puisqu'elle ne dépend pas du choix du représentant de φ. De façon analogue, définissons $\psi|_{t=0}\in\mathscr{A}(\mathbf{R}^n)$ pour tout $\psi\in\mathscr{A}(\mathbf{R}^n\times[0, T])$. Posons ensuite

$$\mathscr{K}_{\Lambda^n}(\varphi|_{t=0}) \stackrel{\text{déf}}{=} (\mathscr{K}_{M^{n+1}}\varphi)|_{t=0}.$$

Il est immédiat de voir que $\mathscr{K}_{\Lambda^n}$ est un opérateur canonique sur (Λ^n, r^n). On dira que $\mathscr{K}_{M^{n+1}}$ est *corellé* à $\mathscr{K}_{\Lambda^n}$. Si un opérateur canonique $\mathscr{K}$ est défini sur (Λ^n, r^n), il existe toujours un opérateur canonique $\mathscr{K}_{M^{n+1}}$ correlé à $\mathscr{K}$ (pour construire $\mathscr{K}_{M^{n+1}}$ il suffit de choisir convenablement les branches des arguments de phase des jacobiens, les atlas pondérés, la subdivision pondérée de l'unité et les champs de vecteurs $\partial/\partial l$).

Considérons le problème de Cauchy pour l'équation de transport:

$$\left(\frac{d}{dt}+G\right)\varkappa\varphi=0, \quad \varphi|_{t=0}=\varphi_0.$$

La solution de ce problème est

$$\varphi=\varkappa^{-1}V^{-1}\varphi_0,$$

où V est un opérateur quasi identique dans $\mathscr{A}(\Lambda^n, r^n)$ défini par

$$V\psi=(\varkappa^{-1}\psi)|_{t=0}.$$

La proposition suivante est une conséquence directe du théorème 4.2.

Théorème 4.3. *Le problème de Cauchy*

$$-ih\frac{\partial\psi}{\partial t}+\mathscr{H}\left(\overset{1}{p}, \overset{2}{x}, t, h\right)\psi=0, \qquad \psi|_{t=0}=\mathscr{K}_{\Lambda^n}\varphi_0$$

admet une solution asymptotique

$$\psi=\mathscr{K}_{M^{n+1}}\varphi,$$

où φ est solution du problème (4.23).

Signalons en conclusion que le théorème 4.3 peut être généralisé de manière évidente au cas où le hamiltonien $\mathscr{H}$ dépend d'un paramètre ω à m dimensions.

§ 5. Démonstration du théorème fondamental

On se propose de démontrer dans sa forme la plus simple le théorème fondamental de quasi-inversibilité énoncé au § 4 du chapitre VI. Pour ne pas

alourdir la démonstration, les propositions auxiliaires seront formulées sous forme de lemmes et prouvées dans le Complément qui suit immédiatement le § 5. Pour la commodité, on utilisera les notations suivantes: si $a=(a_1, \ldots, a_n)$ et $\rho=(\rho_1, \ldots, \rho_n)$ sont des ensembles de nombres, on posera pour tout $\lambda>0$

$$a\lambda^{\rho} \stackrel{\text{déf}}{=} (a_1\lambda^{\rho_1}, \ldots, a_n\lambda^{\rho_n}).$$

Si $A=(A_1, \ldots, A_n)$ et $B=(B_1, \ldots, B_m)$ sont des opérateurs vectoriels et si les composantes B_i commutent entre elles, on écrira

$$f\begin{pmatrix}1 & 2\\ A, & B\end{pmatrix} \stackrel{\text{déf}}{=} f\begin{pmatrix}1 & & n & n+1\\ A_1, & \ldots, & A_n, & B\end{pmatrix}.$$

Soient $f(x, \alpha)$ le symbole de l'opérateur dont on cherche la suite quasi inverse, $L_j(\eta, x, \beta)$ le symbole de l'opérateur différentiel $\hat{L}_j=L_j\left(i\frac{\partial}{\partial x}, x, -i\frac{\partial}{\partial \alpha}\right)$ qui est la représentation ordonnée de l'opérateur A_j. D'après les conditions du théorème, la fonction $f(L(\eta, x, \beta), \alpha)$ est asymptotiquement ρ-quasi homogène par rapport à x et β, où $\rho=(\rho_1, \ldots, \rho_{n+m})$. On s'assure sans peine que $L_j(0, x, 0)=x_j$, puisque $f(x, \alpha)$ est asymptotiquement ρ'-quasi homogène par rapport à x, où $\rho'=(\rho_1, \ldots, \rho_n)$.

Le lemme 3 du Complément affirme que la quasi-inversion revient à chercher une fonction $g_N(x, \alpha)$ vérifiant l'équation (9.4) de l'Introduction dans laquelle on aura préalablement remplacé 1 par une fonction $F(x, \alpha)$ quasi homogène par rapport à x de degré ρ', de support dans un voisinage de l'ensemble des zéros de f_0. Soit S_{ρ}^{n-1} la quasi sphère unité de $\mathbf{R}^n$

$$S_{\rho}^{n-1}=\{x\in\mathbf{R}^n \mid \Lambda_0(x)=1\},$$

où $\Lambda_0(x)=\left(\sum_j x^{2/\rho_j}\right)^{1/2}$. En se servant de la décomposition de l'unité, on peut supposer accessoirement que le support de $F(x, \alpha)$ est contenu dans $S_{\rho}^{n-1}\times M^m$ et est suffisamment petit en ce sens qu'existe $0<T<\tau'(q^0, \omega, 0, 0)$ et

$$\tilde{\tilde{H}}(p(q^0, \omega, p^0, \eta, T), q(q^0, \omega, p^0, \eta, T), \omega, \eta)<0$$

pour $(q^0, \omega)\in\operatorname{supp} F\big|_{S_{\rho}^{n-1}\times M^m}(q^0, \omega, p^0, \eta)\in\Omega_{\varepsilon}$ (voir condition d'absorption). D'après la règle de réduction du problème fondamental, il suffit de trouver pour tout entier naturel N une fonction $\psi_N(\alpha, \eta, x, t)\in C_{\mathcal{L}}^{\infty}$ nulle dans un voisinage de 0 telle que pour tout t fixe soient satisfaites les conditions suivantes:

$$-i\Lambda_0^{r-1}\begin{pmatrix}1\\ x\end{pmatrix}\frac{\partial\psi_N}{\partial t}\left(\begin{matrix}2\\ \alpha,\end{matrix}\ i\frac{\partial}{\partial x}, \begin{matrix}1\\ x,\end{matrix}\ t\right)+$$

$$+\left[\!\left[f\left(\overset{1}{L}_1, \ldots, \overset{n}{L}_n, \overset{n+1}{\alpha}\right)\right]\!\right] \psi_N\left(\overset{2}{\alpha}, i\frac{\overset{2}{\partial}}{\partial x}, \overset{1}{x}, t\right) =$$

$$= \mathscr{B}_N\left(\overset{2}{\alpha}, i\frac{\overset{2}{\partial}}{\partial x}, \overset{1}{x}, t\right), \quad (5.1)$$

$$\mathscr{B}_N(\alpha, x, \eta, t) \in O_{\mathscr{L}}(|x|^{-N}) \quad (5.2)$$

uniformément en t:

$$\psi_N(\alpha, \eta, x, 0) = F(x, \alpha)\cdot\rho(\eta) \quad \text{pour} \quad |x| > c, \quad (5.3)$$

où $\rho(\eta)=0$ pour $|\eta|>\varepsilon$ et $\rho(\eta)=1$ au voisinage de 0. Remarquons que $F\left(\overset{1}{x}, \overset{2}{\alpha}\right)\rho\left(i\frac{\overset{2}{\partial}}{\partial x}\right)1 = F(x, \alpha) + O_{\mathscr{L}}(|x|^{-\infty})$. On peut obtenir cette formule en intégrant par parties le second membre de l'équation

$$F\left(\overset{1}{x}, \overset{2}{\alpha}\right)\rho\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\cdot 1 = F(x, \alpha) +$$

$$+(2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^{2n}} e^{i\langle\eta, y-x\rangle}[-1+\rho(\eta)]F(y, \alpha)\,d\eta\,dy.$$

Remplaçons par ailleurs $\Lambda_0(x)$ par une fonction $\Lambda(x)$ de C^∞ telle que $\Lambda(x)>0$ et $\Lambda(x)=\Lambda_0(x)$ pour x assez grand.

Transformons maintenant le hamiltonien $f\left(\overset{1}{L}, \overset{2}{\alpha}\right)$. Remarquons tout d'abord que la condition de quasi-homogénéité asymptotique de la fonction $\varphi(\xi)$, $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, peut être mise sous la forme suivante: pour tous les $\lambda>0$

$$\varphi(\lambda^{\rho_1}\xi_1, \ldots, \lambda^{\rho_n}\xi_n) = \sum_{j=0}^{k}\lambda^{r_j}\varphi_j(\xi) + \lambda^{r_0-1}\varphi_{k+1}(\xi, \lambda),$$

où $r_0>\ldots>r_k$, φ_j est quasi homogène de degré r_j pour $j=0, \ldots, k$ et $\varphi_{k+1}\in C^\infty_{\mathscr{L}}$ est bornée avec toutes ses dérivées. Donc toute fonction $\varphi(\xi)$ asymptotiquement quasi homogène peut être mise sous la forme

$$\varphi(\xi) = \lambda^{r_0}\left\{\sum_{j=0}^{k}\lambda^{r_j-r_0}\varphi_j(\lambda^{-\rho}\xi) + \lambda^{-1}\varphi_{k+1}(\lambda^{-\rho}\xi, \lambda)\right\}. \quad (5.4)$$

Posons $\xi_j=r_0-r_j$, $j=1, 2, \ldots, k$. Ainsi, à toute fonction asymptotiquement quasi homogène est associé un ensemble de nombres $\varepsilon=(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$ strictement positifs.

Utilisons la représentation (5.4) pour mettre la fonction $f(L(\eta, x, \beta), \alpha)$ sous la forme

$$f(L(\eta, x, \beta), \alpha) = \lambda^{r}\left[\mathscr{H}_1(\alpha, \eta, \beta, \omega, x) + \lambda^{-1}\mathscr{H}_2(\alpha, \eta, \beta, \omega, \lambda)\right], \quad (5.5)$$

où $\omega=\lambda^{-\rho}x$, $x=(\lambda^{-\varepsilon_1}, \ldots, \lambda^{-\varepsilon_k})$, $\mathscr{H}_1$ et $\mathscr{H}_2$ sont de classe $C^\infty_{\mathscr{L}}$, $\operatorname{Im}\mathscr{H}_1<0$ et $\mathscr{H}_2$ est bornée avec toutes ses dérivées par rapport à α, η, β, ω lorsque $\lambda\to\infty$.

En tenant compte de (5.5) et en appliquant le lemme 2 du Complément, on obtient la représentation suivante du hamiltonien

$$f\left(\overset{1}{L}, \overset{2}{\alpha}\right) = \overset{1}{\Lambda^r}\left[\!\!\left[\mathscr{H}_1\left(\overset{2}{\alpha}, i\frac{\overset{2}{\partial}}{\partial x}, -i\overset{1'}{\Lambda^{-1}}\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial \alpha}, x\overset{11'}{\Lambda^{-\rho}}, \overset{1'}{\Lambda^{-\varepsilon}}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(-i\overset{1'}{\Lambda^{-1}}\right)\mathscr{H}_2\left(\overset{2}{\alpha}, i\frac{\overset{2}{\partial}}{\partial x}, -i\overset{1'}{\Lambda^{-1}}\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial \alpha}, x\overset{11'}{\Lambda^{-1}}, \overset{1'}{\Lambda}\right)\right]\!\!\right], \qquad (5.6)$$

où $\varepsilon > 0$, $\mathscr{H}_3(\alpha, \eta, \beta, x, \lambda) \in C^\infty_{\mathscr{L}}$ est bornée pour $\lambda \to \infty$ avec toutes ses dérivées par rapport à α, η, β, x et $\Lambda^{-\varepsilon} = (\Lambda^{-\varepsilon_1}, \ldots, \Lambda^{-\varepsilon_k})$.

Pour prouver les relations (5.2) pour le hamiltonien $f\left(\overset{1}{L}, \overset{2}{\alpha}\right)$ représenté sous la forme (5.6), on se servira de la théorie de l'opérateur canonique sur une variété lagrangienne à germe complexe, développée dans ce chapitre. Posons

$$\mathscr{H}_0(X_0, X; P_0, P; \omega, \varkappa_1, \varkappa_2) \overset{\text{déf}}{=} \mathscr{H}_1(X_0, X, P_0, \omega + \Lambda^{1-\rho}P, \Lambda^{-\varepsilon}),$$

où

$$X_0 \in M^m,\ X = (X_1, \ldots, X_n) \in \mathbb{R}^n,\ P_0 \in \mathbb{R}^m,$$

$$P = (P_1, \ldots, P_n) \in \mathbb{R}^n,\ \omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$\varkappa_1 \overset{\text{déf}}{=} (\Lambda^{-\varepsilon_1}, \ldots, \Lambda^{-\varepsilon_k}),$$

$$\varkappa_2 \overset{\text{déf}}{=} (\Lambda^{1-\rho_1}, \ldots, \Lambda^{1-\rho_n}).$$

La fonction $\mathscr{H}_0$ dépend différentiablement des paramètres ω, $\varkappa_1$ et $\varkappa_2$ pour $\omega \in \mathbb{R}^n$ lorsque $\varkappa_1 \to 0$ et $\varkappa_2 \to 0$. Bien plus, lorsque $\varkappa_1, \varkappa_2 \to 0$, elle converge vers la fonction de Hamilton $\mathscr{H}$ associée à l'opérateur $f\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}\right)$ (ceci résulte de la définiton de la fonction de Hamilton donnée à la page (137).

Définissons $\mathscr{H}_0$ comme une fonction sur l'espace des phases

$$\{X_0, X; P_0, P\} \in (M^m \times \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^{n+m}.$$

Désignons l'espace $M^m \times \mathbb{R}^n$ par M^{m+n} et l'espace des phases par T^*M^{m+n}. Il est évident que M^{m+n} est une variété lagrangienne. De la condition de ρ-quasi-homogénéité asymptotique du hamiltonien, il résulte que $\operatorname{Im} \mathscr{H}_1 \leqslant 0$. Donc, $\operatorname{Im} \mathscr{H}_0 \leqslant 0$. Posons $H_0 = \operatorname{Re} \mathscr{H}_0$ et considérons le système de bicaractéristiques

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial X_0}{\partial t} = \frac{\partial H_0}{\partial P_0}(X_0, X, P_0, \omega + \varkappa_2 P, \varkappa_1), \quad X_0|_{t=0} = \alpha, \\
&\frac{\partial X_k}{\partial t} = \frac{\partial H_0}{\partial P_k}(X_0, X, P_0, \omega + \varkappa_2 P, \varkappa_1), \quad X_k|_{t=0} = \eta_k, \\
&\frac{\partial P_0}{\partial t} = -\frac{\partial H_0}{\partial X_0}(X_0, X, P_0, \omega + \varkappa_2 P, \varkappa_1), \quad P_0|_{t=0} = 0,
\end{aligned} \qquad (5.7)$$

$$\frac{\partial P_k}{\partial t} = -\frac{\partial H_0}{\partial X_k}(X_0, X, P_0, \omega + \varkappa_2 P, \varkappa_1), \; P_k|_{t=0} = 0,$$
$$k = 1, 2, \ldots, n.$$

Ce système admet une solution pour $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 0$, puisque la fonction limite $\mathscr{H} = \lim_{\Lambda \to \infty} \mathscr{H}_0$ vérifie les conditions d'absorption lorsque les paramètres du système (5.7) appartiennent au domaine Ω_ε. En appliquant donc les théorèmes de la théorie des perturbations, on trouve sans peine une solution asymptotique du système (5.7), c'est-à-dire que pour tout N assez grand il existe des fonctions X_0, X, P_0, P de classe C^∞ vérifiant le système (5.7) à $o(\Lambda^{-N})$ près.

Désignons par $g^t_{H_0 + i\tilde{H}_0}(\omega, \varkappa_1, \varkappa_2)$ l'application canonique correspondant à la solution asymptotique du système (5.7).

On s'assure immédiatement que toutes les propriétés du germe complexe ont lieu si l'on remplace la solution du système hamiltonien par la solution asymptotique du système (5.7).

D'où il résulte que la famille

$$(M_t^{m+n}, r_t^{m+n}) = g^t_{H_0 + i\tilde{H}_0}(M^{m+n}, 0), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

des images de la variété M^{m+n} par les applications $g^t_{H_0 + i\tilde{H}_0}(\omega, \varkappa_1, \varkappa_2)$ est une famille de variétés lagrangiennes à germe complexe dépendant différentiablement des paramètres $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$, $t \in [0, T]$ et de $\varkappa_1, \varkappa_2$. Identifions formellement la famille de variétés $\{M_t^{m+n}\}$ à la variété M^{m+n+1} de dimension $m+n+1$, qui de toute évidence dépend différentiablement de ω pour $\varkappa_1$ et $\varkappa_2$ assez petits.

Soit $\mathscr{K}^\Lambda$ un opérateur canonique sur la variété M^{m+n+1} à germe complexe r_t^{n+m}, où le paramètre h doit être remplacé par Λ^{-1}.

Ainsi qu'il résulte de (5.2), (5.3) et (5.4), pour résoudre le problème fondamental, il suffit de considérer le problème de Cauchy :

$$-i\Lambda^{-1}\frac{\partial \psi}{\partial t}\left(\overset{2}{\alpha}, i\frac{\partial}{\partial \overset{2}{x}}, \overset{1}{x}, t\right) + \left[\!\left[\overset{3}{\mathscr{H}_1} - i\Lambda \overset{1'}{\mathscr{H}_2}\right]\!\right]\psi\left(\overset{2}{\alpha}, i\frac{\partial}{\partial \overset{2}{x}}, \overset{1}{x}, t\right) = 0,$$
$$\psi\left(\overset{2}{\alpha}, i\frac{\partial}{\partial \overset{2}{x}}, \overset{1}{x}, 0\right) = \rho\left(i\frac{\partial}{\partial \overset{2}{x}}\right) P\left(\overset{1}{x}, \overset{2}{\alpha}\right), \tag{5.8}$$

où

$$\mathscr{H}_1 = \mathscr{H}_1\left(\overset{2}{\alpha}, i\frac{\partial}{\partial \overset{2}{x}}, -i\Lambda^{-1}\frac{\partial}{\partial \overset{1}{\alpha}}, \overset{11'}{x}\Lambda^{-\rho}, \Lambda^{-\varepsilon}\right),$$

$$\mathscr{H}_2 = \mathscr{H}_2\left(\overset{2}{\alpha}, i\frac{\partial}{\partial \overset{2}{x}}, -i\Lambda^{-1}\frac{\partial}{\partial \overset{1}{\alpha}}, \overset{11'}{x}\Lambda^{-1}, \Lambda\right).$$

Montrons que la solution approchée de (5.8) peut être représentée sous la forme

$$\psi_N = \left(\overset{2}{\alpha}, i\frac{\overset{2}{\partial}}{\partial x}, \overset{1}{x}, t\right) = \left(\mathscr{K}^{\overset{1}{\Lambda}}\varphi_N\right)\left(\overset{2}{\alpha}, i\frac{\overset{2}{\partial}}{\partial x}, \overset{1}{\omega}, \overset{1}{\Lambda^{1-\rho}}, \overset{1}{\Lambda^{-\varepsilon}}, t\right) \tag{5.9}$$

où $\varphi_N \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^{m+n+1})$ et $\overset{1}{\omega} = \overset{1}{[\![x\Lambda^{-\rho}]\!]}$.

Remarquons tout d'abord que grâce au choix de la variété initiale M^{m+n}, on a

$$(\mathscr{K}^{\Lambda}\varphi_N)(\alpha, \eta, \omega, \Lambda^{1-\rho}, \Lambda^{-\varepsilon}, t)\big|_{t=0} = \varphi_N(\alpha, \eta, \omega, t)\big|_{t=0}.$$

Donc l'opérateur (5.9) satisfera les conditions initiales du problème de Cauchy (5.8) si l'on exige que

$$\varphi_N(\alpha, \eta, \omega, 0) = \rho(\eta) P(\omega, \alpha). \tag{5.10}$$

En appliquant la transformation de Fourier $F^{-1}_{x\to y}$ à l'équation (5.8), on obtient

$$-ih\frac{\overset{1'}{\partial}\psi}{\partial t}\left(\overset{2}{\alpha}, \overset{2}{y}, -i\frac{\partial}{\partial y}, t\right) + \overset{3}{\left[\!\left[\mathscr{H}_1\left(\alpha, y, -ih\frac{\overset{1'}{\partial}}{\partial\alpha}, -ih^{\rho}\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial y}, \overset{1'}{h^{\varepsilon}}\right) - \right.\right.}$$

$$\left.\left. -ih\mathscr{H}_2\left(\overset{2}{\alpha}, \overset{2}{y}, -ih\frac{\overset{1'}{\partial}}{\partial\alpha}, -ih\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial y}, \overset{1'}{h^{-1}}\right)\right]\!\right] \psi\left(\overset{2}{\alpha}, \overset{2}{y}, -i\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial y}, t\right) = 0, \tag{5.11}$$

où h est l'opérateur $\Lambda^{-1}\left(-i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$.

Désignons par $\mathscr{K}^{1/h}$ l'opérateur $\mathscr{K}^{\Lambda}$. Le théorème 4.2 entraîne

$$\left[-ih\frac{\partial}{\partial t} + \mathscr{H}_1\left(\overset{2}{\alpha}, \overset{2}{y}, -ih\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial\alpha}, -ih^{\rho}\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial y} + h^{\rho-1}\omega, h^{\varepsilon}\right) - \right.$$

$$\left. -ih\mathscr{H}_2\left(\overset{2}{\alpha}, \overset{2}{y}, -ih\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial\alpha}, -ih\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial y} + \omega, h^{-1}\right)\right](\mathscr{K}^{1/h}\varphi_N) =$$

$$= \left(-ih\mathscr{K}^{1/h}\left(\frac{d}{dt} + g\right)\varkappa\varphi_N\right)(\alpha, y, \omega, h^{\rho-1}, h^{\varepsilon}, t), \tag{5.12}$$

où g est une fonction différentiable sur M^{m+n+1} et $\varkappa$ l'opérateur quasi identique.

Portons l'opérateur

$$\psi_N\left(\overset{2}{\alpha}, \overset{2}{y}, -ih\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial y}, t\right) = (\mathscr{K}^{1/h}\varphi_N)\left(\overset{2}{\alpha}, \overset{2}{y}, \quad \frac{\partial}{\partial y}, h^{\rho-1}, h^{\varepsilon}, t\right)$$

dans l'équation (5.11). En appliquant le lemme 5 du Complément et (5.12) aidant, on obtient l'équation

$$-ih\frac{\partial}{\partial t}(\mathscr{K}^{1/h}\varphi_N)\left(\overset{2}{\alpha}, \overset{2}{y}, -ih^{\rho}\overset{1}{\frac{\partial}{\partial y}}, h^{\rho-1}, h^{\varepsilon}, t\right)+\left[\!\left[\mathscr{H}_1\left(\overset{2}{\alpha}, \overset{2}{y}, -ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial \alpha}}, -ih^{\rho}\overset{1}{\frac{\partial}{\partial y}}, h^{\varepsilon}\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-i\mathscr{H}_2\left(\overset{2}{\alpha}, \overset{2}{y}, -ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial \alpha}}, -ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial y}}, h^{-1}\right)\right]\right](\mathscr{K}^{1/h}_{\varphi_\varepsilon})\left(\overset{2}{\alpha}, \overset{2}{y}, -ih^{\rho}\overset{1}{\frac{\partial}{\partial y}}, h^{\rho-1}, h^{\varepsilon}, t\right)=$$

$$=-ih\left[\mathscr{K}^{1/h}\left(\frac{d}{dt}+q\right)\varkappa\varphi\right]\left(\overset{2}{\alpha}, \overset{2}{y}, \quad ih^{\rho}\overset{1}{\frac{\partial}{\partial y}}, h^{\rho-1}, h^{\varepsilon}\right). \tag{5.13}$$

En remplaçant maintenant h par $\left[\!\left[\overset{1'}{\Lambda^{-1}}\left(-i\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]\!\right]$ et en appliquant la transformation de Fourier $F_{y\to x}$ à l'équation (5.13), on est conduit à l'équation suivante:

$$-i\overset{1}{\Lambda^{-1}}\frac{\partial}{\partial t}(\mathscr{K}^{\overset{1}{\Lambda}}\varphi_N)\left(\overset{2}{\alpha}, i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}, \overset{1}{\omega}, \overset{1}{\Lambda^{1-\rho}}, \overset{1}{\Lambda^{-\varepsilon}}, t\right)+$$

$$+\left[\!\left[\overset{3}{\mathscr{H}_1}-i\overset{1}{\Lambda}\mathscr{H}_2\right]\!\right]\left(\mathscr{K}^{\overset{1}{\Lambda}}\left(\frac{d}{dt}+q\right)\varkappa\varphi_N\right)\left(\overset{2}{\alpha}, i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}, \overset{1}{\omega}, \overset{1}{\Lambda^{1-\rho}}, \overset{1}{\Lambda^{-\varepsilon}}, t\right), \tag{5.14}$$

où $\omega_k=\Lambda^{-\rho_k}x_k$, $k=1,\ldots,n$. Dans la relation (5.14), nous avons omis d'écrire les arguments

$$\left(\overset{2}{\alpha}, i\overset{2}{\frac{\partial}{\partial x}}, -i\overset{1'}{\Lambda^{-1}}\overset{1}{\frac{\partial}{\partial \alpha}}, x\overset{11'}{\Lambda^{-\rho}}, \overset{1'}{\Lambda^{-\varepsilon}}\right) \quad \text{et} \quad \left(\overset{2}{\alpha}, i\overset{2}{\frac{\partial}{\partial x}}, -i\overset{1'}{\Lambda^{-1}}\frac{\partial}{\partial \alpha}, x\overset{11'}{\Lambda^{-1}}, \overset{1'}{\Lambda}\right)$$

respectivement des opérateurs $\mathscr{H}_1$ et $\mathscr{H}_2$.

Compte tenu de (5.14) et (5.6), pour résoudre approximativement le problème de Cauchy (5.2), (5.3), il suffit de trouver une fonction φ_N qui soit solution de l'équation de transport

$$\left(\frac{d}{dt}+q\right)\varkappa\varphi_N=0 \ (\mathrm{mod}\ O_D(\Lambda^{-N})).$$

Le théorème 4.3 affirme l'existence de cette solution.

Donc, en tenant compte des estimations établies dans le lemme 4 du Complément, on obtient en définitive la solution approchée du problème de Cauchy (5.2), (5.3) pour l'opérateur $f\left(\overset{1}{L}, \overset{2}{\alpha}\right)$

De fait, pour achever la démonstration, il suffit de vérifier que pour $t=T$, la fonction

$$\psi_N(\alpha, \eta, x, t)=(\mathscr{K}^{\wedge}\varphi_N)(\alpha, \eta, \omega, \Lambda^{1-\rho}, \Lambda^{-\varepsilon}, t) \tag{5.15}$$

décroît plus vite que toute puissance de $\frac{1}{|x|}$ lorsque $x\to\infty$. Signalons que les bicaractéristiques (X, P) correspondant à H_0, c'est-à-dire les solutions du système (5.7) dépendant des paramètres $\varkappa_1$ et $\varkappa_2$ à la limite, sont confondues pour $\varkappa_1=\varkappa_2=0$ avec les bicaractéristiques associées à $H \stackrel{\text{déf}}{=} \operatorname{Re}\mathscr{K}$, où $\mathscr{K}$ est la fonction de Hamilton de l'opérateur $f\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}\right)$. La condition d'absorption mentionnée dans le théorème de quasi-inversibilité sera remplie si pour $t=T$ est réalisée l'inégalité

$$\operatorname{Im}\mathscr{K}_0(X_0, X; P_0, P; \omega, \varkappa_1, \varkappa_2)\leqslant -\delta<0,$$

qui résulte directement du système (5.7). D'autre part, de cette inégalité et de la construction de l'opérateur canonique, il s'ensuit que la fonction $\mathscr{K}^{\wedge}\varphi_N|_{t=T}$ décroît plus vite que toute puissance de $\frac{1}{\Lambda}$ lorsque $x\to\infty$. Par une vérification directe on s'assure que la fonction ψ_N définie par (5.15) est solution de l'équation

$$[\![f\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}\right)]\!]\cdot[\![g_N\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}\right)]\!]=F\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}\right)+R_N\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}\right),$$

où $R_N(x, \alpha)=O_{\mathscr{L}}(|x|^{-N})$ et le symbole de l'opérateur $g_N\left(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}\right)$ est défini par la formule

$$g_N(x, \alpha)=i\int_0^T \psi_N\left(\overset{2}{\alpha}, i\frac{\partial}{\partial x}, \overset{1}{x}, t\right)\overset{1}{\Lambda}{}^{-1}\cdot 1\cdot dt.$$

La démonstration du théorème fondamental s'effectuant de façon analogue, nous n'en donnerons que les grandes lignes. Si on veut la produire en détail, il faut utiliser la théorie de l'opérateur canonique sur une sous-variété lagrangienne d'une variété symplectique.

En vertu de la règle de réduction du problème fondamental, il faut chercher l'opérateur quasi inverse sous la forme

$$\hat{G}=\hat{\varphi}\left(\overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{n}{A}_n\right)-i\int_0^T \hat{\Psi}(t)dt, \tag{5.16}$$

où la fonction $\hat{\Psi}(t)$ à valeurs opératorielles est solution du problème de Cauchy

$$-i\frac{\partial\hat{\Psi}(t)}{\partial t}+f\left(\overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{n}{A}_n\right)\hat{\Psi}(t)=0; \quad \hat{\Psi}(0)=\rho(A), \tag{5.17}$$

où $f\left(\overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{n}{A}_n\right)=\mu(p)$ et le symbole $\rho(x)$ est choisi de telle sorte que

$\rho(x)=1$ dans un voisinage $\mathbf{R}_+$-invariant de l'ensemble des zéros de la partie principale de la fonction p. Le symbole $\varphi(x)$ se définit comme

$$\varphi(x)=(1-\rho(x))/p_1(x)+(\text{termes d'ordre inférieur}),$$

où $p_1(x)$ est la partie homogène principale de $p(x)$. On cherche ensuite la solution de (5.17) sous la forme

$$\hat{\Psi}(t)=\mu(\Psi(t)).$$

Comme

$$f(A)\circ\mu(\Psi(t))=\mu(\hat{H}\Psi(t)) \tag{5.18}$$

où $\hat{H}$ est un opérateur pseudo-différentiel, on détermine $\Psi(t)$ en résolvant le problème

$$-i\frac{\partial\Psi}{\partial t}+\hat{H}\Psi=0, \qquad \Psi(0)=\mathscr{K}_0\rho,$$

où $\mathscr{K}_0$ est un opérateur canonique sur la variété lagrangienne initiale. La partie principale de l'opérateur pseudo-différentiel $\tilde{H}$ est l^*f_1.

Des conditions du théorème il s'ensuit que $\Psi(T)=0$. Donc

$$\hat{f}\circ\hat{G}=1-\rho\left(\overset{1}{A_1},\ldots,\overset{n}{A_n}\right)-i\int_0^T\hat{f}\circ\hat{\Psi}(t)\,dt=1-\hat{\rho}+\hat{\rho}-\hat{\Psi}(T)=1.$$

Une importante généralisation est la formule (5.18) qui nous permet de renoncer à la condition que les opérateurs $A_1,\ldots,A_n$ soient générateurs d'une algèbre de Lie nilpotente.

En général, l'ensemble Ω_0 peut être non connexe. Dans ce cas, il faut chercher $\Psi(t)$ sous la forme $\Psi(t)=\sum_{l=1}^{N}\Psi^l(t)$, où chaque $\Psi^l(t)$ est associée à la composante connexe Ω_0^l de l'ensemble Ω_0. Donc $f\left(\overset{1}{A_1},\ldots\right.$ $\left.\ldots,\overset{n}{A_n}\right)\sum_{l=1}^{N}\hat{\Psi}^l(t)=\sum_{l=1}^{N}f\left(\overset{1}{A_1},\ldots,\overset{n}{A_n}\right)\circ\mu(\Psi^l(t))=\sum_{l=1}^{N}\mu\left[H_l\left(\overset{2}{x^l},\ -i\frac{\partial}{\partial x^l}\right)\Psi^l(t)\right]$ et le problème de quasi-inversibilité se ramène à celui considéré plus haut mais pour charque $1\leqslant l\leqslant N$.

La démonstration de la quasi-inversibilité à gauche s'effectue de façon analogue mais en utilisant la représentation régulière droite.

Complément au § 5

Définition 1. Soit $\Phi(y,\alpha;h)$, $y\in\mathbf{R}^n$, $\alpha\in M^m$, une famille de fonctions appartenant à l'espace $C^\infty_{\mathscr{L}}(\mathbf{R}^n\times M^m)$. On dira que cette famille est *bornée* dans $C^\infty_{\mathscr{L}}(\mathbf{R}^n\times M^m)$ s'il existe un k tel que

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^p\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^q\Phi(y,\alpha,h)\right|\leqslant C_{p,q}(1+|y|)^k$$

pour tous indices multiples p et q.

Lemme 5.1. *Soit $\Phi(y, \alpha; h)$ une famille bornée dans $C^\infty_{\mathcal{L}}(\mathbf{R}^n \times M^m)$ et soit*

$$L'_j(\eta, x, \beta, h) = \sum_{k=1}^{n} x_k P_{k,j}(\eta, \beta, h) + P_j(\eta, \beta, h),$$

où $P_{k,j}$ et P_j sont des polynômes de η et β à coefficients bornés dépendant de h. Soit

$$\overset{k}{L}'_j = \left[\!\left[L'_j\left(\overset{2}{\eta}, x - ih\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial\eta}, \overset{1}{\beta}, h\right)\right]\!\right].$$

On a alors la relation

$$\Phi\left(\overset{1}{L}', \overset{2}{\alpha}; h\right) = \Phi\left(L'\left(\overset{2}{\eta}, x - ih\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial\eta}, \overset{1}{\beta}, h\right), \overset{2}{\alpha}; h\right) + hR_h, \qquad (1)$$

où $\{R_h\}$ est une famille, bornée dans $C^\infty_{\mathcal{L}}$, de fonctions des opérateurs bornés

$$\eta, x - ih\frac{\partial}{\partial\eta}, \beta, \alpha \text{ et } \left[\!\left[L'\left(\overset{2}{\eta}, x - ih\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial\eta}, \overset{1}{\beta}, h\right)\right]\!\right].$$

Démonstration. En appliquant la K-formule, on obtient

$$\Phi\left(\overset{1}{L}, \overset{2}{\alpha}; h\right) = \Phi\left(L'_1\left(\overset{2}{\eta}, x - ih\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial\eta}, \overset{1}{\beta}, h\right), \overset{3}{L}'_2, \ldots, \overset{n+1}{L}'_n, \overset{n+2}{\alpha}, h\right) -$$

$$ih\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial L'_1}{\partial\eta_k}\left(\overset{2}{\eta}, x - ih\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial\eta}, \overset{1}{\beta}, h\right) P_{k,1}\left(\overset{3}{\eta}, \overset{1}{\beta}, h\right) \times\right.$$

$$\left.\times\frac{\delta^2\Phi}{\delta y_1^2}\left(L'_1\left(\overset{6}{\eta}, x - ih\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial\eta}, \overset{1}{\beta}, h\right), \overset{2}{L}'_1, \overset{5}{L}'_1, \overset{7}{L}'_2, \ldots, \overset{n+5}{L}'_n, \overset{n+6}{\alpha}; h\right)\right].$$

Dans le premier terme du second membre, il faut intervertir l'ordre d'action des opérateurs η et L'_2. La formule de commutation nous donne

$$\Phi\left(L'_1\left(\overset{2}{\eta}, x - ih\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial\eta}, \overset{1}{\beta}, h\right), \overset{3}{L}'_2, \ldots, \overset{n+1}{L}'_n, \overset{n+2}{\alpha}; h\right) =$$

$$= \Phi\left(L'_1\left(\overset{3}{\eta}, x - ih\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial\eta}, \overset{1}{\beta}, h\right), \overset{2}{L}'_2, \overset{4}{L}'_3, \ldots, \overset{n+1}{L}'_n, \overset{n+2}{\alpha}; h\right) -$$

$$- ih\sum_{k=1}^{n}\left[P_{k,2}\left(\overset{4}{\eta}, \beta, h\right)\frac{\partial L'_1}{\partial\eta_k}\left(\overset{2}{\eta}_1, \ldots, \overset{2}{\eta}_{k-1}, \overset{4}{\eta}_k, \overset{6}{\eta}_{k+1}, \ldots\right.\right.$$

$$\ldots, \overset{6}{\eta_n}, x - ih\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial \eta}, \overset{1}{\beta}, h\Big)\frac{\delta^2\Phi}{\delta y_1 \delta y_2}\Big(\hat{L}_1, \hat{L}_1, \overset{3}{L'_2}, \overset{5}{L'_2}, \overset{7}{L'_3}, \ldots, \overset{n+4}{L'_n}, \overset{n+5}{\alpha}; h\Big)\Big],$$

où $\hat{L}_1$ est un opérateur de la forme suivante :

$$L'_1\Big(\overset{2}{\eta_1}, \ldots, \overset{2}{\eta_{k-1}}, \overset{4}{\eta_k}, \overset{6}{\eta_{k+1}}, \ldots, \overset{6}{\eta_n}, x - ih\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial \eta}, \overset{1}{\beta}, h\Big).$$

Transformons le premier terme du second membre de la formule (2), plus exactement, appliquons la K-formule à L'_2, et intervertissons ensuite l'ordre d'action des opérateurs η et L'_3 dans le premier terme de la somme.

En répétant cette opération n fois, on obtient (1), où R est de la forme

$$R = -i\Big(\sum_{j=1}^{n} r'_j + \sum_{j=1}^{n-1} r''_j\Big),$$

où

$$r'_j = \sum_{k=1}^{n}\Big[\frac{\partial L'_j}{\partial \eta_k}\Big(\overset{3}{\eta}, x - ih\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial \eta}, \overset{1}{\beta}, h\Big)\times$$

$$\times P_{k,j}\Big(\overset{3}{\eta}, \overset{1}{\beta}, h\Big)\frac{\delta^2\Phi}{\delta y_j^2}\Big(L'_1\Big(\overset{6}{\eta}, x - ih\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial \eta}, \overset{1}{\beta}, h\Big), \ldots$$

$$\ldots, L'_j\Big(\overset{6}{\eta}, x - ih\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial \eta}, \overset{1}{\beta}, h\Big), \overset{2}{L'_j}, \overset{5}{L'_j}, \overset{7}{L'_{j+1}}, \ldots, \overset{n+6-j}{L'_n}, \overset{n+7-j}{\alpha}; h\Big)\Big],$$

$$r''_j = \sum_{l=1}^{j}\sum_{k=1}^{n}\Big[P_{k,j+1}\Big(\overset{4}{\eta}, \overset{1}{\beta}, h\Big)\times$$

$$\times\frac{\partial L'_j}{\partial \eta_k}\Big(\overset{2}{\eta_1}, \ldots, \overset{2}{\eta_{k-1}}, \overset{4}{\eta_k}, \overset{6}{\eta_{k+1}}, \ldots, \overset{6}{\eta_n}, x - ih\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial \eta}, \overset{1}{\beta}, h\Big)\times$$

$$\times\frac{\delta}{\delta y_{j+1}}\frac{\partial}{\partial y_l}\Phi\Big(\hat{L}_1^{(k)}, \ldots, \hat{L}_j^{(k)}, \overset{3}{L'_{j+1}}, \overset{5}{L'_{j+1}}, \overset{7}{L'_{j+2}}, \ldots$$

$$\ldots, \overset{n+5-j}{L'_n}, \overset{n+6-j}{\alpha}; h\Big)\Big].$$

L'expression obtenue entraîne immédiatement le lemme.

Voici un corollaire du lemme 5.1.

Corollaire. *Pour tout r réel, il existe un s tel que R_h est, pour tout k, uniformément borné en h en tant qu'opérateur de C_r^k dans C_s^k.*

Lemme 5.2. *Soit $f(y, \alpha)$ la fonction du théorème fondamental. Alors*

$$f\left(\overset{1}{L},\ \overset{2}{\alpha}\right)=f\left(L\left(i\frac{\overset{2}{\partial}}{\partial x},\ \overset{1}{x},\ -i\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial x}\right),\ \overset{2}{\alpha}\right)+h^{1-r}f_h\left(i\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial x},\ h\overset{1}{x},\ -ih\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial x},\ \overset{2}{\alpha}\right),$$

où $\{f_h\}$ est une famille de fonctions bornées de $C^{\infty}_{\mathcal{Y}}$.

Démonstration. Définissons $\Phi(y, \alpha, h)$ et $L'(\eta, x, \beta, h)$ comme suit:

$$h^r f(y, \alpha)=\Phi(h^{\rho}y, \alpha; h), \qquad h^{\rho}_j L_j(\eta, x, \beta)=L'_j(\eta, h^{\varepsilon}x, h^{\varepsilon}\beta, h). \tag{3}$$

Alors $L'_j(\eta, x, \beta, h)$ satisfait les conditions du lemme 5.1. Donc

$$f\left(\overset{1}{L},\ \overset{2}{\alpha}\right)=h^{-r}\Phi\left(h^{\rho}\overset{1}{L},\ \overset{2}{\alpha};\ h\right)=$$

$$=h^{-r}\Phi\left(\overset{1}{\left[\left[L'\left(-i\frac{\overset{2}{\partial}}{\partial x},\quad h^{\varepsilon}\overset{1}{x},\quad -ih\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial\alpha},\quad h\right)\right]\right]},\quad \overset{2}{\alpha};\quad h\right). \tag{4}$$

On a montré plus haut que l'opérateur

$$\Phi\left(\overset{1}{\left[\left[L'\left(-i\frac{\overset{2}{\partial}}{\partial x},\ h^{\varepsilon}\overset{1}{x},\ -ih\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial\alpha},\ h\right)\right]\right]},\ \overset{2}{\alpha};\quad h\right)$$

peut être représenté comme un opérateur pseudo-différentiel

$$\Psi\left(\overset{2}{\alpha},\ i\frac{\overset{2}{\partial}}{\partial x},\ h^{\varepsilon}\overset{1}{x},\ -ih^{\varepsilon}\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial\alpha},\ h\right),$$

où

$$\Psi(\alpha, \eta, x, \beta, h)=\Phi\left(\overset{1}{\left[\left[L'\left(\overset{2}{\eta},\ x-ih^{\varepsilon}\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial\eta},\ \overset{1}{\beta},\ h\right)\right]\right]},\ \overset{2}{\alpha};\ h\right)\cdot 1. \tag{5}$$

Du lemme 5.1 on déduit que

$\varphi(\alpha, \eta, x, \beta, h)=$

$$=\Phi\left(L'\left(\overset{2}{\eta},\ x-ih^{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\eta},\ \overset{1}{\beta},\ h\right),\ \overset{2}{\alpha},\ h\right)\cdot 1+h^{\varepsilon}f_h(\alpha, \eta, x, \beta), \tag{6}$$

où $\{f_h\}=\{R_{h^{\varepsilon}}\cdot 1\}$ est une famille de fonctions bornées de $C^{\infty}_{\mathcal{Y}}$ d'après le corollaire du lemme 5.1. Il est évident que

$$\Phi\left(L'\left(\overset{2}{\eta},\ x-ih^{\varepsilon}\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial\eta},\ \overset{1}{\beta},\ h\right),\ \overset{1}{\alpha},\ h\right)\cdot 1=\Phi(L'(\eta, x, \beta, h), \alpha; h). \tag{7}$$

Donc

$$f\left(\overset{1}{L}, \overset{2}{\alpha}\right) = h^{-r}\Phi\left(L'\left(i\frac{\overset{2}{\partial}}{\partial x}, \overset{1}{h^{\varepsilon}x}, -ih^{\varepsilon}\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial\alpha}, h\right), \overset{2}{\alpha}; h\right) +$$

$$+ h^{\varepsilon-r} f_h\left(\overset{2}{\alpha}, i\frac{\overset{2}{\partial}}{\partial x}, \overset{1}{h^{\varepsilon}x}, -ih^{\varepsilon}\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial\alpha}\right) =$$

$$= f\left(L\left(i\frac{\overset{2}{\partial}}{\partial x}, \overset{1}{x}, -i\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial\alpha}\right), \overset{2}{\alpha}\right) + h^{\varepsilon-r} f_h\left(\overset{2}{\alpha}, i\frac{\overset{2}{\partial}}{\partial x}, \overset{1}{h^{\varepsilon}x}, -ih^{\varepsilon}\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial\alpha}\right),$$

ce qui prouve le lemme.

Lemme 5.3. *Soit $f(x, \alpha) \in C^{\infty}_{\mathscr{L}}(\mathbf{R}^n \times M^m)$ la fonction du théorème fondamental, et soit $f_0(x, \alpha)$ sa partie principale.*

Soit par ailleurs $f(x, \alpha)$ une fonction ρ'-quasi homogène par rapport à x de degré 0 dont la restriction à $S^{n-1}_{\rho} \times M^m$ s'annule au voisinage de l'ensemble des zéros de la fonction $f_0(x, \alpha)$ sur $S^{n-1}_{\rho} \times M^m$. Alors pour tout N, il existe une fonction $g_N \in C^{\infty}_{\mathscr{L}}(\mathbf{R}^n \times M^m)$ telle que

$$f\left(\overset{1}{L}, \overset{2}{\alpha}\right) g_N = \mathscr{F} + R_N, \tag{8}$$

où $R_N \in C^{\infty}_{\mathscr{L}}(\mathbf{R}^n \times M^m)$ et $R_N = O_{\mathscr{L}}(|x|^{-N})$.

Démonstration. Définissons $F(\eta, x, \beta, \alpha; h)$ comme suit:

$$h^r f(L(\eta, x, \beta), \alpha) = F(\eta, h^{\rho'}x, h\beta, \alpha; h).$$

Du lemme 5.2, il vient

$$h^r f\left(\overset{1}{L}, \overset{2}{\alpha}\right) = F\left(i\frac{\overset{2}{\partial}}{\partial x}, h^{\rho'}\overset{1}{x}, -ih\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial\alpha}, \overset{2}{\alpha}; h\right) + h^{\varepsilon} f_h\left(\overset{2}{\alpha}, i\frac{\overset{2}{\partial}}{\partial x}, h^{\varepsilon}\overset{1}{x}, -ih^{\varepsilon}\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial\alpha}\right). \tag{9}$$

D'autre part, comme $f(L(\eta, x, \beta), \alpha)$ est ρ-quasi homogène par rapport à x et β, on obtient

$$F\left(i\frac{\overset{2}{\partial}}{\partial x}, h^{\rho'}\overset{1}{x}, -ih\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial\alpha}, \overset{2}{\alpha}; h\right) =$$

$$= F_0\left(i\frac{\overset{2}{\partial}}{\partial x}, h^{\rho'}\overset{1}{x}, -ih\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial\alpha}, \overset{2}{\alpha}\right) + h^{\delta} F_h\left(i\frac{\overset{2}{\partial}}{\partial x}, h^{\rho'}\overset{1}{x}, -ih\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial x}, \overset{2}{\alpha}\right), \tag{10}$$

où $F_0(\eta, x, \beta, \alpha)$ est la partie principale de $f(L(\eta, x, \beta), \alpha)$, $0 < \delta \leqslant \varepsilon$, $\{F_n\}$ une famille de fonctions bornées dans $C^{\infty}_{\mathscr{L}}$, et $F_0(0, x, 0, \alpha)$ est visiblement égale à $f_0(x, \alpha)$.

Un développement en série de Taylor en $-ih^{-\varepsilon}\dfrac{\partial}{\partial x}$ et $-i\dfrac{\partial}{\partial \alpha}$ pour tout $\nu>0$ nous donne

$$h^r f\left(\overset{1}{L}, \overset{2}{\alpha}\right)=f_0(h^{\rho'}x, \alpha)+h^{\delta}\mathscr{P}_{\nu}\left(\frac{i}{h^{\varepsilon}}\overset{2}{\frac{\partial}{\partial x}}, -i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial \alpha}}, h^{\varepsilon}\overset{1}{x}, \overset{2}{\alpha}, h\right)+$$

$$+h^{\nu}Q_{\nu}\left(\frac{i}{h}\overset{2}{\frac{\partial}{\partial x}}, -i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial \alpha}}, i\overset{2}{\frac{\partial}{\partial x}}, h^{\varepsilon}\overset{1}{x}, \overset{2}{\alpha}, h\right), \quad (11)$$

où $\mathscr{P}_{\nu}(u, v, x, \alpha, h)$ est un polynôme en u et v dont les coefficients sont bornés dans C^{∞}_{x} (si l'on considère une famille de fonctions de x et α) et $Q_{\nu}(u, v, \eta, x, \beta, \alpha)$ est un polynôme en u dont les coefficients sont bornés dans C^{∞}_{x} lorsque $h\to+0$.

Soit $\Lambda: \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ une fonction de classe C^{∞} telle que $\Lambda>0$ et $\Lambda(x)=|x|$ pour les grands x. Posons $\omega=\Lambda^{-\rho'}x$, $\sigma=\Lambda^{-\varepsilon}x$, $p=i\Lambda^{\varepsilon}\dfrac{\partial}{\partial x}$. Remplaçons h par $\Lambda^{-1}(x)$ dans (11):

$$\overset{1}{\Lambda}{}^{-r}\left[\!\left[f\left(\overset{1}{L}, \overset{2}{\alpha}\right)\right]\!\right]=f_0(\omega, \alpha)+\overset{1}{\Lambda}{}^{-\delta}\mathscr{P}_{\nu}\left(\overset{2}{p}, -i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial \alpha}}, \overset{1}{\sigma}, \overset{2}{\alpha}, \overset{1}{\Lambda}{}^{-1}\right)+$$

$$+\overset{1}{\Lambda}{}^{-\nu}Q_{\nu}\left(\overset{2}{p}, -i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial \alpha}}, i\overset{2}{\frac{\partial}{\partial x}}, \overset{1}{\sigma}, \overset{1}{\Lambda}{}^{-1}\right).$$

La relation (11) devient donc

$$\left[f_0(\omega, \alpha)+\overset{1}{\Lambda}{}^{-\delta}\mathscr{P}_{\nu}\left(\overset{2}{p}, -i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial \alpha}}, \overset{1}{\sigma}, \overset{2}{\alpha}, \overset{1}{\Lambda}{}^{-1}\right)+\right.$$

$$\left.+\overset{1}{\Lambda}{}^{-\nu}Q_{\nu}\left(\overset{2}{p}, -i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial \alpha}}, i\overset{2}{\frac{\partial}{\partial x}}, \overset{1}{\sigma}, \overset{2}{\alpha}, \overset{1}{\Lambda}{}^{-1}\right)\right]g_N=\Lambda^{-r}\mathscr{F}(\omega, \alpha)+\Lambda^{-r}\mathbf{R}_N.$$

Cherchons g_N telle que

$$\left[f_0(\omega, \alpha)+\overset{1}{\Lambda}{}^{-\delta}\mathscr{P}_{\nu}\left(\overset{2}{p}, -i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial \alpha}}, \overset{1}{\sigma}, \overset{2}{\alpha}, \overset{1}{\Lambda}{}^{-1}\right)\right]g_N=$$

$$=\Lambda^{-r}\mathscr{F}(\omega, \alpha)+O_{\mathscr{L}}(|x|^{-N-r/\varepsilon}) \quad (12)$$

et

$$\overset{1}{\Lambda}{}^{r-\nu}Q_{\nu}\left(\overset{2}{p}, -i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial \alpha}}, i\overset{2}{\frac{\partial}{\partial x}}, \overset{1}{\sigma}, \overset{2}{\alpha}, \overset{1}{\Lambda}{}^{-1}\right)g_N=O_{\mathscr{L}}(|x|^{-N}). \quad (13)$$

Commençons par la résolution de (12). La théorie des perturbations nous donne

$$g_N = \frac{1}{f_0(\omega, \alpha)} \sum_{j=0}^{N_1} (-1)^j \left[\!\left[\frac{1}{f_0\left(\overset{1}{\omega}, \overset{1}{\alpha}\right)} \overset{1}{\Lambda}{}^{-\delta} \mathscr{P}_\nu \left(\overset{2}{p}, -i\frac{\overset{2}{\partial}}{\partial \alpha}, \overset{1}{\sigma}, \overset{3}{\alpha}, \overset{1}{\Lambda}{}^{-1} \right) \right]\!\right]^j \times$$

$$\times \Lambda^{-r} \mathscr{F}(\omega, \alpha). \tag{14}$$

Signalons que les termes du second membre de (14) ont un sens (et appartiennent à $C^\infty_{\mathscr{L}}$), car $\mathscr{F}(x, \alpha)$ s'annule au voisinage de l'ensemble des zéros de la fonction $f_0(\omega, \alpha)$ et $\mathscr{P}_\nu \left(\overset{2}{p}, -i\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial \alpha}, \overset{1}{\sigma}, \overset{3}{\alpha}, \overset{1}{\Lambda}{}^{-1} \right)$ est un opérateur différentiel (donc local).

En portant (14) dans (12), on trouve

$$\left[\!\left[\frac{1}{f_0\left(\overset{1}{\omega}, \overset{2}{\alpha}\right)} \overset{1}{\Lambda}{}^{-\delta} \mathscr{P}_\nu \left(\overset{2}{p}, -i\frac{\overset{2}{\partial}}{\partial \alpha}, \overset{1}{\sigma}, \overset{3}{\alpha}, \overset{2}{\Lambda}{}^{-1} \right) \right]\!\right]^{N_1+1} \times$$

$$\times \Lambda^{-r} \mathscr{F}(\omega, \alpha) = O_{\mathscr{L}}(|x|^{-N-r/\varepsilon}). \tag{15}$$

Il nous faut estimer les termes du premier membre de (15). On remarquera que pour les grands x

$$p\Lambda^s \varphi(\sigma) = \Lambda^s [D_s, \varphi](\sigma), \tag{16}$$

où D_s est un opérateur différentiel du premier ordre.

Ce fait aidant, on obtient par des calculs élémentaires que pour tout k

$$\left\| \left[\!\left[\frac{1}{f_0\left(\overset{1}{\omega}, \overset{2}{\alpha}\right)} \overset{1}{\Lambda}{}^{-\delta} \mathscr{P}_\nu \left(\overset{2}{p}, -i\frac{\overset{2}{\partial}}{\partial \alpha}, \overset{1}{\sigma}, \overset{3}{\alpha}, \overset{1}{\Lambda}{}^{-1} \right) \right]\!\right]^{N+1} \times \right.$$

$$\left. \times \Lambda^{-r} \mathscr{F}(\omega, \alpha) \right\|_{\underset{\varepsilon}{C^k_{+(N_1+1)\delta}}} < \infty. \tag{17}$$

Si l'on choisit N_1 tel que $(N_1+1)\delta \geqslant \varepsilon N$, alors la condition (15) est remplie. *Idem* pour la condition (13) si $\nu > N$. Donc le lemme est prouvé.

Définition. On dira qu'une fonction $f(x)$ indéfiniment dérivable *est de classe* C^∞_m si

$$\|f\|_{C^s_m} \overset{\text{déf}}{=} \sup_{x \in \mathbb{R}^n, |\alpha| \leqslant s} \left| (1+x^2)^{m/2} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f(x) \right| < \infty$$

pour tout s naturel.

Supposons comme précédemment que $\rho_j \geqslant 1$, $j=1,\ldots,n$, et $\Lambda(x)=\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^{2/\rho_j}\right)^{1/2}$. Soit $\varphi(x,\xi)\in C^\infty(\mathbf{R}^n_x\times\mathbf{R}^n_\xi)$ et posons

$$\Phi(\xi,x)=\Lambda(x)\,\varphi(\xi,[\Lambda(x)]^{-\rho}x),\qquad \Phi_1=\mathrm{Re}\,\Phi,\qquad \Phi_2=\mathrm{Im}\,\Phi.$$

Lemme 5.4. *Soit $g(x,\xi)$ une fonction de classe C^∞_m (par rapport à x et ξ simultanément), nulle pour $|\xi|>\xi_0$ et pour $|x|<\delta$. On admettra que Φ satisfait les conditions suivantes:*

(1) *pour $|\xi'|<\xi_0$ et $|\xi''|\leqslant\xi_0$, l'application $x\to x+\dfrac{\delta\Phi_1}{\delta\xi}(\xi',\xi'',x)$ est un difféomorphisme de l'extérieur de la boule $|x|<\delta$ sur $\mathbf{R}^n$;*

(2) $\Phi_n\geqslant 0$.

Alors l'opérateur $T=e^{i\Phi\left(\begin{smallmatrix}2&1\\p,&x\end{smallmatrix}\right)}g\left(\begin{smallmatrix}2&1\\p,&x\end{smallmatrix}\right)$, où $p=-i\dfrac{\partial}{\partial x}$, associe à toute fonction $f\in H^{-s}$, $s\geqslant 0$, une fonction de classe $C^\infty_{-2s-2m-\frac{1}{2}n-\varepsilon}$, $\forall\varepsilon>0$.

Démonstration.

(1) Posons

$$T_0=e^{i\Phi_1\left(\begin{smallmatrix}2&1\\p,&x\end{smallmatrix}\right)}g\left(\begin{smallmatrix}2&1\\p,&x\end{smallmatrix}\right),$$

$$T_0^*=e^{-i\Phi_1\left(\begin{smallmatrix}2&1\\p,&x\end{smallmatrix}\right)}g\left(\begin{smallmatrix}2&1\\p,&x\end{smallmatrix}\right),$$

et considérons l'opérateur

$$\mathscr{A}_{l,r}=T_0(1+x^2)^l\varphi_r(x)T_0^*,$$

où $\varphi_r\in C_0^\infty$, $0\leqslant\varphi_r(x)\leqslant 1$, $\varphi_r(x)=1$ pour $|x|<r$.

Exigeons que soit réalisée la relation

$$\mathscr{A}_{l,r}=Q_{l,r}\left(\begin{smallmatrix}2&1&3\\x,&p,&p\end{smallmatrix}\right), \tag{18}$$

où

$$Q_{l,r}(x,\xi',\xi'')=g(\xi'',\tilde{x}(x,\xi',\xi''))\times$$
$$\times\bar{g}(\xi',\tilde{x}(x,\xi',\xi''))(1+\tilde{x}^2(x,\xi',\xi''))^l\times$$
$$\times\varphi_r(\tilde{x}(x,\xi',\xi''))\left|J^{-1}(\xi',\xi'',\tilde{x}(x,\xi',\xi''))\right|,$$

et $\tilde{x}(x,\xi',\xi'')$ est solution de l'équation

$$\tilde{x}+\frac{\partial\Phi_1}{\partial\xi}(\xi',\xi'',\tilde{x})=x.$$

En effet, pour tout $h\in C_0^\infty$, on a

$$A_{l,r}h(x)=\frac{1}{(2\pi)^{2n}}\int_{\mathbf{R}^{4n}}\exp[i(-x''\xi''+x'\xi''-x'\xi'+x\xi'+\Phi_1(\xi',x')-$$
$$-\Phi_1(\xi'',x')]\,g(\xi',x')\,g(\xi'',x')\,(1+x'^2)^l\varphi_r(x')\,h(x'')\,dx''d\xi''dx'd\xi'.$$

Un changement de variables dans la dernière intégrale nous conduit à (18).

(2) Le symbole $Q_{l,r}$ peut être majoré comme suit:

$$\|Q_{l,r}\|_{\mathscr{B}_{0,k,k}(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n)}\leqslant C_{l,k},$$

où $k>l+m+n$ et $C_{l,k}$ ne dépend pas de r. Donc, pour tout $h\in C_0^\infty$, on a

$$\int_{\mathbf{R}^n}|T_0^*h(x)|^2(1+|x|^2)^l\varphi_r(x)\,dx=|(h,\,A_{l,r}h)_{L_2}|\leqslant\|h\|_{H_k}^2\|A_{l,r}\|_{H_k\to H_{-k}}\leqslant c_{l,k}\|h\|_{H_k}^2.$$

(Signalons que $(T^*u,\,v)_{L_2}=(u,\,Tv)_{L_2}$.) En faisant tendre $r\to\infty$ dans la dernière inégalité, on trouve

$$\|T_0^*h\|_{H_l}^2\leqslant C_{l,k}\|h\|_{H_k}^2.$$

Donc

$$T_0^*\in\mathrm{Hom}\,(H_k,\,H_l)$$

pour $k>l+m+n$. Soient $u,\,v\in C_0^\infty$, alors

$$|(T_0u,\,v)_{L_2}|=|(u,\,T_0^*v)_{L_2}|\leqslant\|u\|_{H_{-l}}\|T_0^*\|_{H_k\to H_l}\|v\|_{H_k}$$

Donc

$$\|T_0u\|_{H_{-k}}\leqslant\|T_0^*\|_{H_k\to H_l}\|u\|_{H_{-l}}$$

et

$$T_0\in\mathrm{Hom}\,(H_{-l},\,H_{-k})$$

pour $k>l+m+n$.

(3) On a

$$T=\left[\!\!\left[T_0\left(1+\overset{2}{x}\right)^r\right]\!\!\right]e^{-\Phi_2\left(\overset{3}{p},\,\overset{1}{x}\right)}e\left(\overset{3}{p},\,\overset{1}{x}\right)\left(1+\overset{1}{x}^2\right)^{-r},$$

où $e(\xi,\,x)$ est une fonction indéfiniment dérivable égale à 1 pour $|\xi|\leqslant\xi_0$ et à 0 pour $|\xi|\geqslant 2\xi_0$. L'opérateur $T_0(1+x^2)^r\in\mathrm{Hom}\,(H_{-l+2r},\,H_{-k})$ pour $k>l+m+n$. Estimons le symbole

$$e^{-\Phi_2(\xi,\,x)}e(\xi,\,x)\,(1+x^2)^{-r}\overset{\text{déf}}{=}h(\xi,\,x).$$

Soient μ et ν des indices multiples de longueur n. Alors

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\mu\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\nu e^{-\Phi_2(\xi,\,x)}e(\xi,\,x)\right|\leqslant c_{\mu\nu}(1+x^2)^{|\mu|/4},$$

d'où il s'ensuit que $h\in\mathscr{B}_{k,0}$ pour $r>\dfrac{k}{4}+\dfrac{3}{8}n$.

Donc en vertu de (19)

$$T\in\mathrm{Hom}\,(H_{-s},\,H_{-2s-2m-\frac{7}{2}n-\varepsilon})$$

pour tout $s\geqslant 0$ et $\varepsilon>0$.

(4) Soit $\mathscr{P}(\xi)$ un polynôme. Alors

$$\mathscr{P}(p)\,Tf(x)=\mathscr{P}\left(\overset{2}{p}\right)e^{i\Phi\left(\overset{2}{p},\,\overset{1}{x}\right)}g\left(\overset{2}{p},\,\overset{1}{x}\right)f(x)=e^{i\Phi\left(\overset{2}{p},\,\overset{1}{x}\right)}g_1\left(\overset{2}{p},\,\overset{1}{x}\right)f(x),$$

où $g_1(\xi,\,x)=\mathscr{P}(\xi)\,g(\xi,\,x)$ vérifie les conditions du lemme, de même que

$g(\xi, x)$. Donc, si $f \in H_{-s}$, alors

$$\mathscr{P}(p)\, Tf \in H_{-2s-2m-\frac{7}{2}n-\varepsilon},$$

et $\mathscr{P}(p)\, Tf \in H^l_{2s-2m-\frac{7}{2}n-\varepsilon}$ pour tout l. Pour achever la démonstration, on remarquera que

$$H^l_k \subset C^{l-\left[\frac{n}{2}\right]-1}_k, \qquad \forall k \in \mathbf{R}.$$

Ce qui prouve le lemme.

Soit $\mathscr{K}$ un opérateur canonique défini sur une variété lagrangienne à n dimensions à germe complexe, dépendant d'un paramètre $\omega \in \mathbf{R}^n$, de sorte que $\mathscr{K}\varphi$ induit une classe $(\mathscr{K}\varphi)(y, \omega)$ de séries équivalentes mod h^∞ constituées de fonctions de classe $C^\infty_{\mathscr{L}}(\mathbf{R}^{2n})$. Alors, pour tout $H \in \mathscr{S}^\infty(\mathbf{R}^{2n})$, on a

$$H\left(\overset{2}{y}, -ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial y}} + \omega\right)[(\mathscr{K}\varphi)(y, \omega)] = (\mathscr{K} R_H \varphi)(y, \omega),$$

où R_H est un opérateur de translation (cf. théorème 4.1).

Lemme 5.5.

$$\left[\!\left[H\left(\overset{2}{y}, -ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial y}}\right)\right]\!\right] \left[\!\left[(\mathscr{K}\varphi)\left(\overset{2}{y}, -ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial y}}\right)\right]\!\right] = (\mathscr{K} R_H \varphi)\left(\overset{2}{y}, -ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial y}}\right).$$

Démonstration. Le couple (A_1, A_2), où $A_1 = -ih\dfrac{\partial}{\partial y}$, $A_2 = y$, est un système de générateurs pour une algèbre de Lie nilpotente. Sa représentation ordonnée est $\left(\overset{1}{L_1}, \overset{2}{L_2}\right)$, où $L_1 = -ih\dfrac{\partial}{\partial x_2} + x_1$ et $L_2 = x_2$. Pour tous $f \in \mathscr{S}^\infty(\mathbf{R}^{2n})$, $g \in C^\infty_{\mathscr{L}}(\mathbf{R}^{2n})$, on a

$$\left[\!\left[f\left(\overset{1}{A_1}, \overset{2}{A_2}\right)\right]\!\right] \left[\!\left[g\left(\overset{1}{A_1}, \overset{2}{A_2}\right)\right]\!\right] = \chi\left(\overset{1}{A_1}, \overset{2}{A_2}\right).$$

où $\chi(x_1, x_2) = f(L_1, L_2)\, g(x_1, x_2)$.

Cette formule et les conditions du lemme nous conduisent à l'identité

$$\left[\!\left[H\left(\overset{2}{y}, -ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial y}}\right)\right]\!\right] \left[\!\left[(\mathscr{K}\varphi)\left(\overset{2}{y}, -ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial y}}\right)\right]\!\right] =$$

$$= \left[H\left(\overset{2}{y}, -ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial y}} + \omega\right)((\mathscr{K}\varphi)(y, \omega))\right]_{\omega = -ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial y}},\, y = \overset{2}{y}} =$$

$$= [(\mathscr{K} R_H \varphi)(y, \omega)]_{\omega = -ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial y}},\, y = \overset{2}{y}} = (\mathscr{K} R_H \varphi)\left(\overset{2}{y}, -ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial y}}\right).$$

Ce qui prouve le lemme.

§ 6. Problème de Cauchy pour systèmes à caractéristiques complexes

Dans ce paragraphe on se propose d'établir une formule de commutation d'un opérateur canonique sur une variété lagrangienne à germe complexe avec un opérateur pseudo-différentiel de symbole à valeurs matricielles. On développera aussi une méthode de construction d'une solution asymptotique formelle du problème de Cauchy pour des systèmes de la forme

$$-ih\frac{\partial \Psi}{\partial t}+\mathscr{H}\left(\overset{2}{x},\overset{1}{\hat{p}},h\right)\Psi=0,\qquad \Psi|_{t=0}=\Psi_0(x,h), \tag{6.1}$$

où $\hat{p}=-ih\dfrac{\partial}{\partial x}$, $\mathscr{H}(x,p,h)$ est une matrice de dimension $(m\times n)$ dont les éléments sont des fonctions différentiables de $x\in\mathbf{R}^n$, $p\in\mathbf{R}^n$, $h\in[0,1]$. Ces fonctions (et leurs dérivées) croissent moins vite que toute puissance de $(|x|^2+|p|^2)$.

Introduisons la notation

$$\left(i\frac{\partial}{\partial h}\right)^k\mathscr{H}(x,p,h)|_{h=0}=\mathscr{H}^{(k)}(x,p).$$

On obtient alors

$$\mathscr{H}\left(\overset{2}{x},\overset{1}{\hat{p}},h\right)=\sum_{k=0}^{N}\frac{(-ih)^k}{k!}\mathscr{H}^{(k)}\left(\overset{2}{x},\overset{1}{\hat{p}}\right)+h^{N+1}Q'_N\left(\overset{2}{x},\overset{1}{\hat{p}},h\right), \tag{6.2}$$

où le symbole $Q'_N(x,p,h)$ de l'opérateur $Q'_N\left(\overset{2}{x},\overset{1}{\hat{p}},h\right)$ est une matrice de dimension $(m\times m)$ dont les coefficients sont des fonctions différentiables uniformément bornées par rapport à h.

Supposons que la matrice $\mathscr{H}^{(0)}(x,p)$, $x\in\mathbf{R}^n$, $p\in\mathbf{R}^n$, peut être réduite à la forme diagonale par une transformation différentiable non dégénérée. Désignons par $\lambda_1(x,p),\ldots,\lambda_l(x,p)$, $l\leqslant m$, les valeurs propres de la matrice $\mathscr{H}^{(0)}(x,p)$ et admettons que la multiplication τ_j de la valeur propre λ_j est indépendante de (x,p). Introduisons les notations suivantes:

$$\tilde{H}^{(j)}(x,p)=\operatorname{Im}\lambda_j(x,p),\ H^{(j)}(x,p)=\operatorname{Re}\lambda_j(x,p).$$

Dans toute la suite, on admettra que

$$\tilde{H}^{(j)}(x,p)\leqslant 0,\ j=1,\ldots,l.$$

Soit $E_j(x,p)$ un projecteur sur le sous-espace associé à la valeur propre $\lambda_j(x,p)$ de la matrice $\mathscr{H}^{(0)}(x,p)$. Il est évident que les éléments matriciels $E_j(x,p)$, $j=1,\ldots,l$, sont des fonctions différentiables de $x\in\mathbf{R}^n$, $p\in\mathbf{R}^n$ et que

$$E_j(x,p)E_k(x,p)=\delta_{jk}E_j(x,p),\qquad \sum_{j=1}^{\cdot}\lambda_jE_j=\mathscr{H}^{(0)}. \tag{6.3}$$

Обозначим через $\{\Lambda_{j,t}^n, r_{j,t}^n\}$, $0 \leqslant t \leqslant T$, семейство лагранжевых многообразий с комплексными ростками с функцией диссипации $D^{(j)}$ и потенциалом $E^{(j)}$, образ $\{\Lambda^n, r^n\}$ при каноническом отображении, порожденном гамильтонианом $\mathscr{H}_j(q, p) = \lambda_j(q, p)$. Пусть

$$M_j^{n+1} = \{p = p^{(j)}(\alpha, t),\ q = q^{(j)}(\alpha, t);$$
$$(p^{(j)}(\alpha, t),\ q^{(j)}(\alpha, t)) = g_H^{t\,(j)}(p(\alpha), q(\alpha))\}.$$

Предположим, что

$$\min_{j \neq i} \inf_{p^{(j)}, q^{(j)} \in M_j^{n+1}} |\lambda_i(p^{(j)}, q^{(j)}) - \lambda_j(p^{(j)}, q^{(j)})| \geqslant \delta \geqslant 0.$$

В этом параграфе будет построена асимптотическая серия с помощью векторных функций с m измерениями, как это было сделано в § 1 главы IV.

Пусть $\mathscr{A}^{(m)}(M_j^{n+1})$ — множество всех классов эквивалентности рядов, асимптотических по $D^{(j)}$ на M_j^{n+1}.

Пусть $\mathscr{A}^m(\mathbf{R}^n \times [0, T])$ — множество всех классов эквивалентности рядов, асимптотических по h на $\mathbf{R}^n \times [0, T]$.

Определим канонический оператор на M_j^{n+1} как отображение

$$\mathscr{K}_{M_j^{n+1}} : \mathscr{A}^m(M_j^{n+1}) \to \mathscr{A}^m(\mathbf{R}^n \times [0, T])$$

точно так же, как мы это сделали в § 4 главы I.

Введем классы операторов, определенных на $\mathscr{A}^m(M_j^{n+1})$.

Определение 6.1. Оператор $\mathscr{A}$, определенный на $\mathscr{A}^m(M_j^{n+1})$ и зависящий от $h \to +0$, принадлежит классу $\mathscr{P}_j$, если для любой γ-карты допустимой $U_I^\gamma \subset M_j^{n+1}$ он эквивалентен оператору дифференциальному $D^{(j)}$-асимптотическому

$$\sum_{|l| \geqslant 0} a_l(\alpha, t, h) \left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\right)^l$$

с коэффициентами $a_l(\alpha, t, h)$, являющимися матрицами порядка m, такими, что

$$(a_l)_{i,k} = O_{D^{(j)}}(h^{(|l|+1)/2}) + \langle \nabla_{p,q} \tilde{H}^{(j)},\ O_{D^{(j)}}(h^{|l|/2}) \rangle + h^{1/2} O_{D^{(j)}}(h^{(|l|-1)/2}), \quad |l| > 0,$$

$$(a_0)_{i,k} = O_{D^{(j)}}(h^{1/2}) + \langle \nabla_{p,q} \tilde{H}^{(j)},\ O_{D^{(j)}}(h^0) \rangle,$$
$$i, k = 1, \ldots, m.$$

Лемма 6.1. *Оператор $1 + I\mathscr{A}$, где $\mathscr{A} \in \mathscr{P}_j$, квазиобратим.*

Определение 6.2. Оператор B, определенный на $\mathscr{A}^m(M_j^{n+1})$ и зависящий от параметра $h \to +0$, *принадлежит классу* $\mathscr{L}_j$, если для любой *γ-карты допустимой* $U_I^\gamma \in M_j^{n+1}$ он эквивалентен оператору дифференциальному $D^{(j)}$-асимптотическому

$$\sum_{|l| \geqslant 0} b_l(\alpha, t, h) \left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\right)^l$$

dont les coefficients $b_l(\alpha, t, h)$ sont des matrices d'ordre m telles que

$$(b_l)_{i,k} = O_{D^{(j)}}(h^{(|l|+1)/2}) + h^{1/2} O_{D^{(j)}}(h^{(|l|-1)/2}), \quad |l| > 0,$$
$$(b_0)_{i,k} = O_{D^{(j)}}(h^{1/2}), \quad i, k = 1, \ldots, m.$$

On a manifestement le lemme suivant.

Lemme 6.2.

(1) *Pour tout* $B \in \mathscr{L}_j$, *l'opérateur* $1+B$ *est un opérateur* $D^{(j)}$*-asymptotique quasi identique*;

(2) $B_1, B_2 \in \mathscr{L} \Rightarrow B_1 B_2 \in \mathscr{L}_j$;

(3) *si* $A \in \mathscr{P}_j$, *alors* $IA \in \mathscr{L}_j$;

(4) *si* $B \in \mathscr{L}_j$, *alors* $IB \in \mathscr{P}_j$.

Définition 6.3. Un opérateur C défini sur $\mathscr{A}^m(M_j^{n+1})$ et dépendant d'un paramètre $h \to 0$ *est de classe* $\mathscr{N}_j$ si pour toute γ-carte $U_I^\gamma \subset M_j^{n+1}$, il est équivalent à un opérateur différentiel $D^{(j)}$-asymptotique

$$C = \sum_{|l| \geqslant 0} c_l(\alpha, t, h) \left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\right)^l$$

dont les coefficients $c_l(\alpha, t, h)$ sont des matrices d'ordre m telles que

$$(c_l)_{i,k} = O_{D^{(j)}}(h^{\frac{|l|}{2}}), \quad |l| \geqslant 0, \quad i, k = 1, \ldots, m.$$

Lemme 6.3. *Soit* $C \in N_j$.

(1) Si $A \in \mathscr{P}_j$, *alors* $AC \in \mathscr{P}_j$, $CA \in \mathscr{P}_j$;

(2) *si* $B \in \mathscr{L}_j$, *alors* $CB \in \mathscr{L}_j$, $BC \in \mathscr{L}_j$;

(3) *si* $C_1, C_2 \in \mathscr{N}_j$, *alors* $[C_1, C_2] \in \mathscr{L}_j$.

La démonstration est évidente.

On écrira $A \in \mathscr{P}_j(U_I^\gamma)$ (resp. $B \in \mathscr{L}_j(U_I^\gamma)$, $C \in N_j(U_I^\gamma)$) si A (resp. B, C) est un opérateur différentiel $D^{(j)}$-asymptotique dont les coefficients satisfont les conditions de la définition 6.1 (resp. 6.2, 6.3) dans toute carte admissible U_I^γ.

Soit $\mathscr{K}_{\Lambda^n}$ un opérateur canonique sur (Λ^n, r^n). Supposons que les opérateurs canoniques $\mathscr{K}_{M_j^{n+1}}$, $j = 1, \ldots, l$, (cf. § 4) sont associés à l'opérateur $\mathscr{K}_{\Lambda^n}$.

Supposons comme au § 4 que la valeur initiale $\Psi_0(x, h)$ du problème (6.1) est de la forme

$$\Psi_0 = \mathscr{K}_{\Lambda^n} \varphi_0, \tag{6.4}$$

où $\varphi_0 \in \mathscr{A}^m(\Lambda^n, r^n)$.

Soit $F(x, p)$ une matrice d'ordre m dont les éléments appartiennent à $C_{\mathscr{L}}^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$. On a alors le lemme suivant.

Lemme 6.4. *Pour tout* $\varphi \in \mathscr{A}^m(M_j^{n+1})$, *on a*

$$\left[\!\left[F\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ x, & \hat{p} \end{pmatrix} \right]\!\right] \mathscr{K}_{M_j^{n+1}} \varphi = \mathscr{K}_{M_j^{n+1}} R_j \varphi,$$

où

$$R_j = \sum_{k \geqslant 0} (-ih)^k R_j^{(k)}$$

est un opérateur défini sur $\mathscr{A}^m(M_j^{n+1})$,

$$R_j^{(0)} = F(q^{(j)}(\alpha, t), p^{(j)}(\alpha, t)) + \mathscr{E}_j; \quad \mathscr{E}_j \in \mathscr{L}_j,$$

et

$$\sum_{k \geqslant 1} (-ih)^k R_j^{(k)} \in \mathscr{L}_j.$$

L'opérateur $R_j^{(k)}$ *est un opérateur différentiel dont les coefficients sont des fonctions différentiables de* h.

Démonstration. Considérons un opérateur canonique local $\mathscr{K}_\varphi^\gamma$. Pour simplifier on se limitera au cas d'une carte et d'une zone non dégénérées, le cas général se traitant de façon analogue.

Soit $\varphi \in \mathscr{A}(U)$, où U est une carte non dégénérée. On a (cf. § 4)

$$\mathscr{K}_\varphi^{(0)} = e^{i\left(\frac{1}{h}\Phi^{(j)}(\alpha, t) - \frac{1}{2}\operatorname{Arg} J(\alpha, t)\right)} |J(\alpha, t)|^{-1/2} L_0 \varphi(\alpha, t)_{\alpha = \Pi^{-1}(x)}, \tag{6.5}$$

où $\Phi^{(j)}(\alpha, t)$ est une phase dans la carte U. En appliquant la formule de commutation d'un hamiltonien à une exponentielle d'exposant complexe, on obtient

$$F\left(\frac{1}{\hat{p}}, \frac{2}{x}\right)[\mathscr{K}_\varphi^{(0)}] = e^{\frac{i}{h}S^{(j)}(x, t)} \sum_{k \geqslant 0} (-ih)^k G_k(S^{(j)}) (J)^{-\frac{1}{2}} L_0 \varphi,$$

où

$$S^{(j)}(x, t) = \Phi^{(j)}(\alpha, t) \cdot \Pi^{-1}.$$

Les opérateurs G_k sont de la forme*):

$$G_k(S^{(j)}) = \sum_{|\gamma| \geqslant 0} \left\{ \sum_{|\alpha| = k}^{2k} \sum_{|\beta| = 0}^{k} \frac{1}{\gamma!} \left(\frac{\partial \operatorname{Im} S^{(j)}}{\partial x} \right)^\gamma \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\partial^{\alpha + \gamma} F}{\partial p^{\alpha + \gamma}} \left(x, \frac{\partial \operatorname{Re} S^{(j)}}{\partial x} \right) \Phi_{\alpha\beta}^{(k)}(S^{(j)}) \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} \right\}, \tag{6.6}$$

où $\Phi_{\alpha\beta}$ sont des polynômes dont les coefficients sont des matrices ayant pour éléments les dérivées

$$\frac{\partial^{|\gamma|} S^{(j)}}{\partial x^\gamma}, \quad |\gamma| = 2, \ldots, 2k.$$

On a $\Phi_{\alpha\beta}^{(0)} = 1$. Les théorèmes du chapitre VI nous conduisent aux majorations suivantes:

$$\frac{\partial \operatorname{Im} S^{(j)}}{\partial x} = O_{D^{(j)}}(h^{1/2}), \quad \frac{\partial \operatorname{Re} S^{(j)}}{\partial x} - p^{(j)}(\alpha(x, t), t) = O_{D^{(j)}}(h^{1/2}). \tag{6.7}$$

*) Ici et dans la suite on admettra que deux opérateurs D-asymptotiques sont égaux au sens de l'équivalence des séries asymptotiques (cf. § 4 de ce chapitre).

Les fonctions $\alpha(x, t)$ de (6.7) sont solutions de l'équation $q(\alpha, t)=x$. En appliquant (6.6), on trouve

$$G_0(S^{(j)})=F\left(x, \frac{\partial \operatorname{Re} S^{(j)}}{\partial x}\right)+ \\ +\sum_{|\gamma|\geqslant 1}\frac{1}{\gamma!}\left(i\frac{\partial \operatorname{Im} S^{(j)}(x, t)}{\partial x}\right)^{\gamma}\frac{\partial^{\gamma}}{\partial p^{\gamma}}F\left(x, \frac{\partial \operatorname{Re} S^{(j)}}{\partial x}\right). \quad (6.8)$$

Les majorations (6.7) et l'inégalité de Gårding nous permettent de représenter $G_0(S^{(j)})$ comme suit:

$$G_0=F(q^{(j)}(\alpha(x, t), t), p^{(j)}(\alpha(x, t), t))+G_0', \quad (6.9)$$

$$G_0'\in\mathscr{L}_j(U).$$

Signalons qu'aux termes du § 6, chapitre VI, il existe un opérateur $R\in\mathscr{N}_j(U)$, tel que

$$L_0R=1 \quad (6.10)$$

dans l'anneau des homomorphismes au-dessus de $\mathscr{A}^m(U)$. Récrivons (6.5) sous la forme

$$F\left(\begin{matrix}2 & 1\\ x, & \hat{p}\end{matrix}\right)[\mathscr{K}^{(0)}\varphi]=\mathscr{K}^{(0)}P\varphi,$$

où

$$P=R\{\sum_{k\geqslant 0}(-ih)^k(J)^{1/2}G_k(S^{(j)})(J)^{-1/2}\}L_0\overset{\text{déf}}{=}\sum_{k\geqslant 0}(-ih)^kP^k, \quad (6.11)$$

où

$$P^{(k)}=R(J)^{1/2}G_k(S^{(j)})(J)^{-1/2}L_0.$$

De l'équation (6.9) et de la définition des opérateurs L et R (cf. § 6 chapitre I) il vient que l'opérateur $P^{(0)}$ est de la forme

$$P^{(0)}=F(q^{(j)}(\alpha, t), p^{(j)}(\alpha, t))+P', \quad P'\in\mathscr{L}_j(U). \quad (6.12)$$

De façon analogue, pour toute carte U_I^{γ}, on a

$$F\left(\begin{matrix}2 & 1\\ x, & \hat{p}\end{matrix}\right)\mathscr{K}_I^{\gamma}\varphi=\mathscr{K}_I^{\gamma}P_I^{\gamma}\varphi,$$

où l'opérateur P_I^{γ} est défini sur la carte U_I^{γ} et satisfait les hypothèses du lemme.

Soit $\{U_I^{\gamma}, \Pi_{\gamma}^I\}$ un atlas sur M_j^{n+1} distinct d'un atlas pondéré et soit $\varphi\in\mathscr{A}(U_I^{\gamma})$. Alors

$$\mathscr{K}_{M_j^{n+1}}\varphi=\mathscr{K}_I^{\gamma}\sum_i V_{I(i)I}^{\gamma(i)\gamma}\rho_i\varphi.$$

Donc

$$\left[\!\left[F\left(\begin{matrix}2 & 1\\ x, & \hat{p}\end{matrix}\right)\right]\!\right](\mathscr{K}_{M_j^{n+1}}\varphi)=\mathscr{K}_I^{\gamma}P_I^{\gamma}\sum_i V_{I(i)I}^{\gamma(i)\gamma}\rho_i\varphi.$$

Supposons que $U_I^\gamma \cap U_K^{\gamma'} \neq \varnothing$ et soit $\varphi \in \mathscr{A}^m(U_I^\gamma \cap U_K^{\gamma'})$. Montrons que

$$P_K^{\gamma'} V_{KI}^{\gamma'\gamma} \varphi = V_{IK}^{\gamma\gamma'} P_I^\gamma \varphi. \tag{6.13}$$

En effet,

$$F\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ x, & \hat{p} \end{pmatrix} [\mathscr{K}_I^\gamma \varphi] = \mathscr{K}_I^\gamma P_I^\gamma \varphi = \mathscr{K}_K^{\gamma'} V_{IK}^{\gamma\gamma'} P_I^\gamma \varphi. \tag{6.14}$$

Par ailleurs,

$$F\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ x, & \hat{p} \end{pmatrix} [\mathscr{K}_I^\gamma \varphi] = F\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ x, & \hat{p} \end{pmatrix} [\mathscr{K}_K^{\gamma'} V_{KI}^{\gamma\gamma'}] = \mathscr{K}_K^{\gamma'} P_K^{\gamma'} V_{KI}^{\gamma\gamma'} \varphi.$$

La relation (6.13) résulte de ces égalités et du fait que l'opérateur canonique est un monomorphisme.

Définissons un opérateur R_K^γ dans la carte U_K^γ sur la variété M_j^{n+1} par la formule

$$R_K^\gamma|_{U_K^\gamma} = \left(\sum_i V_{KI(i)}^{\gamma'\gamma'(i)} \rho_i\right)^{-1} P_K^{\gamma'} \left(\sum_i V_{KI(i)}^{\gamma\gamma'(i)} \rho_i\right), \tag{6.15}$$

où la somme est étendue à tous les indices i tels que $\rho_i \cap U_K^\gamma = \varnothing$ (cf. § 4 de ce chapitre). L'opérateur $\Sigma V_{KI(i)}^{\gamma\gamma'(i)} \rho_i$ étant quasi identique, l'opérateur $R_k^\gamma|_{U_K^\gamma}$ peut s'écrire

$$R_K^\gamma|_{U_K^\gamma} = F(q^{(j)}, p^{(j)})|_{U_K^\gamma} + R_K'^\gamma, \tag{6.16}$$

où

$$R_K'^\gamma \in \mathscr{L}_j|_{U_K^\gamma}.$$

Supposons que les cartes $U_K^{\gamma'}$ et U_I^γ se coupent. Montrons que les opérateurs $R_I^\gamma|_{U_I^\gamma}$ et $R_K^{\gamma'}|_{U_K^{\gamma'}}$ sont confondus sur l'espace $\mathscr{A}^m(U_K^{\gamma'} \cap U_I^\gamma)$.

En appliquant (6.13), on obtient pour tout $\mathscr{V} \in \mathscr{A}^m(U_K^{\gamma'} \cap U_I^\gamma)$.

$$(R_K^{\gamma'}|_{U_K^{\gamma'}})(\mathscr{V} = \left[\left(\sum_i V_{KI(i)}^{\gamma'\gamma'(i)} \rho_i\right)^{-1} P_K^{\gamma'} \left(\sum_i V_{KI(i)}^{\gamma'\gamma'(i)} \rho_i\right)\right] \mathscr{V} =$$

$$= \left[\left(\sum_i V_{KI(i)}^{\gamma'\gamma'(i)} \rho_i\right)^{-1} P_K^{\gamma'} V_{KI}^{\gamma'\gamma} \left(\sum_i V_{II(i)}^{\gamma\gamma'} \rho_i\right)\right] \mathscr{V} =$$

$$= \left[\left(V_{IK}^{\gamma\gamma'} \sum V_{KI(i)}^{\gamma'\gamma'(i)} \rho_i\right)^{-1} P_I^\gamma \left(\sum_i V_{II(i)}^{\gamma\gamma(i)} \rho_i\right)\right] \mathscr{V} = (R_I^\gamma|_{U_I^\gamma}) \mathscr{V}.$$

Nous avons ainsi obtenu des opérateurs R_K^γ dans les cartes U_K^γ définissant un opérateur global R_j sur M_j^{n+1} tel que

$$F\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ x, & \hat{p} \end{pmatrix} [\mathscr{K}_{M_j^{n+1}} \varphi] = \mathscr{K}_{M_j^{n+1}} R_j \varphi.$$

Le lemme résulte de (6.16).

Soient B_k, $k = 1, \ldots, l$, des opérateurs définis comme suit :

$$E_k\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ x, & \hat{p} \end{pmatrix} [\mathscr{K}_{M_j^{n+1}}] = \mathscr{K}_{M_j^{n+1}} B_k.$$

En appliquant le lemme 6.4, on obtient

$$B_k = \sum_{l \geqslant 0} (-ih)^l B_k^{(l)}, \tag{6.17}$$

où

$$B_k^{(0)} = E_k(q^{(j)}, p^{(j)}) + \mathscr{E}'_j, \ \mathscr{E}'_j \in \mathscr{L}_j.$$

Lemme 6.5. *On a les égalités suivantes*:

(i) $\sum_{j=1}^{l} B_j^{(0)} = 1,$

(ii) $B_r^{(0)} B_k^{(0)} = \delta_{rk} B_k^{(0)}.$

Démonstration. Sans nuire à la généralité, on peut considérer une carte non dégénérée dans une zone non dégénérée. De (6.11) et de la définition des opérateurs $B_j^{(0)}$, on déduit

$$B_r^{(0)} B_k^{(0)} = \left(\sum_i V_{0l(i)}^{0\gamma(i)} \rho_i \right)^{-1} R(J)^{1/2} g_{0,r} g_{0,k} (J)^{-1/2} L_0 \left(\sum_i V_{0l(i)}^{0\gamma(i)} \rho_i \right),$$

où

$$g_{0,r} = \sum_{|\gamma| \geqslant 0} \frac{1}{\gamma!} \left(\frac{\partial^\gamma}{\partial p^\gamma} E_r \right) \left(i \frac{\partial \operatorname{Im} S^{(j)}}{\partial x} \right)^\gamma$$

Donc

$$g_{0,r} g_{0,k} = \delta_{rk} g_{0,k}.$$

Ce qui prouve (ii). On démontre (i) de façon analogue.

Théorème 6.1. (1) *Pour tout* $j = 1, \ldots, l$, *on a*

$$\left[-ih \frac{\partial}{\partial t} + \mathscr{H} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ x, & \hat{p}, \ h \end{pmatrix} \right] [\mathscr{K}_{M_j^{n+1}}] = \mathscr{K}_{M_j^{n+1}} R_j \varphi,$$

où $R_j = \sum_{k \geqslant 0} (-ih)^k R_j^{(k)}$ *et la restriction de l'opérateur* R_j *à toute carte admissible de la variété* M_j^{n+1} *est un opérateur différentiel* $D^{(j)}$*-asymptotique. Les opérateurs* $R_j^{(k)}$ *sont des opérateurs différentiels sur* M_j^{n+1} *à coefficients différentiables*:

$$R_j^{(0)} = \sum_{k \neq j} (\lambda_k(q^{(j)}, p^{(j)}) - \lambda_j(q^{(j)}, p^{(j)})) E_k(q^{(j)}, p^{(j)}) + \mathscr{E}_j^{(1)}, \ \mathscr{E}_j^{(1)} \in \mathscr{L}_j.$$

$$(2) \ B_j^{(0)} R_j^{(1)} B_j^{(0)} = B_j^{(0)} \left(\frac{d}{dt_j} - \frac{1}{2} \operatorname{tr} \frac{\partial^2 \lambda_j}{\partial q \partial p} + \mathscr{H}^{(1)} + \mathscr{E}_j^{(2)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial E_j}{\partial p} \frac{\partial (\mathscr{H}^{(0)} - \lambda_j)}{\partial q} \right) B_j^{(0)}, \ \mathscr{E}_j^{(2)} \in \mathscr{P}_j,$$

où $\dfrac{d}{dt_j}$ *est un champ de vecteurs de la forme*

$$\frac{d}{dt_j}=\left\langle H_p^{(j)}(q^{(j)}, p^{(j)}), \frac{\partial}{\partial q}\right\rangle-\left\langle H_q^{(j)}(q^{(j)}, p^{(j)}), \frac{\partial}{\partial p}\right\rangle+\frac{\partial}{\partial t}.$$

Démonstration. Considérons l'opérateur $\hat{H}=-ih\dfrac{\partial}{\partial t}+\mathscr{H}\left(\overset{2}{x}, \overset{1}{\hat{p}}, h\right)$

De (6.2) et du lemme 6.4, il vient

$$\hat{H}[\mathscr{K}_{M_j^{\tau+1}}]=\mathscr{K}_{M_j^{\tau+1}} R_j \varphi,$$

où

$$R_j=\mathscr{H}_j^{(0)}(q^{(j)}, p^{(j)})-\lambda_j(q^{(i)}, p^{(j)})+\mathscr{E}_j^{(3)}, \quad \mathscr{E}_j^{(3)}\in\mathscr{L}_j\cap\mathscr{P}_j.$$

On s'est servi du fait que dans le domaine Ω_K la fonction

$$S_K^{\gamma}(x_K, \xi_{\bar{K}}, t)=\Phi^{\gamma}(\alpha, t)(\Pi_K^{\gamma})^{-1}$$

est solution de l'équation de dissipation de Hamilton-Jacobi de hamiltonien $\lambda_j(q, p)$ (cf. § 1 chapitre VI). En appliquant (6.17), (6.3) et le lemme 6.4, on obtient la première proposition du théorème. Pour prouver la deuxième proposition, considérons le produit d'opérateurs

$$\left[\left[E_j\left(\overset{2}{x}, \overset{1}{\hat{p}}\right)\right]\right]\hat{H}[\mathscr{K}_{M_j^{\tau+1}}\varphi].$$

La formule de commutation nous donne

$$\left[\left[E_j\left(\overset{2}{x}, \overset{1}{\hat{p}}\right)\right]\right]\hat{H}=E_j\left(\overset{2}{x}, \overset{1}{\hat{p}}\right)\left(-ih\frac{\partial}{\partial t}\right)+\left[\left[E_j\mathscr{H}^{(0)}\left(\overset{2}{x}, \overset{1}{\hat{p}}\right)\right]\right]+$$

$$+\sum_{k\geqslant 1}\frac{(-ih)^k}{k!}\left[\left[\frac{\partial^k}{\partial p^k}E_j\frac{\partial^k\mathscr{H}^{(0)}}{\partial x^k}\left(\overset{2}{x}, \overset{1}{\hat{p}}\right)\right]\right]+$$

$$+\sum_{l\geqslant 1}\sum_{k\geqslant 0}(-ih)^{k+l}\frac{\partial^k E_j}{\partial p^k}\cdot\frac{\partial^k\mathscr{H}^{(l)}}{\partial x^k}\left(\overset{2}{x}, \overset{1}{\hat{p}}\right)=$$

$$=\left[\left[E_j\left(\overset{2}{x}, \overset{1}{\hat{p}}\right)\right]\right]\cdot\left[\left[-ih\frac{\partial}{\partial t}+\lambda_j\left(\overset{2}{x}, \overset{1}{\hat{p}}\right)\right]\right]+$$

$$+\sum_{k\geqslant 1}\frac{(-ih)^k}{k!}\left[\left[\frac{\partial^k E_j}{\partial p^k}\cdot\frac{\partial^k(\mathscr{H}^{(0)}-\lambda_j)}{\partial x^k}\left(\overset{2}{x}, \overset{1}{\hat{p}}\right)\right]\right]+$$

$$+\sum_{l\geqslant 1}\sum_{k\geqslant 0}(-ih)^{k+l}\left[\left[\frac{\partial^k E_j}{\partial p^k}\cdot\frac{\partial^k\mathscr{H}^{(l)}}{\partial x^k}\left(\overset{2}{x}, \overset{1}{\hat{p}}\right)\right]\right]. \quad (6.18)$$

L'égalité suivante

$$\left[-ih\frac{\partial}{\partial t}+\lambda_j\left(\overset{2}{x},\overset{1}{\hat{p}}\right)\right]\mathscr{K}_{M_j^{n+1}}\varphi=(-ih)\,\mathscr{K}_{M_j^{n+1}}r_j\varphi, \tag{6.19}$$

où $\mathscr{A}_j^m(M_j^{n+1})$ et

$$r_j=\frac{d}{dt_j}-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\frac{\partial^2\lambda_j}{\partial q\,\partial p}+\mathscr{E}_j^{(4)},\qquad \mathscr{E}_j^{(4)}\in\mathscr{P}_j \tag{6.20}$$

est un opérateur sur M_j^{n+1}, résulte du § 4 de ce chapitre. En appliquant l'opérateur $E_j\left(\overset{2}{x},\overset{1}{\hat{p}}\right)$ aux deux membres de (6.19), et (6.18) aidant, on trouve

$$(-ih)\left[\!\left[E_j\left(\overset{2}{x},\overset{1}{\hat{p}}\right)\right]\!\right](\mathscr{K}_{M_j^{n+1}}r_j\varphi)=$$
$$=\left[\!\left[E_j\left(\overset{2}{x},\overset{1}{\hat{p}}\right)\right]\!\right](\mathscr{K}_{M_j^{n+1}}R_j\varphi)-M_j[\mathscr{K}_{M_j^{n+1}}\varphi], \tag{6.21}$$

où

$$M_j=\sum_{k\geqslant 1}\frac{(-ih)^k}{k!}\left[\!\left[\frac{\partial^k E_j}{\partial p^k}\cdot\frac{\partial^k(\mathscr{H}^{(0)}-\lambda_j)}{\partial x^k}\left(\overset{2}{x},\overset{1}{\hat{p}}\right)\right]\!\right]+$$
$$+\sum_{l\geqslant 1}\sum_{k\geqslant 0}\frac{(-ih)^{k+l}}{k!}\left[\!\left[\frac{\partial^k E_j}{\partial p^k}\cdot\frac{\partial^k\mathscr{H}^{(l)}}{\partial x^k}\left(\overset{2}{x},\overset{1}{\hat{p}}\right)\right]\!\right]$$

Le lemme 6.4 entraîne

$$\left[\!\left[E_j\left(\overset{2}{x},\overset{1}{\hat{p}}\right)\right]\!\right]\cdot[\mathscr{K}_{M_j^{n+1}}R_j\varphi]=\mathscr{K}_{M_j^{n+1}}(B_jR_j)\varphi. \tag{6.22}$$

Calculons maintenant le produit B_jR_j. Remarquons que d'après la définition des opérateurs B_j et le lemme 6.4, l'opérateur B_j peut dans toute carte U_K^γ être mis sous la forme

$$B_j|_{U_K^\gamma}=\left(\sum_i V_{K\,I(i)}^{\gamma\gamma(i)}\rho_i\right)^{-1}\cdot P_K'^{\gamma}\left(\sum_i V_{K\,I(i)}^{\gamma\gamma(i)}\rho_i\right),$$

où $P_K'^{\gamma}$ est un opérateur quelconque, $P_K'^{\gamma}\in\mathscr{L}_j|_{U_K^\gamma}$.

En appliquant la formule (6.15) dans la carte U_K^γ de la zone Ω_k, on obtient

$$B_jR_j|_{U_K^\gamma}=(B_j|_{U_K^\gamma})(R_j|_{U_K^\gamma})=\left(\sum_i V_{K\,I(i)}^{\gamma\gamma(i)}\rho_i\right)^{-1}\cdot P_K'^{\gamma}P_K^{\gamma}\left(\sum_i V_{K\,I(i)}^{\gamma\gamma(i)}\rho_i\right). \tag{6.23}$$

Sans nuire à la généralité, on peut admettre que le produit $P_K'^{\gamma}P_K^{\gamma}$ agit dans un espace $\mathscr{A}(U)$, où U est une carte non dégénérée d'une zone non dégénérée. Le signe $'$ se rapporte aux quantités figurant dans l'opérateur B_j. Pour simplifier, désignons $P_K'^{\gamma}$ et P_K^{γ} respectivement par P' et P. De (6.11), il vient

$$P'P=R(J)^{1/2}\left(\sum_{k\geqslant 0}(-ih)^k G'_k(S^{(j)})\sum_{l\geqslant 0}(-ih)^l G_l(S^{(j)})\right)(J)^{-1/2}L_0=$$
$$=R\{(J)^{1/2}(G'_0(S^{(j)})G_0(S^{(j)})+(-ih)[G'_1(S^{(j)})G_0(S^{(j)})+$$
$$+G'_0(S^{(j)})G_1(S^{(j)})+g])(J)^{-1/2}\}L_0, \quad g\in\mathscr{P}_j(U). \tag{6.24}$$

Le lemme (6.4) (cf. (6.8)) entraîne

$$G_0=\sum_{|\gamma|=0}^{2}\frac{1}{\gamma!}\frac{\partial^\gamma}{\partial p^\gamma}(\mathscr{H}^0-\lambda_j)\left(i\frac{\partial \operatorname{Im} S^{(j)}}{\partial x}\right)^\gamma+O_{D^\omega}(h^{3/2})(1+g_0)+\langle\tilde{H}_p^{(j)}, O_{D^\omega}(h)\rangle.$$

$$G'_0=\sum_{|\gamma|=0}^{2}\frac{1}{\gamma!}\left(i\frac{\partial \operatorname{Im} S^{(j)}}{\partial x}\right)^\gamma\frac{\partial^\gamma}{\partial p^\gamma}E_j\left(x,\frac{\partial \operatorname{Re} S^{(j)}}{\partial x}\right)+$$
$$+O_{D^\omega}(h^{3/2})(1+g'_0), \quad g_0, g'_0\in\mathscr{L}_j(U).$$

De l'égalité

$$(\mathscr{H}^{(0)}-\lambda_j)E_j=E_j(\mathscr{H}^{(0)}-\lambda_j)=0$$

on déduit que

$$G_0G'_0=G'_0G_0=\langle O_{D^\omega}(h), \hat{H}_p^{(j)}\rangle+O_{D^\omega}(h^{3/2})(1+g''), \quad g''\in\mathscr{L}_j(U). \tag{6.25}$$

Les opérateurs R et L_0 étant de classe $\mathscr{L}_j$, le lemme 6.3 et l'égalité (6.25) nous donnent

$$P'P=(-ih)R\{(J)^{1/2}G'_1G'_0(J)^{-1/2}+(J)^{1/2}G'_0G_1(J)^{-1/2}\}L_0+g', \quad g'\in\mathscr{P}_j(U).$$

De façon analogue, le lemme 6.3 et (6.25) entraînent

$$P'PP'=(-ih)R(J)^{1/2}[G'_0G_1G'_0+\tilde{g}](J)^{-1/2}L_0, \quad \tilde{g}\in\mathscr{P}_j(U).$$

Donc, en appliquant le lemme 6.3 et (6.11), on obtient

$$B_jR_jB_j=(-ih)[B_j^{(0)}R_j^{(1)}B_j^{(0)}+g_j], \quad g_j\in\mathscr{P}_j. \tag{6.26}$$

Utilisons maintenant la propriété d'un opérateur canonique d'être un monomorphisme et appliquons (6.21), (6.22) et le lemme 6.3. Il vient

$$B_j^{(0)}R_j^{(1)}B_j^{(0)}=[B_j^{(0)}\left(\frac{d}{dt_j}-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\frac{\partial^2\lambda_j}{\partial q\,\partial p}\right)+$$
$$+\frac{\partial E_j}{\partial p}\frac{\partial(\mathscr{H}^{(0)}-\lambda_j)}{\partial q}+B_j^{(0)}\mathscr{H}^{(1)}+\mathscr{E}_j^{(2)}]B_j^{(0)}, \quad \mathscr{E}_j^{(2)}\in\mathscr{P}_j, \tag{6.27}$$

où $\varphi=B_j^{(0)}\Psi$, $\Psi\in\mathscr{A}^m(M_j^{n+1})$.

L'égalité suivante

$$E_j\frac{\partial E_j}{\partial p}\frac{\partial(\mathscr{H}^{(0)}-\lambda_j)}{\partial q}=\frac{\partial E}{\partial p}\frac{\partial(\mathscr{H}^{(0)}-\lambda_j)}{\partial q}$$

est une conséquence directe de (6.3) et de

$$E_j \frac{\partial E_j}{\partial p} + \frac{\partial E_j}{\partial p} E_j = \frac{\partial E_j}{\partial p}.$$

En se servant enfin du lemme 6.5 et de (6.27), on trouve

$$B_j^{(0)} R_j^{(1)} B_j^{(0)} = B_j^{(0)} \left[\frac{d}{dt_j} - \frac{1}{2} \operatorname{tr} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial q \partial p} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial E_j}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q} (\mathscr{H}^{(0)} - \lambda_j) + \mathscr{H}^{(1)} + \mathscr{E}_j^{(3)} \right] B_j^{(0)}, \qquad \mathscr{E}_j^{(3)} \in \mathscr{P}_j.$$

Ce qui prouve le théorème.

Le théorème 6.1 nous permet de construire une solution asymptotique formelle du problème 6.1, correspondant aux éléments

$$\varphi_j(\alpha, t, h) \in \mathscr{A}^m(M_j^{n+1}), \qquad j = 1, \ldots, l,$$

qui sont solutions des équations

$$R_j \varphi_j = 0, \qquad j = 1, \ldots, l, \tag{6.28}$$

$$\sum_{j=1}^{l} \varphi_j(\alpha, 0, h) = \varphi_0(\alpha, h), \tag{6.29}$$

où $\varphi_0(\alpha, h) \in \mathscr{A}^m(\Lambda^n, r^n)$ vérifie (6.4). En effet, supposons que de telles fonctions existent. Posons

$$\Psi(x, t, h) = \sum_{j=1}^{l} \mathscr{K}_{M_j^{n+1}} \varphi_j.$$

Le théorème 6.1 nous donne $\hat{H}\Psi = 0$ et

$$\Psi(x, 0, h) = \sum_{j=0}^{l} (\mathscr{K}_{M_j^{n+1}} \varphi_j)_{t=0} = \mathscr{K}_{\Lambda^n} \left(\sum_{j=1}^{l} \varphi_j(\alpha, 0, h) \right) = \mathscr{K}_{\Lambda^n} \varphi_0 = \Psi_0(x, h).$$

Théorème 6.2. *L'ensemble* $\mathscr{A}^m(M_j^{n+1})$, $j = 1, \ldots, l$, *contient des éléments qui sont solutions de* (6.28) *et* (6.29).

Démonstration. Le lemme 6.4 nous donne

$$R_j = B_j^{(0)} R_j B_j^{(0)} + B_j^{(0)} R_j (1 - B_j^{(0)}) + (1 - B_j^{(0)}) R_j B_j^{(0)} + (1 - B_j^{(0)}) R_j (1 - B_j^{(0)}).$$

Les lemmes 6.2, 6.3 et 6.4 entraînent

$$B_j^{(0)} R_j B_j^{(0)} = (-ih) B_j^{(0)} (R_j^{(1)} + g_j^{(1)}) B_j^{(0)}, \qquad g_j^{(1)} \in \mathscr{P}_j, \tag{6.30}$$

$$B_j^{(0)} R_j (1 - B_j^{(0)}) =$$
$$= (-ih) [B_j^{(0)} R_j^{(1)} (1 - B_j^{(0)}) + B_j^{(0)} g_j^{(2)} (1 - B_j^{(0)})], \qquad g_j^{(2)} \in \mathscr{P}_j. \tag{6.31}$$

Pour trouver les vecteurs $\varphi_j \in \mathscr{A}^m(M_j^{n+1})$, solutions de (6.28) et (6.29), il suffit de calculer $B_k^{(0)} \varphi_j$, $k = 1, \ldots, l$. Considérons les équations suivantes :

$$B_j^{(0)} [R_j^{(1)} + g_j^{(1)}] (B_j^{(0)} \varphi_j) = - B_j^{(0)} [R_j^{(1)} + g_j^{(2)}] (1 - B_j^{(0)}) \varphi_j, \tag{6.32}$$

$$(1 - B_j^{(0)}) R_j (B_j^{(0)} \varphi_j) + (1 - B_j^{(0)}) R_j (1 - B_j^{(0)}) \varphi_j = 0. \tag{6.33}$$

Utilisons (6.32) pour exprimer $B_j^{(0)}\varphi_j$ en fonction de $(1-B_j^{(0)})\varphi_j = \sum_{k\neq j}(B_k^{(0)}\varphi_j)$ et portons l'expression obtenue dans (6.33). Nous pouvons alors déterminer successivement les quantités

$$B_k^{(0)}\varphi_j, \qquad k=1,\ldots,l.$$

Revenons à l'équation (6.32). Considérons la fonction

$$F_j = -B_j^{(0)}[R_j^{(1)}+g_j^{(2)}](1-B_j^{(0)})\varphi_j. \tag{6.34}$$

Le théorème 6.1 et le lemme 6.4 nous donnent

$$B_j^{(0)}(R_j^{(1)}+g_j^{(1)})B_j^{(0)} = B_j^{(0)}\left(\frac{d}{dt_j}-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\frac{\partial^2\lambda_j}{\partial p\,\partial q}+\mathscr{H}^{(1)}+\frac{\partial E_j}{\partial p}\frac{\partial(\mathscr{H}^{(0)}-\lambda_j)}{\partial q}+g_j^{(3)}\right)B_j^{(0)}, \tag{6.35}$$

$$g_j^{(3)} = g_j^{(1)} + \mathscr{E}_j^{(2)}, \qquad g_j^{(3)}\in\mathscr{P}_j.$$

On a le système d'équations

$$\left(\frac{d}{dt_j}-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\frac{\partial^2\lambda_j}{\partial q\,\partial p}B_j^{(0)}+B_j^{(0)}\frac{dB_j^{(0)}}{dt}+ B_j^{(0)}\frac{\partial E_j}{\partial p}\frac{\partial(\mathscr{H}^{(0)}-\lambda_j)}{\partial q}B_j^{(0)}+B_j^{(0)}\mathscr{H}^{(1)}B_j^{(0)}+B_j^{(0)}g_j^{(3)}B_j^{(0)}\right)\theta_j = F_j \quad \theta_j|_{t=0}=\theta_{0j}, \tag{6.36}$$

où F_j est défini dans (6.34) et l'élément $\theta_{0j}\in\mathscr{M}(\Lambda^n, r^n)$ sera choisi ultérieurement. Montrons que si θ_j est solution de l'équation (6.36), $B_j^{(0)}\theta_j$ est solution du système

$$B_j^{(0)}(R_j^{(1)}+g_j^{(1)})B_j^{(0)}\theta_j = F_j.$$

Pour cela, il suffit de prouver l'égalité suivante:

$$B_j^{(0)}\frac{d}{dt_j}(B_j^{(0)}\theta_j) = B_j^{(0)}\frac{\partial\theta_j}{\partial t_j}+B_j^{(0)}\left(\frac{dB_j^{(0)}}{dt_j}\right)\theta_j$$

qui résulte immédiatement du lemme 6.5 et de la formule de Leibnitz. Le système d'équations (6.36) s'intègre comme l'équation de transport du § 6, chapitre VI. Le lemme 6.4 nous donne

$$B_k^{(0)} = E_k+\delta_k, \qquad \delta_k\in\mathscr{P}_j, \qquad k=1,\ldots,l.$$

Les lemmes prouvés au début de ce paragraphe nous permettent de mettre (6.36) sous la forme suivante:

$$\left(\frac{d}{dt_j}-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\frac{\partial^2\lambda_j}{\partial q\,\partial p}+E_j\frac{dE_j}{dt_j}+E_j\frac{\partial E_j}{\partial p}\frac{\partial(\mathscr{H}^{(0)}-\lambda_j)}{\partial q}+ E_j\mathscr{H}^{(1)}E_j+\Delta_j\right)\theta_j = F_j, \qquad \Delta_j\in\mathscr{P}_j. \tag{6.37}$$

Soit Φ_j la matrice fondamentale du système d'équations suivant:

$$\left(\frac{d}{dt_j}-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\frac{\partial^2\lambda_j}{\partial q\,\partial p}E_j+E_j\frac{dE_j}{dt_j}+E_j\mathscr{H}^{(1)}E_j+E_j\frac{\partial E_j}{\partial p}\frac{\partial(\mathscr{H}^{(0)}-\lambda_j)}{\partial q}\right)\Phi_j=0,$$

où $\Phi_j|_{t=0}=E$, E étant la matrice unité.

Soit $\theta_j=\Phi_j\gamma_j$. On obtient le système suivant:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\gamma_j}{\partial t_j}+(\Phi_j^{-1}\Delta_j\Phi_j)\,\gamma_j=\Phi_j^{-1}F_j,\\ \gamma_j|_{t=0}=\theta_{0j},\end{cases}\tag{6.38}$$

où $\Phi_j^{-1}\Delta_j\Phi_j\in\mathscr{P}_j$ en vertu de l'équation (6.37). On a aussi (cf. § 6, chapitre VI)

$$\gamma_j=\sum_{k\geqslant 0}(I(\Phi_j^{-1}\Delta_j\Phi_j))^k[\theta_{0j}+I(\Phi_j^{-1}F_j)].$$

Revenons à l'intégration de l'équation (6.33). Soit $B_j^{(0)}\varphi_j=B_j^{(0)}\theta_j$. Alors

$$B_j^{(0)}\varphi_j=B_j^{(0)}C_j^{(1)}B_j^{(0)}\varphi_j(\alpha,0,h)+B_j^{(0)}C_j^{(2)}(1-B_j^{(0)})\varphi_j,\tag{6.39}$$

où

$$C_j^{(1)}B_j^{(0)}\varphi_j(\alpha,0,h)=\Phi_j\left[\sum_{k\geqslant 0}(I(\Phi_j^{-1}\Delta_j\Phi_j))^k\right]B_j^{(0)}\varphi_j(\alpha,0,h),$$

$$\begin{aligned}C_j^{(2)}(1-B_j^{(0)})\varphi_j=\\ =\Phi_j\left[\sum_{k\geqslant 0}(I(\Phi_j^{-1}\Delta_j\Phi_j))^k\right]I(\Phi_j^{-1}B_j^{(0)}(R_j^{(1)}+g_j^{(2)})(1-B_j^{(0)})\varphi_j).\end{aligned}\tag{6.40}$$

En portant la valeur $B_j^{(0)}\varphi_j$ dans (6.33), on trouve

$$\begin{aligned}(1-B_j^{(0)})R_j(1-B_j^{(0)})\varphi_j+(1-B_j^{(0)})R_jB_j^{(0)}C_j^{(1)}B_j^{(0)}\varphi_j(\alpha,0,h)+\\ +(1-B_j^{(0)})R_jB_j^{(0)}C_j^{(2)}(1-B_j^{(0)})\varphi_j=0.\end{aligned}\tag{6.41}$$

En utilisant les lemmes 6.1 à 6.4, le théorème 6.1 et (6.40), on peut mettre (6.41) sous la forme:

$$\begin{aligned}\sum_{k\neq j}(\lambda_k-\lambda_j)(B_k^{(0)}\varphi_j)+\sum_{k\neq j}B_k^{(0)}R_jB_j^{(0)}C_j^{(1)}B_j^{(0)}\varphi_j(\alpha,0,h)+\\ +\sum_{m\neq j}\sum_{k\neq j}B_k^{(0)}\mathscr{E}_{kj}h^{1/2}C_j^{(2)}(B_m^{(0)}\varphi_j)=0,\\ \mathscr{E}_{kj}\in\mathscr{L}_j,\qquad k=1,\ldots,l;\qquad k\neq j.\end{aligned}\tag{6.42}$$

Le lemme 6.2 entraîne l'égalité suivante:

$$h^{1/2}C_j^{(2)}=\Phi_j\left[\sum_{k\geqslant 0}(I(\Phi_j^{-1}\Delta_j\Phi_j))^k\right]I(C_j^{(3)}(1-B_j^{(0)})\varphi_j),$$

où

$$C_j^{(3)}=h^{1/2}\Phi_j^{-1}B_j^{(0)}(R_j^{(1)}+g_j^{(2)})\in N_j.$$

Soit $\mathcal{A}$ une matrice dont les éléments sont de la forme:

$$(\mathcal{A})_{k,m}=\frac{1}{(\lambda_k-\lambda_j)}B_k^{(0)}\mathcal{E}_{kj}(h^{1/2}C_j^{(2)}), \tag{6.43}$$

et Y et F sont des vecteurs de composantes:

$$Y_i=B_i^{(0)}\varphi_j, \qquad F_i=-\frac{1}{(\lambda_k-\lambda_j)}B_i^{(0)}R_jB_j^{(0)}C_j^{(1)}B_j^{(0)}\varphi_j(\alpha, 0, h). \tag{6.44}$$

On peut alors mettre (6.42) sous la forme

$$(E+A)\,Y=F.$$

L'opérateur $E+A$ est quasi identique en vertu du lemme 6.2 et de (6.42), (6.43). Donc, le lemme 4.2 dit que l'opérateur $(E+A)^{-1}$ existe et l'on a l'égalité

$$Y=(E+A)^{-1}F.$$

Choisissons les conditions initiales θ_{0j}, $j=1, 2, \ldots, l$, de l'équation (6.36) de telle sorte qu'elles soient solutions de l'équation (6.29). On a

$$\sum_{j=1}^{l}\varphi_j\big|_{t=0}=\sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{l}(B_k^{(0)}\varphi_j)\big|_{t=0}=\sum_{j=1}^{l}(B_j^{(0)}\theta_{0j}+\sum_{k\neq j}B_k^{(0)}\varphi_j\big|_{t=0}). \tag{6.45}$$

Déterminons le vecteur $B_k^{(0)}\varphi_j\big|_{t=0}$, $k\neq j$, à l'aide de (6.33). Mettons tout d'abord (6.33) sous la forme suivante:

$$\sum_{k\neq j}B_k^{(0)}R_j(B_j^{(0)}\theta_{0j})+\sum_{k\neq j}B_k^{(0)}R_j\sum_{m\neq j}B_m^{(0)}(\varphi_j\big|_{t=0})=0. \tag{6.46}$$

Le lemme 6.4 et le théorème 6.1 nous donnent

$$B_k^{(0)}R_jB_m^{(0)}=B_k^{(0)}[(\lambda_k-\lambda_j)\,\delta_{km}+G_{km}]\,B_m^{(0)}, \tag{6.47}$$

où $G_{mk}\in\mathcal{L}$. A noter que l'indice j qui exprime l'appartenance à telle où telle classe d'opérateurs a été omis, puisque pour $t=0$ ces classes ne dépendent visiblement pas de j.

Soient Y et F des vecteurs de coordonnées

$$Y_k=B_k^{(0)}(\varphi_j\big|_{t=0}), \qquad F_k=\frac{1}{\lambda_j-\lambda_k}B_k^{(0)}R_j(B_j^{(0)}\theta_{0j}),$$
$$k=1, \ldots, l, \qquad k\neq j,$$

et G une matrice opératorielle d'éléments

$$(G)_{k,m}=\frac{1}{(\lambda_k-\lambda_j)}G_{km}; \qquad k, m=1, \ldots, l, \qquad k\neq j, \qquad m\neq j.$$

De (6.47) et des lemmes 6.3 et 6.4 il s'ensuit que l'équation (6.46) peut être écrite sous la forme suivante:

$$(1+G)\,Y=F$$

L'opérateur $1+G$ est quasi identique en vertu du lemme 6.3. Donc

$$B_k^{(0)}(\varphi_j|_{t=0}) = B_k^{(0)} \sum_{m \neq j} P_{km}^{(j)} B_m^{(0)} \theta_{0m}, \qquad k \neq j. \tag{6.48}$$

Signalons que le lemme 6.5 entraîne

$$B_k^{(0)} R_j B_j^{(0)} \in \mathscr{L}.$$

Donc les opérateurs P_{km} de (6.48) sont aussi de classe $\mathscr{L}$. Revenons à l'expression (6.45):

$$\sum_{j=1}^{l} (B_j^{(0)} \theta_{0j} + \sum_{k \neq j} B_k^{(0)} \sum_{m \neq j} P_{km}^{(j)} B_m^{(0)} \theta_{0m}) = \sum_{j=1}^{l} B_j^{(0)} \varphi_0, \tag{6.49}$$

où $P_{km} \in \mathscr{L}$, $k, m = 1, \ldots, l$; $k \neq j$, $m \neq j$. Pour déterminer les éléments $\theta_{0m} \in \mathscr{A}^m(\Lambda^n, r^n)$, considérons le système d'équations suivant:

$$\theta_{0l} + \sum_{m \neq j} P_{lm}^{(j)} B_m^{(0)} \theta_{0m} = B_l^{(0)} \varphi_0. \tag{6.50}$$

Il est évident que les éléments $B_m^{(0)} \theta_{0k}$ sont solutions de l'équation (6.49) si $\theta_{01}, \ldots, \theta_{0l} \in \mathscr{A}^m(\Lambda^n, r^n)$ satisfont le système (6.50).

Le système (6.50) admet une solution unique, puisque les opérateurs $P_{lm}^{(j)} B_m^{(0)}$ sont de classe $\mathscr{L}$. Cette proposition se démontre de la même manière qu'a été résolue l'équation (6.46). Ce qui prouve le théorème.

La démonstration du théorème 6.2 nous fournit une méthode de construction des solutions des équations (6.28) et (6.29). Il est aisé de voir que l'intégration des équations (6.28) et (6.29) se ramène à un problème de construction d'opérateurs réciproques d'opérateurs quasi identiques. Cette construction figure dans la démonstration du lemme 4.2.

Le théorème suivant résulte visiblement des théorèmes 6.1 et 6.2. Formulons-le en conservant les notations de ces derniers.

Théorème 6.3. *Soient* $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$ *des éléments de l'espace* $\mathscr{A}^m(M_j^{n+1})$ *vérifiant les équations suivantes*:

(i) $R_j \varphi_j = 0$,

(ii) $\left(\sum_{j=1}^{l} \varphi_j \right)\Big|_{t=0} = \varphi_0, \qquad \varphi_0 \in \mathscr{A}^m(\Lambda^n, r^n), \qquad j = 1, \ldots, l.$

Alors la série h-asymptotique $\Psi = \sum_{j=1}^{l} \mathscr{K}_{M_j^{n+1}} \varphi_j$ *est solution du problème*

$$\begin{cases} -ih \dfrac{\partial \Psi}{\partial t} + \mathscr{H}\left(\overset{2}{x}, \overset{1}{\hat{p}}, h\right) \Psi = 0, \\ \Psi|_{t=0} = \mathscr{K}_{\Lambda^n} \varphi_0. \end{cases}$$

Enonçons les théorèmes prouvés pour le cas opératoriel.

Soit $\mathscr{H}(x, p, h)$ la matrice de (6.1). Construisons un opérateur h-asymptotique $\Psi\left(\overset{2}{x}, \overset{1}{\hat{p}}, t, h\right) = \hat{\Psi}$ vérifiant le problème

$$\begin{cases} -ih\dfrac{\partial \hat{\Psi}}{\partial t} + [\![\mathscr{H}\left(\overset{2}{x}, \overset{1}{\hat{p}}, h\right)]\!]\,[\![\Psi\left(\overset{2}{x}, \overset{1}{\hat{p}}, t, h\right)]\!] = 0, \\ \hat{\Psi}|_{t=0} = Ev(x), \end{cases} \tag{6.51}$$

où $\hat{p} = -ih\dfrac{\partial}{\partial x}$, E est la matrice unité d'ordre m, $v(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Soit $B^m(M_j^{n+1})$ l'ensemble des classes d'équivalence des séries $D^{(j)}$-asymptotiques modulo un ensemble de matrices d'ordre m dont les coefficients dépendent des points de M_j^{n+1} et de h.

Soit $B^m(\mathbf{R}^n \times [0, T])$ l'ensemble des classes d'équivalence des séries h-asymptotiques modulo les matrices d'ordre m dont les coefficients sont définis sur $\mathbf{R}^n \times [0, T]$. On a le théorème suivant.

Théorème 6.4. *Le problème* (6.51) *admet une solution de la forme*

$$\Psi\left(\overset{2}{x}, \overset{1}{\hat{p}}, t, h\right) = \sum_{j=1} (\mathscr{K}_{M_j^{n+1}} \varphi_j)\left(\overset{2}{x}, \overset{1}{\hat{p}}, t, h\right),$$

ou

$$\varphi_j \in \mathscr{B}^m(M_j^{n+1}), \quad j = 1, \ldots, l.$$

La démonstration de ce théorème est calquée sur celle du théorème 6.3.

§ 7. Quasi-inversibilité des opérateurs à symboles matriciels

Dans ce paragraphe, on énonce le théorème fondamental pour le cas où le symbole de l'opérateur quasi identique est une matrice d'ordre s, s étant quelconque. On rappelle qu'un opérateur $\hat{F}$ de symbole matriciel F est une matrice composée d'opérateurs $\hat{F}_{ij}$ de symboles F_{ij}. Le produit $\hat{H} = \hat{F} \cdot \hat{G}$ est la matrice d'éléments $\hat{H}_{ij} = \sum_k \hat{F}_{ik} \hat{G}_{kj}$.

Définition. *Soient* $\mathscr{L}^k$ *un* $\mathscr{A}$*-module muni d'une* μ*-structure,* $A_0, \ldots, A_n$, $B \in X$. On dit qu'un élément $\hat{F} = g\left(\overset{2}{B}\right)\overset{1}{A}_0 + f\left(\overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{n}{A}_n, \overset{n+1}{B}\right) \in \mathscr{A}$ est *quasi inversible* s'il existe deux suites $\varkappa_k \in \mathscr{L}$ et $\varkappa_k' \in \mathscr{L}$ telles que les produits $\hat{F} \perp \varkappa_k$ et $\varkappa_k' \hat{F}$ soient de la forme

$$\hat{F}\varkappa_k = 1 + R_k\left(\overset{1}{A}_0, \ldots, \overset{n+1}{A}_n, \overset{n+2}{B}\right), \quad \varkappa_k' \hat{F} = 1 + R_k'\left(\overset{n+2}{A}_0, \ldots, \overset{2}{A}_n, \overset{1}{B}\right).$$

où les fonctions $R_k(x_0, x, \alpha)$ et $R_k'(x_0, x, \alpha)$ vérifient les majorations

$$R_k = O_{\mathscr{L}}(|x|^{-k}), \quad R_k' = O_{\mathscr{L}}(|x|^{-k}), \quad x = (x_1, \ldots, x_n).$$

Si $g(B) = 0$, cette définition coïncide visiblement avec celle du § 9 de l'Introduction. Le cas le plus fréquemment étudié dans les applications est

celui où $g(B)\equiv 1$. La notion d'opérateur quasi inversible est remplacée par celle d'opérateur Δ-quasi inversible si la variété M^{m+1} n'est pas compacte. Soit $\Delta\in R^{m+1}$ un domaine compact.

Définition. On dit qu'un élément $\hat{F}=g\left(\overset{2}{B}\right)\overset{1}{A}_0+f\left(\overset{1}{A}_1,\ldots,\overset{n}{A}_n,\overset{n+1}{B}\right)$ est *Δ-quasi inversible* s'il existe des suites $\varkappa_k$, $\varkappa_k'\in\mathscr{L}$ telles que les produits $\hat{F}\varkappa_k$ et $\varkappa_k'\hat{F}$ soient de la forme

$$\hat{F}\varkappa_k=P(B)+R_k\left(\overset{1}{A}_0,\ldots,\overset{n+1}{A}_n,\overset{n+2}{B}\right),$$

$$\varkappa_k'\hat{F}=P'(B)+R_k'\left(\overset{n+2}{A}_0,\ldots,\overset{2}{A}_n,\overset{1}{B}\right),$$

où $P(\alpha)$, $P'(\alpha)\in C_0^\infty$ sont égales à 1 si $\alpha\in\Delta$ et à 0 à l'extérieur d'un petit voisinage de Δ. Les fonctions $R_k(x_0, x, \alpha)$ et $R_k'(x_0, x, \alpha)$ satisfont les majorations

$$R_k=O_{\mathscr{L}}(|x|^{-k}),\qquad R_k'=O_{\mathscr{L}}(|x|^{-k}),\qquad x=(x_1,\ldots,x_n).$$

Supposons que les éléments matriciels $f_{ij}(x, \alpha)$ appartiennent à $\mathscr{L}^\infty(\mathbf{R}^n\times M^{m+1})$ et que la matrice $f(x, \alpha)$ est asymptotiquement ρ-quasi homogène par rapport à x de degré r_0, c'est-à-dire que

$$f(x,\alpha)=\sum_{i=0}^{M}f^{(i)}(x,\alpha)+\sigma(x,\alpha),$$

où les matrices $f^{(i)}(x, \alpha)$ sont quasi homogènes par rapport à x de degré r_i et de poids $\rho_1,\ldots,\rho_n$, $r_i\geqslant r_{i+1}+\delta$, $\delta>0$. Les éléments de la matrice $\sigma(x, \alpha)$ satisfont les conditions

$$\left|\frac{\partial^{|k|}}{\partial x^k}\sigma_{ij}(x,\alpha)\right|\leqslant c_k\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i)^{2/\rho_i}+1\right)^{r_0-1-|k|}$$

Appelons la matrice $f^{(0)}(x, \alpha)$ *partie principale* et $f_1(x, \alpha)=\sum_{i=0}^{M}f^{(i)}(x, \alpha)$ *partie essentielle* de la matrice $f(x, \alpha)$. Soit $g(\alpha)$ une fonction différentiable et uniformément bornée avec ses dérivées. La matrice $F(x_0, x, \alpha)=g(\alpha_0)x_0+f(x, \alpha)$ est de toute évidence asymptotiquement quasi homogène par rapport à x_0 et x et de même degré que $f(x, \alpha)$.

Sans nuire à la généralité, on admettra que la variable x_0 est de poids $\rho_0=r_0$.

Soit $\overset{1}{L}_0,\ .\ ,\overset{n+1}{L}_n,\overset{n+2}{\alpha}$ une représentation ordonnée gauche des opérateurs $\overset{1}{A}_0,\ldots,\overset{n+1}{A}_n,\overset{n+2}{B}$. Supposons que les matrices

$$F(L_0(y,\eta),\ldots,L_n(y,\eta),\alpha);$$

où $y_i=x_i$, $i=1,\ldots,n$, $y_{k+n}=-i\dfrac{\partial}{\partial\alpha_k}$, $k=1,\ldots,m$, sont des matrices asymptotiquement ρ-quasi homogènes par rapport à y de degré r et de poids $\rho_0,\ldots,\rho_{n+m+1}$, où $\rho_i=1$ pour au moins un $i\in\{n+1,\ldots m+n+1\}$.

Soit $\pi(y, \eta, \alpha)$ la partie principale de la matrice $F(L_0(y, \eta), \ldots, L_n(y, \eta), \alpha)$. Soient J_1 le sous-ensemble des nombres i de $(0, \ldots, n)$ tels que $\rho_i = 1$, et J_2 le sous-ensemble des nombres j de $(0, \ldots, m)$ tels que $\rho_{j+n+1} = 1$. Introduisons les notations suivantes:

$$y_{n+j+1} = p_j, \quad j \in J_2; \quad y_{n+j+1} = 0, \quad j \in J_2 \cap \{0, \ldots, m\},$$
$$y_i = -p_{m+i+1} + \omega_i, \quad j \in J_1, \quad y_i = \omega_i, \quad i \in J_1 \cap \{0, \ldots, n\},$$
$$\alpha_i = q_i, \quad i = 0, \ldots, m; \quad \eta_j = q_{m+j+1}, j = 0, \ldots, \eta.$$

En passant aux variables hamiltoniennes dans les nouvelles notations, on trouve que la matrice $\pi(y, \eta, \alpha)$ est associée à la matrice $\mathscr{H}(p, q, \omega)$.

Soit $\mathscr{H}_1$ la partie essentielle de la matrice $F(L_0(y, \eta), \ldots, L_n(y, \eta)\alpha)$ dans les nouvelles variables (p, q, ω). On admettra dans la suite que la matrice $\mathscr{H}_1(p, q, \omega)$ se ramène à la forme diagonale par une transformation différentiable et ses valeurs propres $\mu_1(p, q, \omega), \ldots, \mu_l(p, q, \omega)\,(l \leqslant s)$ sont de classe C^∞ et de multiplicité constante. On a l'inégalité $\operatorname{Im} \mu_i \leqslant 0$, $i = 1, \ldots, l$.

Soient $\lambda_1(p, q, \omega), \ldots, \lambda_l(p, q, \omega)$ les valeurs propres de la matrice $\mathscr{H}(p, q, \omega)$ et soit $\Omega_\varepsilon^{(i)}$ une variété dans l'espace (p, q, ω) définie par

$$p = 0, \quad (q_0, \ldots, q_m) \in M^{m+1}, \quad \sum_{j=0}^{n} q_{m+j+1}^2 < \varepsilon,$$
$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i^{2/\rho_i} = 1, \quad \omega_0 \in \mathbf{R}^1, \quad |\lambda_i(0, q, \omega)| < \varepsilon.$$

Remarque. Si $M^{m+1} = \mathbf{R}^{m+1}$, on remplacera l'ensemble $\Omega_\varepsilon^{(i)}$ par l'ensemble $\Omega_\varepsilon^{(i)}(\Delta)$ défini par les inégalités

$$p_0 = 0, \quad (q_0, \ldots, q_m) \in \Delta_\varepsilon, \quad \sum_{j=0}^{n} q_{m+j+1}^2 < \varepsilon,$$
$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i^{2/\rho_i} = 1, \quad \omega_0 \in \mathbf{R}^1, \quad |\lambda_i(0, q, \omega)| < \varepsilon,$$

où Δ_ε est le ε-voisinage du domaine Δ utilisé dans la construction de l'opérateur Δ-quasi réciproque.

On admettra dans la suite que les valeurs propres $\mu_1(p, q, \omega), \ldots, \mu_l(p, q, \omega)$ de la matrice $\mathscr{H}_1(p, q, \omega)$, $(p, q, \omega) \in \Omega_\varepsilon^{(k)}$ vérifient la condition

$$\inf_{(p,q,\omega) \in \Omega_\varepsilon^{(k)}} \min_{i \neq j, k} |\mu_i(p, q, \omega) - \mu_j(p, q, \omega)| \geqslant \delta > 0, \tag{7.1}$$

où $\delta > 0$ est une constante.

Supposons que la matrice $\mathscr{H}(p, q, \omega)$ est diagonalisable et que la multiplicité des valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ ne dépend pas de p, q, ω. De cette condition il s'ensuit, en particulier, que pour ε assez petit, les ensembles $\Omega_\varepsilon^{(i)}$ sont disjoints, c'est-à-dire que

$$\Omega_\varepsilon^{(i)} \cap \Omega_\varepsilon^{(j)} = \varnothing, \quad i, j = 1, \ldots, l, \; i \neq j.$$

Posons

$$H^{(i)}(p, q, \omega) = \operatorname{Re} \lambda_i(p, q, \omega),$$
$$\tilde{H}^{(i)}(p, q, \omega) = \operatorname{Im} \lambda_i(p, q, \omega).$$

Définition. On appellera *i-ème famille des bicaractéristiques* de l'opérateur F la solution du système hamiltonien

$$\dot{q}^{(i)} = \frac{\partial H^{(i)}}{\partial p}(p^{(i)}, q^{(i)}, \omega),$$
$$\dot{p}^{(i)} = -\frac{\partial H^{(i)}}{\partial q}(p^{(i)}, q^{(i)}, \omega), \qquad (7.2)$$
$$(p^{(i)}(0), q^{(i)}(0), \omega) \in \Omega_\varepsilon^{(i)}.$$

Définition. On dit qu'un opérateur $F\left(A_0^1, \ldots, A_n^{n+1}, B^{n+2}\right)$ *vérifie les conditions d'absorption* s'il existe des constantes $T>0$, $\varepsilon>0$ et $\tau'>0$, $0<\tau'<T$ telles que l'ensemble $\Omega_\varepsilon^{(i)} \neq \varnothing$ pour tout $i \in \{1, \ldots, l\}$;

(1) le système (7.2) admet sur $0 \leqslant \tau \leqslant T$ une solution

$$q^{(i)}(q^{(i)}(0), \omega), p(q^{(i)}(0), \omega)$$

de classe C^∞ ;

(2) pour $(p_0^{(i)}, q_0^{(i)}, \omega) \in \Omega_\varepsilon^{(i)}$, la fonction

$$\tilde{H}^{(i)}(p^{(i)}, q^{(i)}, \omega) \begin{cases} \leqslant 0 & \text{si} \quad 0 \leqslant \tau \leqslant T, \\ < 0 & \text{si} \quad \tau = \tau'. \end{cases}$$

Théorème 7.1. *Si un opérateur* $F\left(A_0^1, \ldots, A_n^{n+1}, B^{n+2}\right)$ *vérifie les conditions d'absorption, il est quasi inversible.*

La démonstration de ce théorème présente beaucoup de points communs avec celle du théorème fondamental du § 5. Les différences sont dues au fait que le symbole de l'opérateur quasi inversible est une matrice. Utilisons les constructions du § 6.

Enonçons le théorème fondamental sous une forme qui facilite la résolution du problème de Cauchy.

Définition. On dit qu'un opérateur $F\left(A_0^1, \ldots, A_n^{n+1}, B^{n+2}\right)$ *vérifie les conditions d'absorption globales* s'il existe des constantes $T>0$, $\varepsilon>0$ et τ', $0<\tau'<T$ telles que pour tout $i \in \{1, \ldots, l\}$:

(1) le système (7.2) admet une solution différentiable vérifiant des conditions initiales qui sont solutions des équations

$$p^{(i)}(0) = 0, \ (q_0^{(i)}, \ldots, q_n^{(i)})|_{\tau=0} \in \Delta_\varepsilon,$$
$$\sum_{j=0}^{n} (q_{m+j+1}^{(i)})^2|_{\tau=0} < \varepsilon, \qquad \sum_{i=1}^{n} \omega_i^{2/\rho_i} = 1, \ \omega_0 \in \mathbf{R}^1 ; \qquad (7.3)$$

(2) la fonction

$$\tilde{H}^{(i)}(p^{(i)}, q^{(i)}, \omega)\begin{cases}\leqslant 0 & \text{pour} \quad 0\leqslant\tau\leqslant T,\\ <0 & \text{pour} \quad \tau=\tau'.\end{cases}$$

Remarquons que si $M^{m+1}=\mathbf{R}^{m+1}$. les équations (7.3) deviennent

$$p^{(i)}(0)=0,\ (q_0^{(i)},\ldots,q_n^{(i)})|_{\tau=0}\in M^{m+1},$$

$$\sum_{j=0}^{n}(q_{m+j+1}^{(i)})^2|_{\tau=0}<\varepsilon,\qquad \sum_{i=1}^{n}\omega_i^{2/\rho_i}=1,\qquad \omega_0\in\mathbf{R}^1.$$

Si les conditions d'absorption globales sont remplies, on peut construire le symbole d'un opérateur quasi réciproque en résolvant le problème

$$\begin{aligned}&-i\overset{1}{\Lambda}{}^{r-1}\frac{\partial\Psi}{\partial\tau}\left(\alpha,\tau,-i\frac{\overset{2}{\partial}}{\partial x'},\overset{1}{x'}\right)+\\&+\left[\!\left[F\left(\overset{1}{L_0},\ \ldots,\ \overset{n+1}{L_n},\ \overset{n+2}{\alpha}\right)\right]\!\right]\left[\!\left[\Psi\left(\alpha,\tau,-i\frac{\overset{2}{\partial}}{\partial x'},\overset{1}{x'}\right)\right]\!\right]=0,\\&\Psi|_{\tau=0}=E\nu\left(-i\frac{\partial}{\partial x'}\right),\end{aligned}\tag{7.4}$$

où $\Lambda=\Lambda(x)$, E est la matrice unité d'ordre m, $\nu(\eta)\in C^\infty(\mathbf{R}^{n+1})$, $\nu(\eta)=1$ pour $|\eta|<\varepsilon$, $x'=(x_0, x)$.

En reprenant les raisonnements du § 5 et en appliquant la K-formule, on peut mettre l'opérateur $F\left(\overset{1}{L_0},\ldots,\overset{n+1}{L_n},\overset{n+2}{\alpha}\right)$ sous la forme

$$\begin{aligned}F\left(\overset{1}{L_0},\ \ldots\overset{n+1}{L}_n,\overset{n+2}{\alpha}\right)=\overset{1}{\Lambda}{}^{\tau_0}&\left[\!\left[\mathscr{H}_2\left(\overset{1}{x'}\overset{1'}{\Lambda}{}^{-\rho},\ -i\overset{1'}{\Lambda}{}^{-\rho}\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial\alpha},\ -i\frac{\overset{2}{\partial}}{\partial x},\overset{2}{\alpha},\overset{1'}{\Lambda}{}^{\varepsilon}\right)+\right.\right.\\&\left.\left.+\left(-i\overset{1'}{\Lambda}{}^{-1}\right)\mathscr{H}_3\left(\overset{1}{x'}\overset{1'}{\Lambda}{}^{-\rho},\ -i\overset{1'}{\Lambda}{}^{-\rho}\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial\alpha},\ -i\frac{\overset{2}{\partial}}{\partial x},\overset{2}{\alpha},\overset{1'}{\Lambda}{}^{\varepsilon}\right)\right]\!\right]\end{aligned}$$

On peut alors ramener le problème (7.4) au suivant

$$\begin{aligned}&-i\overset{1}{\Lambda}{}^{-1}\frac{\partial\Psi}{\partial\tau}\left(\alpha,\tau,-i\frac{\overset{2}{\partial}}{\partial x'},\overset{1}{x'}\right)+\left[\!\left[\left(\mathscr{H}_2+\left(-i\ \overset{1'}{\Lambda}{}^{-1}\mathscr{H}_3\right)\right)\times\right.\right.\\&\left.\left.\times\left(\overset{1}{x'}\overset{1'}{\Lambda}{}^{-\rho},\ -i\overset{1'}{\Lambda}{}^{-\rho}\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial\alpha},\ -i\frac{\overset{2}{\partial}}{\partial x'},\overset{2}{\alpha},\overset{1'}{\Lambda}{}^{\varepsilon}\right)\right]\!\right]\left[\!\left[\Psi\left(\alpha,\tau,-i\frac{\overset{2}{\partial}}{\partial x'},\overset{1}{x'}\right)\right]\!\right]=0,\\&\Psi|_{\tau=0}=E\nu\left(-i\frac{\partial}{\partial x'}\right).\end{aligned}$$

Soit $\mu_i\left(\overset{1}{x'}\overset{1'}{\Lambda^{-\rho}}, \overset{1'}{-i\Lambda^{-\rho}}\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial\alpha}, \overset{2}{-i}\frac{\overset{2}{\partial}}{\partial x'}, \overset{2}{\alpha}, \overset{1'}{\Lambda^{\varepsilon}}\right)$ la i-ème valeur propre de la matrice $\mathscr{H}_2$. Introduisons la fonction

$$\gamma_i(X_0, \overline{X}; P_0, P; \omega; \varkappa_1, \varkappa_2) \overset{\text{déf}}{=} \mu_i(\omega - \Lambda^{1-\rho}P, \Lambda^{1-\rho}P_0; X, X_0, \Lambda^{-\varepsilon}),$$

où

$$X_0 = (q_0, \ldots, q_m) \in \mathbf{R}^{m+1}, \quad X = (q_{m+1}, \ldots, q_{n+m+2}) \in \mathbf{R}^{n+1},$$
$$P_0 = (p_0, \ldots, p_m) \in \mathbf{R}^{m+1}, \quad P = (p_{m+1}, \ldots, p_{n+m+2}) \in \mathbf{R}^{n+1},$$
$$\omega_i = \Lambda^{-\rho_i}x_i, \quad i = 1, \ldots, n, \quad \omega_0 = \Lambda^{-r_0}x_0,$$
$$\varkappa_1 \overset{\text{déf}}{=} (\Lambda^{\varepsilon_1}, \ldots, \Lambda^{\varepsilon_n}), \quad \varkappa_2 \overset{\text{déf}}{=} (\Lambda^{1-\rho_1}, \ldots, \Lambda^{1-\rho_n}).$$

La fonction γ_i dépend différentiablement des paramètres ω, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ pour Λ assez grand. Les valeurs propres λ_i de la matrice $\mathscr{H}(p, q, \omega)$ sont les limites des fonctions γ_i lorsque $\Lambda \to \infty$. A noter que $\operatorname{Im}\gamma_i \leqslant 0$.

Soit $(\Lambda^{n+m+1}, r^{n+m+1})$ un germe défini par les équations

$$\Lambda^{n+m+1} = \{P_0 = P = 0, \quad |X| < \varepsilon, \quad X_0 \in M^{m+1}\}, \quad r^{n+m+1} \equiv 0.$$

Construisons une variété M_i^{n+m+2} à germe complexe $w^{(i)}$, $z^{(i)}$, à fonction de dissipation $D^{(i)}$ et à potentiel $E^{(i)}$ à l'aide de l'application canonique associée au hamiltonien $\gamma_i(X_0, X, P_0, P, w, \varkappa_1, \varkappa_2)$. On s'inspirera à cet effet des idées du § 4.

Soit $\mathscr{K}_{M_i^{n+m+2}}$ un opérateur canonique sur M_i^{n+m+2}. On démontre comme aux §§ 5 et 6 que la solution asymptotique formelle du problème (7.4) est donnée par la formule

$$\Psi\left(\overset{2}{\alpha}, \tau, \overset{2}{-i}\frac{\overset{2}{\partial}}{\partial x'}, \overset{1}{x'}\right) = \left(\sum_{j=1}^{l} \mathscr{K}_{M_j^{n+m+2}}\varphi_j\right)\left(\overset{2}{\alpha}, \tau, \overset{2}{-i}\frac{\overset{2}{\partial}}{\partial x'}, \overset{1}{x'}\right),$$

où $\varphi_j \in B^m(M_j^{n+m+2})$.

Lemme 7.1. *Supposons qu'un opérateur* $f\left(\overset{1}{A_1}, \ldots, \overset{n}{A_n}, \overset{n+1}{B}\right)$ *vérifie les conditions globales d'absorption. Il est alors quasi inversible et le symbole* $\varkappa_N(x, \alpha)$ *de son quasi réciproque est égal à*

$$\varkappa(x, \alpha) = i\int_0^T \left\{\left[\left[\overset{1}{\Lambda^{(r-1)}}\sum_{j=1}^{l}(\mathscr{K}_{M_j^{n+m+2}}\varphi_j)\left(\alpha, \tau, \overset{2}{-i}\frac{\overset{2}{\partial}}{\partial x'}, \overset{1}{x'}\right)\right]\right] 1(x)\right\} d\tau,$$

où $1(x)$ *est la fonction unité.*

En modifiant convenablement les conditions d'absorption on peut démontrer, pour les opérateurs Δ-quasi inversibles, des propositions identiques au théorème 7.1 et au lemme 7.1.

Exemple. Soit l'équation (cf. exemple du § 4 de l'Introduction)

$$-i\frac{\partial u}{\partial t}+i\frac{\partial u}{\partial y}-i\left(\nu(t)\sqrt{1-\frac{\partial^2}{\partial y^2}}\right)u=f, \tag{7.5}$$

où $\nu(t)$ est une fonction différentiable bornée telle que

$$\nu(t)=0, \quad t\in[-T, T],$$
$$\nu(t)>0, \quad t\notin[-T, T], \quad T>0,$$
$$f(y, t)\in L_2, \quad \operatorname{supp} f(y, t)\subset\Delta\subset\mathbf{R}\times[-T, T].$$

Introduisons les notations

$$A_0=-i\frac{\partial}{\partial t}, \quad A_1=-i\frac{\partial}{\partial y}, \quad B_0=t, B_1=y.$$

Il vient

$$[\![A_0-A_1-i\nu(B_0)\sqrt{1+A_1^2}]\!]u=f. \tag{7.6}$$

Construisons l'opérateur quasi réciproque de l'opérateur

$$F\left(\overset{1}{A_0}, \overset{1}{A_1}, \overset{2}{B}\right) \overset{\text{déf}}{=} A_0-A_1-i\nu(B_0)\sqrt{1+A_1^2}.$$

Prenons la représentation ordonnée des opérateurs:

$$L_0=x_0-i\frac{\partial}{\partial\alpha_0}, \quad L_1=x_1-i\frac{\partial}{\partial\alpha_1}, \quad \alpha.$$

Le hamiltonien de l'opérateur $A_0-A_1-i\nu(B_0)\sqrt{1+A_1^2}$ s'écrit alors

$$F\left(\overset{1}{L_0}, \overset{2}{L_1}, \overset{2}{\alpha}\right)=\left(x_0-i\frac{\partial}{\partial\alpha_0}\right)-\left(x_1-i\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\right)-i\nu(\alpha_0)\sqrt{1+\left(x_1-i\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\right)^2}.$$

Donc

$$F(L_0(y, \eta), L_2(y, \eta), \alpha)=(y_0+y_2)-(y_1+y_3)-i\nu(\alpha_0)\sqrt{1+(y_1+y_3)^2}$$

Considérons le cas $\rho_1=\rho_2=\rho_3=\rho_0=1$. On obtient alors

$$\pi(y, \eta, \alpha)=(y_0+y_2)-(y_1+y_3)-i\nu(\alpha)(y_1+y_3)$$

ou, en passant aux variables,

$$\mathscr{H}(p, q, \omega)=(\omega_0+p_0-p_2)-(\omega_1+p_1-p_3)-i\nu(q_0)|\omega_1+p_1-p_3|. \tag{7.7}$$

Pour construire les bicaractéristiques de l'opérateur F, considérons le système

$$\begin{cases} \dot q_0=\dot q_2=1, \\ \dot q_1=\dot q_3=-1, \\ \dot p_i=0, \quad i=0, 1, 2, 3, \\ p|_{t=0}=p^{(0)}, \quad q|_{t=0}=q^{(0)} \end{cases}$$

avec des conditions initiales vérifiant (7.3). Les solutions de ce système sont de toute évidence les fonctions suivantes:

$$\begin{cases} p_0=p_1=p_2=p_3=0, \\ q_0=t+q_0^{(0)}, \quad q_2=t+q_2^{(0)}, \\ q_1=-t+q_1^{(0)}, \quad q_3=-t+q_3^{(0)}. \end{cases} \tag{7.8}$$

De l'équation (7.5) il vient que la partie imaginaire $\mathscr{H}(p, q, \omega)$ du hamiltonien est de la forme

$$\mathscr{H}(p, q, \omega)=-\nu(q_0)|\omega_1+p_1+p_3|=-\nu(q_0). \tag{7.9}$$

En vertu des équations (7.8) et (7.9), l'opérateur F satisfait les conditions d'absorption globales. Donc le problème de construire le symbole de l'opérateur quasi réciproque de F se ramène au suivant:

$$-i\frac{\partial\Psi}{\partial\tau}\left(\alpha, \tau, -i\overset{2}{\frac{\partial}{\partial x}}, \overset{1}{x}\right)+ \\ +\left[\left[F\left(\overset{1}{L_0}, \overset{1}{L_1}, \overset{2}{\alpha}\right)\right]\right]\left[\left[\Psi\left(\alpha, \tau, -i\overset{2}{\frac{\partial}{\partial x}}, \overset{1}{x}\right)\right]\right]=0, \tag{7.10}$$

$$\Psi\left(\alpha, 0, -i\overset{2}{\frac{\partial}{\partial x}}, \overset{1}{x}\right)=\rho\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)P(\alpha),$$

où $\rho(\eta)\in C_0^\infty$, $\rho(\eta)=0$, pour $|\eta|>\varepsilon$, $\rho(\eta)=1$ pour $|\eta|<\frac{\varepsilon}{2}$, $P(\alpha)\in C_0^\infty$. $P(\alpha)=1$ pour $\alpha\in\Delta_\varepsilon$, $P(\alpha)=0$ pour $\alpha\notin\Delta_\varepsilon$.

On peut mettre la fonction $\Psi\left(\alpha, \tau, -i\overset{2}{\frac{\partial}{\partial x}}, \overset{1}{x}\right)$ sous la forme

$$\Psi\left(\alpha, \tau, -i\overset{2}{\frac{\partial}{\partial x}}, \overset{1}{x}\right)=e^{i\overset{1}{\Lambda}S\left(\overset{1}{x}, -i\overset{2}{\frac{\partial}{\partial x}}, \alpha, \tau\right)}\theta\left(\overset{1}{x}, -i\overset{2}{\frac{\partial}{\partial x}}, \alpha, \tau\right),$$

où $\Lambda=|x_1|$.

Pour pouvoir satisfaire les conditions initiales du problème (7.10) mettons les fonctions S et θ sous la forme:

$$S(x, \eta, \alpha, 0)=0,$$
$$\theta(x, \eta, \alpha, 0)=\sigma(\eta)P(\alpha).$$

En portant la fonction Ψ dans l'équation (7.10) et en appliquant la formule de commutation, on obtient

$$e^{i\overset{1}{\Lambda}S\left(\overset{1}{x}, -i\overset{4}{\frac{\partial}{\partial x}}, \overset{4}{\alpha}, \tau\right)}\left[\left[\overset{1'}{\Lambda}\frac{\partial S}{\partial\tau}-i\frac{\partial}{\partial\tau}+x_0+\overset{1'}{\Lambda}\frac{\partial S}{\partial\alpha_0}-\right.\right.$$

$$-\overset{1'}{\Lambda}\frac{\partial S}{\partial \eta_0}-i\frac{\partial}{\partial \alpha_0}-x_1-\overset{1'}{\Lambda}\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}-i\frac{\partial}{\partial \alpha_1}+\overset{1'}{\Lambda}\frac{\partial S}{\partial \eta_1}-$$

$$-iv(\alpha_0)\left(1+\left(x_1+\overset{1'}{\Lambda}\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}-\overset{1'}{\Lambda}\frac{\partial S}{\partial \eta_1}-i\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\right)^2\right)^{1/2}\Big]\!\Big]^{2}\llbracket\theta\rrbracket=0. \qquad (7.11)$$

En ordonnant les opérateurs à l'aide de la K-formule, on trouve

$$\Big[\!\Big[^{3}\overset{1'}{\Lambda}\frac{\partial S}{\partial \tau}-i\frac{\partial}{\partial \tau}+x_0+\overset{1'}{\Lambda}\frac{\partial S}{\partial \alpha_0}-\overset{1'}{\Lambda}\frac{\partial S}{\partial \eta_0}-$$

$$-i\frac{\partial}{\partial \alpha_0}-\left(x_1+\overset{1'}{\Lambda}\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}-\overset{1'}{\Lambda}\frac{\partial S}{\partial \eta_1}-i\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\right)-$$

$$-iv(\alpha_0)\left(1+\left(x_1+\overset{1'}{\Lambda}\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}-\overset{1'}{\Lambda}\frac{\partial S}{\partial \eta_1}-i\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\right)^2\right)^{1/2}\Big]\!\Big]\Big[\!\Big[\,\theta\left(\overset{1}{x},-i\frac{\partial}{\partial x}^{2},\alpha_1,\tau\right)\Big]\!\Big]=$$

$$=\Lambda\left\{\left[\frac{\partial S}{\partial \tau}+\omega_0+\frac{\partial S}{\partial \alpha_0}+\frac{\partial S}{\partial \eta_0}+\frac{\partial S}{\partial \eta_1}-\omega_1-\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}-iv(\alpha_0)\left|\omega_1+\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}+\frac{\partial S}{\partial \eta_1}\right|\right]+\right.$$

$$\left.+\Big(\sum_{k\geqslant 0}(-i\Lambda^{-1})^k R_k\Big)_\theta\right\}\left(\overset{1}{x},-i\frac{\partial}{\partial x},\alpha,\tau\right), \qquad (7.12)$$

où R_k sont des opérateurs différentiels appliqués au symbole de l'opérateur $\theta\left(x,-i\dfrac{\partial}{\partial x},\alpha,\tau\right)$. Les opérateurs R_k sont d'ordre $\leqslant k$. Leurs coefficients sont des fonctions différentiables de ω_1, α, τ et des dérivées de S; $\omega_0=x_0\Lambda^{-1}$, $\omega_1=x_1\Lambda^{-1}$. Soient $S_1=\operatorname{Re}S$; $S_2=\operatorname{Im}S$; alors

$$\frac{\partial S}{\partial \tau}+\omega_0+\frac{\partial S}{\partial \alpha_0}-\frac{\partial S}{\partial \eta_0}-\omega_1-\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}+\frac{\partial S}{\partial \eta_1}-$$

$$-iv(\alpha_0)\left|w_1+\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}-\frac{\partial S}{\partial \eta_1}\right|=O_{S_2}(\Lambda^{-3/2}). \qquad (7.13)$$

L'équation (7.13) est une équation de Hamilton-Jacobi à fonction de dissipation $\mathscr{H}(p,\ q,\ \omega)$ définie par l'équation (7.7). En appliquant les méthodes développées au chapitre VI et en annulant les crochets du second membre de l'équation (7.12), on obtient une équation de transport à dissipation pour la fonction θ. Cette équation a été résolue lors de la démonstration du théorème 6.2 du chapitre VI.

Soit

$$D=-\int_0^\tau \operatorname{Im}\mathscr{H}\left(p(q^{(0)},\ \omega,\ \tau'),\ q(q^{(0)},\ \omega,\ \tau'),\ \omega\right)d\tau'\Big|_{q=q(q^{(0)},\ \omega,\ \tau)}.$$

Au chapitre VI on a montré que la solution de l'équation (7.13) vérifie l'inégalité de dissipation $\operatorname{Im} S(x, \alpha, \tau) \geqslant \gamma D$, où γ est une constante.

L'inégalité de dissipation et les conditions d'absorption nous donnent $D \geqslant \delta > 0$, $\delta = \text{const}$ pour $\tau = 2T$. Donc la fonction $\Psi(\alpha, \tau, \eta, x) = e^{i\Lambda S(x, \eta, \alpha, \tau)} \times$ $\times \theta(x, \eta, \alpha, \tau)$ satisfait la majoration

$$|\Psi(\alpha, T, \eta, x)| \leqslant \text{const } e^{-\delta|x_1|}.$$

Donc, grâce à la règle de réduction (cf. Introduction), on trouve que l'opérateur qui admet pour symbole

$$\varkappa(x, \alpha) = i \int_0^{2T} \left\{ \left[\!\left[\Psi\left(\alpha, \tau, -i \overset{2}{\frac{\partial}{\partial x}}, \overset{1}{x}\right) \right]\!\right] 1(x) \right\} d\tau, \tag{7.14}$$

est le quasi réciproque de l'opérateur F.

Remarquons qu'en vertu de l'équation (7.13), la fonction S s'écrit

$$S = -\omega_0 \tau + S^1(x_1, \alpha, \tau), \tag{7.15}$$

où S^1 est solution de l'équation

$$\frac{\partial S^1}{\partial \tau} + \frac{\partial S^1}{\partial \alpha_0} - \omega_1 - \frac{\partial S^1}{\partial \alpha_1} - i\nu(\alpha) \left| \omega_1 + \frac{\partial S^1}{\partial \alpha_1} \right| = O_{S_2}(\Lambda^{-3/2}).$$

Comme déjà signalé, les coefficients des opérateurs R_k de l'équation (7.12) ne dépendent pas de x_0. Donc, il en est de même de la fonction θ. Par ailleurs, les coefficients des opérateurs R_k ne dépendent pas de η. La fonction $\theta(x_1, \eta, \alpha, \tau)$ est alors de la forme (cf. (7.8))

$$\theta(x_1, \eta, \alpha, \tau) = \theta_1(x_1, \alpha, \tau)\, \rho(\eta_0 + \tau, \eta_1 + \tau), \tag{7.16}$$

où $\theta_1(x_1, \eta, \alpha, \tau)$ est également solution de l'équation de transport avec la condition initiale

$$\theta_1(x_1, \alpha, 0) = P(\alpha).$$

De (7.15) et (7.16), on déduit sans peine que

$$\left[\!\left[\Psi\left(\alpha, \tau, \overset{1}{\cdot}, i \overset{2}{\frac{\partial}{\partial x}}, \overset{1}{x}\right) \right]\!\right] 1(x) = e^{-ix_0\tau} \left[\!\left[e^{i\Lambda \overset{1}{S_1}\left(\overset{1}{x_1}, \alpha, \tau\right)} \theta_1\left(\overset{1}{x_1}, \alpha, \tau\right) \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \rho\left(0, -i \overset{2}{\frac{\partial}{\partial x_1}} + \tau\right) \right]\!\right] 1(x) \overset{\text{déf}}{=} e^{-ix_0\tau} \Psi'(x_1, \alpha, \tau).$$

Donc (7.14) peut être mise sous la forme

$$\varkappa(x, \alpha) = i \int_0^{2T} e^{-ix_0\tau} \Psi'(x_1, \alpha, \tau)\, d\tau. \tag{7.17}$$

Supposons que la fonction $f(y, t)$ du second membre de l'équation (7.5) est telle que $f(y, t)=0$ pour $t<0$. On peut alors prouver que

$$\left\{\left[\left[\varkappa\left(-i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial t}}, -i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial y}}, \overset{2}{t}, \overset{2}{y}\right)\right]\right] f(y, t)\right\}\Big|_{t=0}=0, \tag{7.18}$$

où $\varkappa\left(-i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial t}}, -i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial y}}, \overset{2}{t}, \overset{2}{y}\right)$ est un opérateur dont le symbole est donné par la formule (7.14). En se servant de (7.14), on trouve

$$\left[\left[\varkappa\left(-i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial t}}, -i\frac{\partial}{\partial y}, \overset{2}{t}, \overset{2}{y}\right)\right]\right] f(y, t)=$$

$$=i\int_0^{2T}\left\{\left[\left[e^{-\tau\overset{1}{\frac{\partial}{\partial t}}}\Psi'\left(-i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial y}}, \overset{2}{t}, \overset{2}{y}\right)\right]\right] f(y, t)\right\}d\tau=$$

$$=i\int_0^{2T}\left\{\left[\left[\Psi'\left(-i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial y}}, \overset{2}{t}, \overset{2}{y}\right)\right]\right] f(y, t-\tau)\right\}d\tau$$

En $t=0$, on a

$$\left\{\left[\left[\varkappa\left(-i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial t}}, -i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial y}}, \overset{2}{t}, \overset{2}{y}\right)\right]\right] f(y, t)\right\}_{t=0}=$$

$$=i\int_0^{2T}\left\{\left[\left[\Psi'\left(-i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial y}}, \overset{2}{t}, \overset{2}{y}\right)\right]\right] f(y, -\tau)\right\}d\tau=0.$$

Donc la fonction

$$u(t, y)=\left[\left[\varkappa\left(-i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial t}}, -i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial y}}, \overset{2}{t}, \overset{2}{y}\right)\right]\right] f(y, t)$$

est solution asymptotique formelle du problème

$$\begin{cases} -i\dfrac{\partial u}{\partial t}+i\dfrac{\partial u}{\partial t}=f(y, t) \\ u|_{t=0}=0, \end{cases}$$

où $f(y, t)=0$ pour $t<0$.

Signalons que pour démontrer (7.18), on s'est servi uniquement de la dépendance additive de l'opérateur $F\left(\overset{1}{A_0}, \overset{1}{A_1}, \overset{2}{B}\right)$ par rapport à A_0:

$$F\left(\overset{1}{A_0}, \overset{1}{A_1}, \overset{2}{B}\right) = A_0 + F'\left(\overset{1}{A_1}, \overset{2}{B}\right).$$

Donc le théorème fondamental nous fournit une méthode de construction assez générale de la solution du problème de Cauchy.

Exemple. Considérons l'équation

$$-i\frac{\partial u}{\partial t} + G\left(\overset{2}{y}, -i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial y}}\right)u - i\nu(t)\left(1 - \sum \overset{2}{\frac{\partial}{\partial y_i^2}}\right)^{1/2} u = f(y, t), \quad (7.19)$$

où $G(y, \xi)$ est une matrice homogène d'ordre m du premier degré en ξ, $f(y, t) \in L_2$, $\operatorname{supp} f(y, t) \subset \Delta \subset \mathbf{R}^n \times [0, T]$; $f(y, t) = 0$ pour $t < 0$. Signalons particulièrement que $\nu(t)$ est la fonction de l'exemple précédent et Δ est un domaine compact.

Supposons que les éléments de la matrice $G(y, \xi)$ appartiennent à l'espace $C^\infty(\mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^n \setminus 0))$ et sont uniformément bornés avec leurs dérivées pour $|\xi| = 1$. Supposons que la matrice $G(y, \xi)$ est diagonalisable pour toutes les valeurs de ses arguments par une transformation différentiable. Ceci étant, ses valeurs propres $\gamma_1, \ldots, \gamma_l$ $(l \leqslant m)$ appartiennent à l'espace $C^\infty(\mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^n \setminus 0))$ et satisfont les conditions $\operatorname{Im} \gamma_i \leqslant 0$, $i = 1, \ldots, l$, $\inf |\gamma_i(y, \xi) - \gamma_j(y, \xi)| \geqslant \text{const}$ pour $|\xi| = 1$.

Supposons que le système hamiltonien

$$\frac{\partial q^{(i)}}{\partial \tau} = \frac{\partial \operatorname{Re} \gamma_i}{\partial p}(q^{(i)}, p^{(i)}), \qquad (q_0^{(i)}(0), \ldots, q_n^{(i)}(0)) \in \Delta_\varepsilon,$$

$$\frac{\partial p^{(i)}}{\partial \tau} = -\frac{\partial \operatorname{Re} \gamma_i}{\partial q}(q^{(i)}, p^{(i)}), \qquad |p^{(i)}(0)| = 1$$

admet une solution pour $0 \leqslant \tau < \infty$. Construisons une solution asymptotique formelle du problème

$$\begin{cases} -i\dfrac{\partial u}{\partial t} + G\left(\overset{2}{y}, -i\overset{1}{\dfrac{\partial}{\partial y}}\right)u = f(y, t), \\ u(y, 0) = 0 \end{cases}$$

suivant les puissances de $\left(1 + \left|\dfrac{\partial}{\partial y}\right|^2\right)^{-1}$ pour $0 \leqslant t \leqslant T$ en se servant de la Δ-quasi-inversion de l'opérateur

$$-i\frac{\partial}{\partial t} + G\left(\overset{2}{y}, -i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial y}}\right) - i\nu(t)\left(1 - \sum_{i=1}^{n} \overset{2}{\frac{\partial}{\partial y_i^2}}\right)^{1/2}$$

Comme signalé dans l'Introduction, l'intégration d'une équation différentielle à dérivées partielles se ramène par une quasi inversion à l'intégration d'équations intégrales (ici d'une équation de Volterra) à noyaux différentiables. Introduisons les opérateurs

$$A_0 = -i\frac{\partial}{\partial t}, \quad A_1 = -i\frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, A_n = -i\frac{\partial}{\partial y_n}, \quad B = (t, y),$$

$$F\left(\overset{1}{A_0}, \overset{1}{A_1}, \ldots, \overset{1}{A_n}, \overset{2}{B}\right) = A_0 + G\left(\overset{2}{B}, \overset{1}{A_1}, \ldots, \overset{1}{A_n}\right) - i\nu(B_0)\left(1 + \sum_{i=1}^{n} A_i^2\right)^{1/2}$$

A l'opérateur F est associé le hamiltonien

$$F\left(\overset{1}{L_0}, \ldots, \overset{1}{L_n}, \overset{2}{\alpha}\right) = \left(x_0 - i\frac{\partial}{\partial \alpha_0}\right) + G\left(\overset{2}{\alpha}, \overset{1}{L_1}, \ldots, \overset{1}{L_n}\right) - i\nu(\alpha_0)\left(1 + \overset{1}{L_1^2} + \ldots + \overset{1}{L_n^2}\right)^{1/2},$$

$$L_i = x_i - i\frac{\partial}{\partial \alpha_i}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Donc

$$F(L_0(y, \eta), \ldots, L_n(y, \eta), \alpha) = (y_0 + y_{n+1}) + G(\alpha, y_1 + y_{n+2}, \ldots, y_n + y_{2n+1}) - i\nu(\alpha_0)\left(1 + \sum_{i=1}^{n} (y_i + y_{n+i+1})^2\right)^{1/2}.$$

Posons $\rho_1 = \ldots = \rho_{2n+1} = 1$ et passons des variables y, η, α aux nouvelles variables p, q, ω. On obtient

$$\mathscr{H}(p, q, \omega) = (\omega_0 + p_0 - p_{n+1}) + G(q_1, \ldots, q_n, \omega_1 + p_1 - p_{n+2}, \ldots, \omega_n + p_n - p_{2n+1}) - i\nu(q_0)\left(\sum_{i=1}^{n} (\omega_i + p_i - p_{n+i+1})^2\right)^{1/2}.$$

Les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ de la matrice $\mathscr{H}(p, q, \omega)$ se définissent visiblement comme suit :

$$\lambda_i(p, q, \omega) = \omega_0 + p_0 - p_{n+1} + \gamma_i(q_1, \ldots, q_n; \omega_1 + p_1 - p_{n+2}, \ldots, \omega_n + p_n - p_{2n+1}) - i\nu(q_0)\left(\sum_{i=1}^{n} (\omega_i + p_i - p_{n+i+1})^2\right)^{1/2}.$$

Voyons maintenant si l'opérateur $F\left(\overset{1}{A_0}, \overset{1}{A_1}, \ldots, \overset{1}{A_n}, \overset{2}{B}\right)$ satisfait les conditions d'absorption globales. Considérons la i-ème famille de bicaractéristiques de l'opérateur F

$$
\begin{aligned}
&\dot{q}_0^{(i)} = 1,\\
&\dot{q}_j^{(i)} = \frac{\partial \operatorname{Re}\lambda_i}{\partial p_j}(p^{(i)}, q^{(i)}, \omega), \quad j = 1, \ldots, 2n+2,\\
&\dot{p}_0^{(i)} = 0,\\
&\dot{p}_j^{(i)} = -\frac{\partial \operatorname{Re}\lambda_i}{\partial q_i}(p^{(i)}, q^{(i)}, \omega), \quad j = 1, \quad ., n,\\
&\dot{p}_0^{(i)} = 0, \quad n < k \leqslant 2n+1,\\
&p^{(i)}(0) = 0, \quad (q_0^{(i)}, \ldots, q_n^{(i)})\big|_{\tau=0} \in \Delta_\varepsilon,\\
&\sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 = 1, \quad \omega_0 \in \mathbf{R}^1,\\
&\sum_{j=0}^{n} (q_{m+j+1}^{(i)})^2\big|_{\tau=0} < \varepsilon.
\end{aligned}
\tag{7.20}
$$

On a alors de toute évidence

$$
\begin{aligned}
&p_k^{(i)} = 0 \quad \text{pour} \quad n < k \leqslant 2n+1\\
&q_0^{(i)} = \tau + q_0^{(i)}(0).
\end{aligned}
\tag{7.21}
$$

Les autres équations peuvent être intégrées à l'aide du système hamiltonien suivant :

$$
\begin{aligned}
&\dot{q}_j^{(i)} = \frac{\partial \operatorname{Re}\gamma_i}{\partial p_j}(q_1^{(i)}, \ldots, q_n^{(i)}, \omega_1 + p_1^{(i)}, \ldots, \omega_n + p_n^{(i)}),\\
&\dot{p}_j^{(i)} = -\frac{\partial \operatorname{Re}\gamma_i}{\partial q_j}(q_1^{(i)}, \quad ., q_n^{(i)}, \omega_1 + p_1^{(i)}, \ldots, \omega_n + p_n^{(i)}),\\
&j = 1, \ldots, n, \quad (p_1^{(i)}, \ldots, p_n^{(i)})\big|_{\tau=0} = 0,\\
&(q_1^{(i)}, \ldots, q_n^{(i)})\big|_{\tau=0} \in \Delta_\varepsilon.
\end{aligned}
\tag{7.22}
$$

Les fonctions $q_j^{(i)}$ sont définies par les formules suivantes pour $n \leqslant j \leqslant 2n+1$

$$
q_j^{(i)} = q_j^{(i)}(0) + \int_0^\tau \frac{\partial \operatorname{Re}\lambda_i}{\partial p_j}(p_1^{(i)}, \ldots, p_n^{(i)}, q_1^{(i)}, \ldots, q_n^{(i)}, \omega)\, d\tau'.
$$

Nous supposerons que l'équation (7.22), donc (7.20), admet une solution. Alors, l'opérateur $F\left(\overset{1}{A}_0, \ldots, \overset{1}{A}_n, \overset{2}{B}\right)$ vérifie les conditions d'absorption globales en vertu de (7.21) et de par le choix de la fonction $\nu(q_0)$. Du lemme 7.1 il s'ensuit donc que le symbole de l'opérateur Δ-quasi réciproque $\varkappa\left(\overset{1}{A}_0, \ldots, \overset{1}{A}_n, \overset{2}{B}\right)$ est de la forme

$$\varkappa(x_0, x, \imath) = i \int_0^{2T} \sum_{j=1}^{l} \left[\!\left[(\mathscr{K}_{M_{j(\omega)}^{2n+3}} \varphi_j)\left(\alpha, \tau, -i\overset{2}{\frac{\partial}{\partial x'}}, \overset{1}{x'}\right)\right]\!\right] 1 d\tau,$$

où M_j^{2n+3} est une famille de variétés lagrangiennes à $2n+3$ dimensions dépendant des paramètres

$$\omega_1 = \frac{x_1}{\Lambda}, \ldots, \omega_n = \frac{x_n}{\Lambda}, \qquad \Lambda = |x|.$$

La famille $M_j^{2n+3}(\omega)$ est associée à une famille de variétés lagrangiennes à germe complexe

$$\{M_{j,\tau}^{2n+3}(\omega), r_{j,\tau}^{2n+2}(\omega)\} = D_{\lambda_j}^{\tau}\{M_0^{2n+2}, r_0^{2n+2}\}, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 2T,$$

où

$$r_0^{2n+2} \equiv 0, \quad M_0^{2n+2} = \{p_0 = \ldots = p_n = 0, (q_0, \ldots, q_n) \in \Delta_\varepsilon\}.$$

La formule

$$\varkappa(x_0, x, \alpha) = i \int_0^{2T} e^{-ix_0\tau} \varkappa'(x, \alpha, \tau)\, d\tau$$

peut être établie comme dans l'exemple p. 634 à l'aide de l'expression de la valeur propre

$$\lambda_j(p, q, \omega) = \omega_0 + p_0 + p_{n+1} - \lambda_j'(p_1, \ldots, p_{2n+1}, q_1, \ldots, q_n, \omega_1, \ldots, \omega_n).$$

En appliquant encore la méthode y développée, on trouve

$$\left\{\left[\!\left[\varkappa\left(-i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial t}}, -i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial y}}, \overset{2}{t}, \overset{2}{y}\right)\right]\!\right] f(y, t)\right\}\Big|_{t=0} = 0$$

sous réserve que $f(y, t) = 0$ pour $t < 0$. Donc la fonction

$$u(y, t) = \left[\!\left[\varkappa\left(-i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial t}}, -i\overset{1}{\frac{\partial}{\partial y}}, \overset{2}{t}, \overset{2}{y}\right)\right]\!\right] f(y, t)$$

est solution asymptotique formelle du problème

$$\begin{cases} -i\dfrac{\partial u}{\partial t} + G\left(y^2, -i\overset{1}{\dfrac{\partial}{\partial y}}\right) u = f(y, t), \\ u(y, 0) = 0. \end{cases} \tag{7.23}$$

Exemple. Le théorème fondamental nous permet de construire les solutions asymptotiques d'équations différentielles aux dérivées partielles à coefficients croissants. Considérons un exemple de résolution

asymptotique (suivant les puissances de l'opérateur $\left(\overset{2}{y^2}+\frac{\overset{1}{\partial^2}}{\partial y^2}\right)^{-1/2}$) formelle du problème suivant:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-a(y)\,y^2 u=f(t,\,y), \\ u\big|_{t=0}=u'_t\big|_{t=0}=0. \end{cases}$$

Supposons que

$$f(t,\,y)\in L_2,\ \operatorname{supp} f(t,\,y)\subset\Delta\subset[0,\,T]\times\mathbf{R},$$

où Δ est un domaine compact, $a(y)$ une fonction différentiable réelle telle que $0<c_1\leqslant a(y)\leqslant c_2$, c_1 et c_2 étant des constantes.

Introduisons les opérateurs

$$\overset{1}{A}_0=-i\frac{\partial}{\partial t},\quad \overset{1}{A}_1=-i\frac{\partial}{\partial y},\quad \overset{2}{A}_2=y,\quad \overset{2}{B}_0=t,\quad \overset{2}{B}_1=y.$$

Les représentations ordonnées gauches de ces opérateurs sont de la forme

$$\overset{1}{L}_0=\left(x_0-i\frac{\partial}{\partial\alpha_0}\right),\quad \overset{1}{L}_1=x_1-i\frac{\partial}{\partial\alpha_1}-i\frac{\partial}{\partial x_2},$$

$$\overset{2}{L}_2=x_2;\ \overset{2}{\alpha}.$$

Alors l'équation (7.23) peut être mise sous la forme suivante:

$$[\![A_0^2-A_1^2-a(B_1)\,A_2^2]\!]\,u=f. \tag{7.24}$$

L'équation (7.24) peut être remplacée par un système d'équations. Considérons les équations suivantes

$$\begin{gathered} [\![A_0]\!]\,u(B)=v, \\ \left[\!\!\left[\left(\overset{1}{A}_1^2+a\left(\overset{2}{B}_1\right)\overset{2}{A}_2^2\right)^{1/2}\right]\!\!\right]u=w. \end{gathered} \tag{7.25}$$

On obtient alors

$$[\![A_0]\!]\,w-\left[\!\!\left[\left(\overset{1}{A}_1^2+a\left(\overset{2}{B}_1\right)\overset{2}{A}_2^2\right)^{1/2}\right]\!\!\right]v=0. \tag{7.26}$$

En se servant de la formule de commutation on peut mettre le produit d'opérateurs

$$\left[\!\!\left[\left(\overset{1}{A}_1^2+a\left(\overset{2}{B}_1\right)\overset{2}{A}_2^2\right)^{1/2}\right]\!\!\right]\left[\!\!\left[\left(\overset{1}{A}_1^2+a\left(\overset{2}{B}_1\right)\overset{2}{A}_2^2\right)^{1/2}\right]\!\!\right]$$

sous la forme suivante:

$$\left[\left(\overset{1}{A}{}_1^2+a\left(\overset{2}{B}_1\right)\overset{2}{A}{}_2^2\right)^{1/2}\right]\left[\left(\overset{1}{A}{}_1^2+a\left(\overset{2}{B}_1\right)\overset{2}{A}{}_2^2\right)^{1/2}\right]=$$

$$=A_1^2+a(B_1)A_2^2+R\left(\overset{1}{A}_1,\overset{2}{A}_2,\overset{2}{B}\right). \quad (7.27)$$

où le symbole $R(x_1, x_2, \alpha)$ est la somme asymptotique

$$R(x_1, x_2, \alpha)=\sum_{k\geqslant 0} R_k(x_1, x_2, \alpha)$$

et les fonctions $R_k(x_1, x_2, \alpha)$ homogènes de degré $(-k+1)>0$ par rapport à x_1 et x_2.

L'équation suivante se déduit sans peine de l'équation (7.27):

$$\left[\left(\overset{1}{A}{}_1^2+a\left(\overset{2}{B}_1\right)\overset{2}{A}{}_2^2\right)^{1/2}\right]w=\left[\left(A_1^2+a(B_1)A_2^2\right)\right]u+\left[R\left(\overset{1}{A}_1,\overset{2}{A}_2,\overset{2}{B}\right)\right]u.$$

En portant la fonction $u=\left[\left(\overset{1}{A}{}_1^2+a\left(\overset{2}{B}_1\right)\overset{2}{A}{}_2^2\right)^{1/2}\right]^{-1}$ dans la dernière équation et en appliquant la formule de commutation, on obtient

$$\left[\left(\overset{1}{A}{}_1^2+a\left(\overset{2}{B}_1\right)\overset{2}{A}{}_2^2\right)^{1/2}\right]w=$$

$$=\left[A_1^2+a(B_1)A_2^2\right]u+\left[R^1\left(\overset{1}{A}_1,\overset{2}{A}_2,\overset{2}{B}\right)\right]w, \quad (7.28)$$

où le symbole $R^1(x_1, x_2, \alpha)$ est la somme asymptotique

$$R^1(x_1, x_2, \alpha)=\sum_{k\geqslant 0} R'_k(x_1, x_2, \alpha)$$

et les fonctions $R'_k(x_1, x_2, \alpha)$, des fonctions homogènes de degré k par rapport à x.

Nous avons ainsi ramené l'équation (7.24) au système:

$$\left[A_0\right]w-\left[\left(\overset{1}{A}{}_1^2+a\left(\overset{2}{B}_1\right)\overset{2}{A}{}_2^2\right)^{1/2}\right]v=0,$$

$$\left[A_0\right]v-\left[\left(\overset{1}{A}{}_1^2+a\left(\overset{2}{B}_1\right)\overset{2}{A}{}_2^2\right)^{1/2}\right]w+\left[R^1\left(\overset{1}{A}_1,\overset{2}{A}_2,\overset{2}{B}\right)\right]w=f. \quad (7.29)$$

Comme dans l'exemple précédent, la construction d'une solution asymptotique formelle du système (7.29) se ramène à celle de l'opérateur Δ-quasi réciproque de l'opérateur

$$F\left(\overset{1}{A}_0,\overset{1}{A}_1,\overset{2}{A}_2,\overset{2}{B}\right)=$$

$$=\begin{pmatrix} A_0 & -\left(\overset{1}{A}{}_1^2+a\left(\overset{2}{B}_1\right)\overset{2}{A}{}_2^2\right)^{1/2} \\ -\left(\overset{1}{A}{}_1^2+a\left(\overset{2}{B}_1\right)\overset{2}{A}{}_2^2\right)^{1/2}+R^1\left(\overset{1}{A}_1,\overset{2}{A}_2,\overset{2}{B}\right) & A_0 \end{pmatrix}-$$

$$-iv\left(\overset{2}{B}_0^2\right)\left(\overset{1}{A}{}_1^2+\overset{2}{A}{}_2^2\right)^{1/2},$$

où la fonction $\nu(\alpha_0)$ est celle de l'exemple précédent, et le hamiltonien de l'opérateur F est de la forme

$$F\left(\overset{1}{L}_0, \overset{1}{L}_1, \overset{2}{\alpha}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} \left(x_0 - i\frac{\partial}{\partial\alpha_0}\right) & -\left(\left(x_1 - i\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial\alpha_1} - \frac{\overset{1}{\partial}}{\partial x_2}\right)^2 + a\left(\overset{2}{\alpha}_1\right)^2 x_2^2\right)^{1/2} \\ -\left(\left(x_1 - i\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial\alpha_1} - i\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial x_2}\right)^2 + a\left(\overset{2}{\alpha}_1\right)^2 x_2^2\right)^{1/2} + R^1\left(\overset{1}{L}_1, \overset{2}{L}_2, \overset{2}{\alpha}\right) & \left(x_0 - i\frac{\partial}{\partial\alpha_0}\right) \end{pmatrix} -$$

$$- i\nu(\alpha_0)\left(\left(x_1 - i\frac{\partial}{\partial\alpha_1} - i\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial x_2}\right)^2 + \overset{2}{x}_2^2\right)^{1/2}.$$

En passant aux variables (p, q, ω), on trouve

$$\mathscr{H}(p, q, \omega) =$$

$$= \begin{pmatrix} \omega_0 + p_0 - p_2 & -\left((\omega_1 + p_1 - p_3)^2 + a(q_1)(\omega_2 - p_4)^2\right)^{1/2} \\ \left((\omega_1 + p_1 - p_3)^2 + a(q_1)(\omega_2 - p_4)^2\right)^{1/2} & \omega_0 + p_0 - p_2 \end{pmatrix} -$$

$$- i\nu(q_0)\left((\omega_1 + p_1 - p_3)^2 + (\omega_2 - p_4)^2\right)^{1/2}.$$

Les valeurs propres λ_1 et λ_2 de matrice $\mathscr{H}(p, q, \omega)$ s'écrivent

$$\lambda_{1,2}(p, q_1, \omega) = \omega_0 + p_0 - p_2 \pm \left((\omega_1 + p_1 - p_3)^2 + \right.$$

$$\left. + a(q_1)(\omega_2 - p_4)^2\right)^{1/2} - i\nu(q_0)\left((\omega_1 + p_1 - p_3)^2 + (\omega_2 - p_4)^2\right)^{1/2}.$$

Les bicaractéristiques de l'opérateur F vérifient de toute évidence les conditions:

$$p_0^{(i)} = p_1^{(i)} = p_2^{(i)} = p_3^{(i)} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Donc

$$\lambda_i(p^{(i)}, q^{(i)}, \omega) = \omega_0 \pm \left((\omega_1 + p_1^{(i)})^2 + a(q_1^{(i)}\ \omega_2^2)\right)^{1/2} -$$

$$- i\nu(q_0^{(i)})\left((\omega_1 + p_1)^2 + \omega_2^2\right)^{1/2}, \quad i = 1, 2,$$

et il est aisé de vérifier que

$$q_0^{(i)} = \tau + q_0^{(i)}(0).$$

Donc l'opérateur F vérifie les conditions d'absorption globales et est Δ-quasi inversible. On peut vérifier les conditions initiales comme nous l'avons fait plus haut.

Exhibons un théorème identique au théorème 9.1 de l'Introduction pour le cas d'opérateurs dont les symboles sont des matrices.

Considérons une famille à un paramètre de symboles matriciels à m dimensions $f(x_1, \ldots, x_n, \alpha, \xi)$, $g(\alpha, \xi, x_0)$, où ξ est un paramètre $0 < \xi < \infty$. Soit

$$\lim_{\xi \to \infty} f(x_1, \ldots, x_n, \alpha, \xi) = \delta_0(x_1, \ldots, x_n, \alpha) \in \mathscr{S}^\infty.$$

Considérons la famille d'opérateurs

$$\hat{F} = g\left(\overset{2}{B}, \xi, \overset{1}{A_0}\right) + f\left(\overset{1}{A_1}, \ldots, \overset{n}{A_n}, \overset{n+1}{B}, \xi\right),$$

où g est une matrice d'ordre m dont les éléments appartiennent à $\mathscr{S}^\infty$.

Soit $\overset{1}{L_0}, \ldots, \overset{n+1}{L_n}, \overset{n+2}{\alpha}$, la représentation ordonnée gauche des opérateurs $A_0, \ldots, A_n, B$. Supposons que la fonction

$$F(L_0(y, \eta), \ldots, L_n(y, \eta), \alpha, \xi),$$

$$y_i \Leftrightarrow x_i, \qquad i = 0, \ldots, n,$$

$$y_{n+k} \Leftrightarrow -i \frac{\partial}{\partial \alpha_{k-1}}, \qquad k = 1, 2, \ldots, m+1,$$

est asymptotiquement ρ-quasi homogène par rapport à y et ξ, de degré r et d'ensemble pondéré

$$\rho_0, \ldots, \rho_n, \rho_{n+1}, \ldots, \rho_{n+m+1}, \rho_{n+m+2},$$

où $\rho_i = 1$ pour une valeur au moins de $i \in \{n+1, \ldots, m+n+1\}$. On admettra que le spectre de l'ensemble des opérateurs

$$\xi^{-\rho_0} \overset{1}{A_0}, \ldots, \xi^{-\rho_n} \overset{n+1}{A_n}$$

est contenu dans la boule $|x| < d$, d étant une constante.

Changeons les noms des variables. Soient J_1 un sous-ensemble de $(0, \ldots, n)$ tel que $\rho_i = 1$ pour $i \in J_1$, et J_2 un sous-ensemble de $(0, \ldots, m)$ tel que $\rho_{n+j+1} = 1$ uniquement pour $j \in J_2$.

Posons

$$y_{n+j+1} = p_j, \quad j \in J_2, \qquad y_{n+j} = 0, \quad j \notin J_2 \cap \{0, \ldots, m\},$$

$$y_i = -p_{m+i+1} + \omega_i, \quad i \in J_1, \qquad y_i = \omega_i, \quad i \notin J_1, \qquad i \in (0, \ldots, n),$$

$$\alpha_i = q_i, \quad i = 0, \ldots, m, \qquad \eta_i = q_{m+j+1}, \quad j = 0, \ldots, n, \quad \xi = \nu.$$

Appelons $\pi(y, \eta, \alpha, \xi)$ la partie principale de la matrice $F(L_0(y, \eta), \ldots, L_n(y, \eta), \alpha, \xi)$ et soit $\mathscr{H}(p, q, \omega, \nu)$ la matrice déduite de $\pi(y, \eta, \alpha, \xi)$ par le changement de variables introduit.

Appelons $\mathscr{H}_1(p, q, \omega, \nu)$ la partie essentielle de la matrice $F(L_0(y, \eta), \ldots, L_n(y, \eta), \alpha, \xi)$ dans les variables p, q, ω, ν. Formulons la condition d'absorption comme nous l'avons fait au début du paragraphe. La seule différence tient à l'apparition de l'inégalité $|\nu| < d$ parmi les inégalités définissant la variété $\Omega_\varepsilon^{(i)}$, $\Omega_\varepsilon^{(i)}(\Delta)$ à cause de la présence d'un paramètre supplémentaire ν.

Théorème 7.2. *Supposons qu'un opérateur* $\hat{F}=g\left(\overset{2}{B}, \xi, \overset{1}{A_0}\right)+f\left(\overset{1}{A_1}, \ldots, \overset{n}{A_n}, \overset{n+1}{B}, \xi\right)$ *vérifie les conditions d'absorption. Il existe alors une suite de symboles* $\varkappa_N(x_0, x, \alpha, \xi)\in C^\infty_{\mathscr{L}}$ *dépendant du paramètre* ξ, *telle que*

$$\left[\left[g\left(\overset{2}{B}, \xi, \overset{1}{A_0}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+f\left(\overset{1}{A_1}, \ldots, \overset{n}{A_n}, \overset{n+1}{B}, \xi\right)\right]\right]\left[\left[\varkappa_N\left(\overset{1}{A_0}\overset{2}{A_1}, \ldots, \overset{n+1}{A_n}, \overset{n+2}{B}, \xi\right)\right]\right]=$$

$$=P_0\left(\xi^{-\rho_0}\overset{1}{A_0}, \ldots, \xi^{-\rho_n}\overset{n+1}{A_n}\right)+R_N\left(\overset{1}{A_0}, \ldots, \overset{n+1}{A_n}, \overset{n+2}{B}, \xi\right),$$

où $R_N(x_0, x_1, \ldots, x_n, \alpha, \xi)=O_{\mathscr{L}}(|x|^{-N})$ *pour tout* $N>0$ *uniformément en* ξ, α *et* x_0; $P(x_1, \ldots, x_n)$ *est une fonction de classe* C_0^∞ *égale à* 1 *dans le domaine* $|x|<d$.

Les opérateurs dont les symboles dépendent d'un paramètre sont justiciables du lemme 7.1 et des propositions respectives concernant les suites Δ-quasi réciproques. A titre d'exemple illustrant ce théorème, construisons une solution asymptotique formelle du problème de Cauchy pour les schémas aux différences. Soit un réseau Ω_h dans l'espace $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$

$$(t, y)\in\Omega\Leftrightarrow(t=kh_0,\ y_1=j_1h, \ldots, y_n=j_nh),$$

où $k, j_1, \ldots, j_n$ sont des entiers.

Considérons le problème de Cauchy aux différences suivant:

$$\frac{U^{k+1}_{j_1, \ldots, j_n}-U^k_{j_1, \ldots, j_n}}{h_0}=$$

$$=\sum C^{(\nu)}_{j_1, \ldots, j_n}\frac{U^{k+1}_{j_1, \ldots, j_{\nu+1}, \ldots, j_n}-U^{k+1}_{j_1, \ldots, j_{\nu-1}, \ldots, j_n}}{2h}+f^{k+1}_{j_1, \ldots, j_n},$$

$$U^0_{j_1, \ldots, j_n}=0, \tag{7.30}$$

où $C^{(\nu)}_{j_1, \ldots, j_n}$ sont des matrices réelles d'ordre m, restrictions au réseau Ω_h des matrices $C_\nu(y)$ à éléments bornés différentiables; $U^n_{j_1, \ldots, j_n}$, $f^n_{j_1, \ldots, j_n}$ des fonctions de maille définies sur le réseau Ω_h. A propos de la fonction $f^n_{j_1, \ldots, j_n}$, on supposera qu'elle s'annule en tous les nœuds du réseau Ω_h extérieurs à un domaine compact $\Delta\subset[0\times T]\times\mathbf{R}^n$.

Le théorème de Kotelnikov nous permet d'associer à une fonction de maille $\varphi^k_{j_1, \ldots, j_n}$ telle que

$$h_0h^n\sum_{k, j_1, \ldots, j_n}|\varphi^k_{j_1, \ldots, j_n}|^2<\infty \tag{7.31}$$

une fonction $\varphi_h(t, y)$ telle que

(1) $\varphi_h(k\tau, j_1h, \ldots, j_nh)=\varphi^k_{j_1, \ldots, j_n}$;

(2) $\int\limits_{\mathbf{R}^{n+1}}|\varphi_h(t, y)|^2\,dydz<\infty$.

Posons

$$\varphi_h(t, y)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1} \int\limits_{\substack{|\xi_i h|\leqslant\pi,\ i=1,\ldots,n \\ |\xi_0 h|\leqslant\pi}} e^{i\langle y,\xi\rangle+\tau\langle t,\xi_0\rangle}\times$$

$$\times h_0 h^n \sum_{k, j_1,\ldots,j_n} \varphi^k_{j_1,\ldots,j_n} e^{-i\xi_0 k h_0 - i\sum\limits_{s=1}^{n} j_s h\xi_s} d\xi_0\, d\xi_k. \quad (7.32)$$

Il est immédiat de vérifier que la fonction $\varphi_h(t, y)$ remplit toutes les conditions requises.

Désignons par $f_h(t, y)$ la fonction d'argument continu construite à partir de la fonction de maille $f^k_{j_1,\ldots,j_n}$ à l'aide de la formule (7.32).

Supposons que la fonction continue construite est solution du problème:

$$\frac{u(t+h_0, y, h, h_0)-u(t, y, h, h_0)}{h_0}=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n} C_\nu(y)\,\frac{u(t+h_0, y_1,\ldots,y_\nu+h,\ldots,y_n, h, h_0)-u(t+h_0, y_1,\ldots,y_n, h, h_0)}{h}+$$

$$+f_h(t+h_0, y), \quad (7.33)$$

$$u(0, y, h, h_0)=0.$$

Il est évident que la restriction de la fonction $u(t, y, h, h_0)$ au réseau Ω_h est solution du problème (7.30). Donc la construction d'une solution asymptotique formelle du problème (7.30) se ramène à celle d'une solution asymptotique formelle du problème (7.33).

Signalons encore que la majoration

$$\left\| h\frac{\partial}{\partial y_i} f_h(t, y)\right\|_{L_2} \leqslant \pi \|f_h(t, y)\|_{L_2}$$

entraîne que le spectre commun des opérateurs $-ih\dfrac{\partial}{\partial y_1},\ldots,-ih\dfrac{\partial}{\partial y_n}$ est contenu dans la boule $|x|\leqslant\pi\sqrt{n}$. Posons

$$\overset{1}{A}_0=-i\frac{\partial}{\partial t},\quad \overset{1}{A}_1=-i\frac{\partial}{\partial y_1},\ldots,\quad \overset{1}{A}_n=-i\frac{\partial}{\partial y_n},\quad \xi=\frac{1}{h},$$

$$\overset{2}{B}_0=t,\quad \overset{2}{B}_1=y_1,\ldots,\overset{2}{B}_n=y_n.$$

Il est immédiat de vérifier que les opérateurs

$$\overset{1}{L}_0=x_0-i\frac{\partial}{\partial\alpha_0},\ldots,\overset{n+1}{L}_n=x_n-i\frac{\partial}{\partial\alpha_n};\ \overset{n+2}{\alpha}$$

sont les représentations ordonnées gauches des opérateurs introduits. Dans les notations ci-dessus, l'équation (7.33) devient

$$\left[\left[\xi(1-e^{-i\xi^{-1}\overset{1}{A}_0})+\xi\sum_{\nu=1}^{n}C_\nu\left(\overset{2}{B}\right)\sin\xi^{-1}\overset{1}{A}_\nu\right]\right]u=f_h. \tag{7.34}$$

Comme dans les exemples précédents, on construira une solution asymptotique formelle du problème (7.34) à l'aide d'un opérateur Δ-quasi réciproque. Plus exactement, considérons l'opérateur

$$F\left(\overset{1}{A}_0,\overset{1}{A}_1,\ldots,\overset{1}{A}_n,\overset{2}{B},\xi\right)\overset{\text{déf}}{=}\xi[1-e^{-i\xi^{-1}\overset{1}{A}_0}]+$$
$$+\xi\sum_{\nu=1}^{n}C_\nu\left(\overset{2}{B}\right)\sin\xi^{-1}\overset{1}{A}_\nu-i\nu(B_0)\cdot\left(1+\sum_{\nu=1}^{n}\overset{1}{A}_\nu^2\right)^{1/2},$$

où la fonction $\nu(\alpha_0)$ est la même que dans les exemples précédents.

En passant aux variables p, q, ω, ν, on obtient

$$\mathscr{H}(p,q,\omega,\nu)=\frac{1}{\nu}[1-e^{-i\nu(\omega_0+p_0-p_{n+1})}]+$$
$$+\frac{1}{\nu}\sum_{j=1}^{n}C_j(q_1,\ldots,q_n)\sin\nu(\omega_j+p_j-p_{n+j+1})-$$
$$-i\nu(\alpha_0)\left(\sum_{j=1}^{n}(\omega_j+p_j-p_{n+j+1})^2\right)^{1/2}$$

Les valeurs propres $\lambda_1,\ldots,\lambda_l$ $(l\leqslant m)$ de la matrice s'écrivent

$$\lambda_i(p,q,\omega,\nu)=\frac{1}{\nu}[1-e^{-i\nu(\omega_0+p_0-p_{n+1})}]+$$
$$+\gamma_i(q_1,\ldots,q_n,\omega_1+p_1-p_{n+1},\ldots,\omega_n+p_n-p_{n+1},\nu)-$$
$$-i\nu(q_0)\left(\sum_{j=1}^{n}(\omega_j+p_j-p_{n+j+1})^2\right)^{1/2}, \tag{7.35}$$

où γ_i sont les valeurs propres de la matrice

$$\frac{1}{\nu}\sum_{j=1}^{n}C_j(q_1,\ldots,q_n)\sin(\omega_j+p_j-p_{n+1+j}).$$

Posons

$$H^{(i)}=\operatorname{Re}\gamma_i,\qquad \tilde{H}^{(i)}=\operatorname{Im}\gamma_i.$$

Supposons que

$$\tilde{H}^{(i)}\leqslant 0,\qquad i=1,\ldots,l. \tag{7.36}$$

Nous devons établir les conditions suffisantes pour que les conditions d'absorption soient remplies dans cet exemple.

Par définition, la i-ème famille des bicaractéristiques de l'opérateur F est solution du système hamiltonien suivant:

$$\begin{aligned}
&\dot{q}_0^{(i)} = \cos \nu(\omega_0 + p_0 - p_{n+1}),\\
&\dot{q}_j^{(i)} = \frac{\partial \operatorname{Re}\lambda_i}{\partial p_j}(p^{(i)}, q^{(i)}, \omega, \nu), \quad j = 1, \ldots, 2n+1,\\
&\dot{p}_0^{(i)} = \dot{p}_{n+j}^{(i)} = 0,\\
&\dot{p}_j^{(i)} = -\frac{\partial H^{(i)}}{\partial q_j}(q_1^{(i)}, \ldots, q_n^{(i)}, \omega_1 + p_1^{(i)} - p_{n+1}^{(i)}, \ldots, \omega_n + p_n^{(i)} - p_{2n+1}^{(i)}, \nu), \quad 1 \leqslant j \leqslant n.
\end{aligned} \tag{7.37}$$

De (7.37) on déduit immédiatement que

$$\begin{aligned}
&q_0^{(i)} = \tau \cos \nu\omega_0 + q_0^{(i)}(0),\\
&p_j^{(i)} \equiv 0, \quad n < j \leqslant 2n+1.
\end{aligned} \tag{7.38}$$

Donc le système (7.37) admet une solution pour tout τ s'il en est de même du système hamiltonien

$$\begin{aligned}
&\dot{q}_j^{(i)} = \frac{\partial H^{(i)}}{\partial p_j}(q_1^{(i)}, \ldots, q_n^{(i)}, \omega_1 + p_1^{(i)}, \ldots, \omega_n + p_n^{(i)}, \nu),\\
&\dot{p}_j^{(i)} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}(q_1^{(i)}, \ldots, q_n^{(i)}, \omega_1 + p_1^{(i)}, \ldots, \omega_n - p_n^{(i)}, \nu),\\
&p_1^{(i)}(0) = \ldots = p_n^{(i)}(0), \ (q_1^{(i)}(0), \ldots, q_n^{(i)}(0)) \in \Delta_\varepsilon,\\
&\sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 = 1, \ |\nu| < \pi\sqrt{n}.
\end{aligned} \tag{7.39}$$

A noter que $\tilde{H}^{(i)} \leqslant \dfrac{1 - \cos \nu(\omega_0 + p_0 - p_{n+1})}{\nu}$. Donc si $|\cos \nu\omega_0| \leqslant \delta$, où $\delta > 0$ est un nombre assez petit, alors $\tilde{H}^{(i)} \leqslant \dfrac{1-\delta}{\nu} < 0$. En vertu de (7.35), (7.36), (7.38), l'opérateur F satisfait les conditions d'absorption globales si le système (7.37) admet une solution différentiable pour tout τ et $i = 1, \ldots, l$. Nous avons donc prouvé la proposition suivante.

Proposition. *Un opérateur* $F\left(\overset{1}{A}_0, \ldots, \overset{1}{A}_n, \overset{2}{B}, \xi\right)$ *est* Δ*-quasi inversible si sont réalisées les inégalités* (7.35) *et si le système hamiltonien admet une solution différentiable.*

Supposons que les conditions de la proposition sont remplies. L'opérateur $F\left(\overset{1}{A}_0, \ldots, \overset{1}{A}_n, \overset{2}{B}, \xi\right)$ est alors Δ-quasi inversible. Soit $\varkappa(x_0, x_1, \alpha, \xi)$ le symbole de son Δ-quasi réciproque. Comme dans les exemples précédents, on démontre que

$$\varkappa(x_0, x_1, \alpha, \xi) = \int_0^{2T} \exp\{\tau\xi(e^{-i\xi^{-1}x_0} - 1)\}\, \varkappa'(x, \alpha, \tau, \xi)\, d\tau.$$

Prouvons l'égalité

$$[\![\varkappa(\overset{1}{A}_0, \overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{1}{A}_n, \overset{2}{B}, \xi)]\!]\, f_h|_{t=0} = 0. \tag{7.40}$$

On a

$$[\![\varkappa(\overset{1}{A}_0, \overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{1}{A}_n, \overset{2}{B}, \xi)]\!]\, f_h = [\![\int_0^{2T} \exp\{\tau\xi(e^{-i\xi^{-1}\overset{1}{A}_0} - 1)\} \times$$

$$\times \varkappa'(\overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{1}{A}_n, \overset{2}{B}, \tau, \xi)\, d\tau]\!]\, f = \int_0^{2T} \Big\{[\![\varkappa'(\overset{1}{A}_1, \ldots, \overset{1}{A}_n, \overset{2}{B}, \tau, \xi)]\!] \times$$

$$\times [\![\exp\{\tau\xi(e^{-i\xi^{-1}\overset{1}{A}_0} - 1)\}]\!]\, f_h\Big\}\, d\tau.$$

Le problème se ramène donc au calcul de l'expression

$$J = \left\{\exp\left\{-\tau \frac{1 - e^{h_0 \frac{\partial}{\partial t}}}{h_0}\right\} f_h(t, y)\right\}\Big|_{t=0},$$

où $\tau \geqslant 0$, $f_h(t, y) = 0$ pour $t = kh_0$, $k \leqslant 0$.

On a

$$J = \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{it\xi_0 - \tau \frac{1 - e^{-ih\xi_0 h_0}}{h_0}} \tilde{f}_h(\xi_0, y)\, d\xi, \tag{7.41}$$

où $\tilde{f}_h(\xi_0, y)$ est la transformée de Fourier par rapport à t de la fonction $f_h(t, y)$, soit

$$\tilde{f}_h(\xi_0, y) = h_0 \sum_k e^{-ik\xi_0 h_0} f_k(y, h). \tag{7.42}$$

On a en vertu de (7.32)

$$f_k(y, h) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{|\xi_i h| \leqslant \pi,\ i=1,\ldots,k} e^{i\langle \xi, y\rangle} h^n \sum_{j_1, \ldots, j_n} f^k_{j_1, \ldots, j_n} e^{-i\sum_{k=1}^n j_k h \xi_k}\, d\xi.$$

En désignant $e^{-it\xi_0}$ par z, on peut mettre (7.41) sous la forme

$$J = \oint_{|z|=1} e^{\frac{\tau}{h_0} z} (h \sum_{k \geqslant 1} f_k(y, h) z^k) \frac{dz}{z} = 0.$$

Nous avons prouvé (7.40). Donc la restriction de la fonction

$$u(t, y, h, h_0) = [\![\varkappa(\overset{1}{A}_0, \ldots, \overset{1}{A}_n, \overset{2}{B}, \xi)]\!]\, f_h(t, y)$$

au réseau Ω_h est une solution asymptotique formelle (à des fonctions de C^∞ près) du problème (7.30) sur $[0, T] \times \mathbf{R}^n$.

En se servant de cette solution, on déduit sans peine le développement asymptotique suivant h de la solution de l'équation (7.33) (ainsi que de (7.30)).

CHAPITRE VIII

THÉORIE DES ÉQUATIONS LINÉAIRES SUR DES SEMI-MODULES

§ 1. Exemples d'équations linéaires sur des semi-modules

Considérons l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{h}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad x\in\mathbf{R},\ t\geqslant 0, \tag{1.1}$$

où $h>0$ est un paramètre. On sait que toute combinaison linéaire

$$u=\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2 \tag{1.2}$$

de solutions u_1 et u_2 de l'équation (1.1) est solution de cette équation.

Faisons le changement suivant:

$$u=\exp\bigl(-w(x,t)/h\bigr). \tag{1.3}$$

On obtient alors l'équation non linéaire suivante:

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2-\frac{h}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0, \tag{1.4}$$

appelée parfois *équation de Bürgers**). Il est évident qu'à toute solution u_i de l'équation (1.1) est associée la solution $w_i=-h\ln u_i$ de l'équation (1.4), $i=1, 2$. A la solution (1.2) de l'équation (1.1) est alors associée la solution de l'équation (1.4)

$$w=-h\ln\left(e^{-\frac{w_1+\mu_1}{h}}+e^{-\frac{w_2+\mu_2}{h}}\right),$$

où $\mu_i=-h\ln\lambda_i \quad (i=1, 2)$.

On en déduit que l'équation (1.4) est aussi linéaire, mais dans un espace de fonctions muni des opérations suivantes:

l'« addition » $a\oplus b=-h\ln(e^{-a/h}+e^{-b/h})$;

la « multiplication » $a\odot b=a+\lambda$.

Ceci étant, la substitution $w=-h\ln u$ envoie 0 dans ∞ et 1 dans 0. Donc, le *zéro généralisé* $\mathbb{0}$ de ce nouvel espace sera ∞ : $\mathbb{0}=\infty$, et l'*unité généralisée* $\mathbb{1}$,

*) L'équation ordinaire de Bürgers se déduit de (1.4) par dérivation par rapport à x et la substitution $v=\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

le zéro ordinaire : $\mathbb{1}=0$. L'espace des fonctions muni des opérations $\oplus$ et $\odot$ et des éléments $\mathbb{0}$ et $\mathbb{1}$ est isomorphe à un espace ordinaire de fonctions à valeurs dans $\mathbf{R}$ muni des classiques opérations de multiplication et d'addition.

On peut concevoir que des extra-terrestres usent des opérations $\oplus$ et $\odot$ et de leur point de vue l'équation (1.4) est linéaire.

Tout ce qui vient d'être dit n'a semble-t-il rien d'original et les Terriens n'ont aucune raison de renoncer à leurs opérations arithmétiques, dans la mesure où par un changement de fonction on peut passer de l'équation (1.4) à l'équation (1.1) qui est linéaire au sens habituel. Mais il est possible que des équations, linéaires au sens des opérations $\oplus$ et $\odot$, ne se ramènent pas au cas linéaire, à telle enseigne qu'il est rationnel de transposer à l'équation (1.4) les méthodes élaborées pour les équations linéaires.

Considérons un espace des fonctions à valeurs dans un anneau muni des opérations $a\oplus b=-h(e^{-a/h}+e^{-b/h})$, $\lambda\odot b=\lambda+b$ et dotons-le du produit scalaire

$$(w_1, w_2)=-h\ln\int e^{-\frac{w_1+w_2}{h}}dx.$$

Montrons que ce produit est bilinéaire, plus exactement, que

$$(a\oplus b, c)=(a, c)\oplus(b, c), \qquad (\lambda\odot a, c)=\lambda\odot(a, c).$$

En effet,

$$(a\oplus b, c)=-h\ln\left(\int\exp\left(\frac{-\left(-h\ln(e^{-a/h}+e^{-b/h})+c\right)}{h}\right)dx\right)=$$

$$=-h\ln\left(\int(e^{-a/h}+e^{-b/h})\,e^{-c/h}\,dx\right)=$$

$$=-h\ln\left(\int e^{-\frac{a+c}{h}}dx+\int e^{-\frac{b+c}{h}}dx\right)=(a, c)\oplus(b, c),$$

$$(\lambda\odot a, c)=-h\ln\int e^{-\frac{a+\lambda}{h}}e^{-c/h}\,dx=$$

$$=-h\ln(e^{-\lambda/h}\int e^{-\frac{a+c}{h}}dx)=\lambda+\ln\int e^{-\frac{a+c}{h}}dx=\lambda\odot(a, c).$$

Citons un exemple d'opérateur hermitien dans cet espace. Considérons l'opérateur

$$Lw\to w\odot\left(-h\ln\left(\frac{(w')^2}{h^2}-\frac{w''}{h}\right)\right).$$

Vérifions qu'il est hermitien. On a

$$(w_1, Lw_2)=-h\ln\int e^{-\frac{w_1+Lw_2}{h}}dx=$$

$$=-h\ln\int\exp\left[-\left(w_1+w_2-h\ln\left(\frac{(w_2')^2}{h^2}-\frac{w_2''}{h}\right)\right)/h\right]dx=$$

$$=-h\ln\int e^{-\frac{w_1}{h}}e^{-\frac{w_2}{h}}\left(\frac{(w_2')}{h^2}-\frac{w_2''}{h}\right)dx=$$

$$= -h \ln \int e^{-\frac{w_1}{h}} \frac{d^2}{dx^2} e^{-\frac{w_2}{h}} dx = -h \ln \int \frac{d^2}{dx^2} e^{-\frac{w_1}{h}} e^{-\frac{w_2}{h}} dx =$$

$$= -h \ln \int e^{-\frac{w_1}{h}} \left(\frac{(w_1')^2}{h^2} - \frac{w}{h} - e^{-\frac{w_2}{h}} dx \right) =$$

$$= -h \ln \int \exp \left[-\left(w_1 - h \ln \left(\frac{(w_1')^2}{h^2} - \frac{w_2''}{h} \right) \right) / h \right] dx =$$

$$= -h \ln \int e^{-\frac{Lw_1 + w_2}{h}} dx = (Lw_1, w_2).$$

On s'assure sans peine qu'il est aussi linéaire.

Construisons l'opérateur résolvant de l'équation de Bürgers: $\mathscr{L}_t$: $w_0 \to w$, où w est la solution de l'équation (1.4) qui vérifie la condition initiale $w|_{t=0} = w_0$.

La solution de l'équation (1.1) qui vérifie la condition initiale $u|_{t=0} = u_0$ est de la forme

$$u = \frac{1}{\sqrt{2\pi ht}} \int e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2ht}} u_0(\xi)\, d\xi.$$

Comme $u = \exp\{-w/h\}$, $w = -h \ln u$, on obtient

$$\mathscr{L}_t w_0 = -h \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi ht}} \int e^{-\left(\frac{(x-\xi)^2}{2ht} + \frac{w_0(\xi)}{h}\right)} d\xi).$$

Montrons que l'opérateur $\mathscr{L}_t$ est hermitien pour le nouveau produit scalaire. En effet,

$$(w_1, \mathscr{L}_t w_2) = -h \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi ht}} \int \exp \left[\frac{-w_1 + h \ln \int e^{-\left(\frac{(x-\xi)^2}{2ht} + \frac{w_2(\xi)}{h}\right)} d\xi}{h} \right] =$$

$$= -h \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi ht}} \int \exp \left[\frac{-w_1 + h \ln e^{h\frac{d^2}{dx^2}} e^{-\frac{w_2}{h}}}{h} \right] dx =$$

$$= -h \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi ht}} \int e^{-\frac{w_1}{h}} e^{ht\frac{d^2}{dx^2}} e^{-\frac{w_2}{h}} dx = -h \ln \int e^{-\frac{w_1}{h}} e^{h\frac{d^2}{dx^2}}$$

$$e^{-\frac{w_1}{h}} dx = -h \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi ht}} \int \exp \left[\frac{-w_2 + h \ln e^{ht\frac{d^2}{dx^2}} e^{-\frac{w_1}{h}}}{h} \right] dx =$$

$$= -h \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi ht}} \int \exp \left[\frac{-w_2 + h \ln \int e^{-\left(\frac{(x-\xi)^2}{2ht} + \frac{w_1(\xi)}{h}\right)} d\xi}{h} \right] dx = (\mathscr{L}_t w_1, w_2).$$

L'équation de Bürgers $2w_t+(w_x)^2-hw_{xx}=0$ se transforme, lorsque $h\to 0$, en l'équation de Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial S}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2=0; \tag{1.5}$$

$a\oplus b=-h\ln(e^{-a/h}+e^{-b/h})$ devient $a\oplus b=\min\{a,b\}$ lorsque $h\to 0$.

La «multiplication» ne dépend pas de b, donc on a comme toujours

$$a\odot\lambda=a+\lambda.$$

Ces deux opérations sont distributives, c'est-à-dire que $(a\oplus b)\odot c=(a\odot c)\oplus(b\odot c)$.

Montrons que l'équation de Hamilton-Jacobi est linéaire dans l'espace de fonctions muni des opérations $a\oplus b=\min\{a,b\}$, $a\odot\lambda=a+\lambda$.

Posons le problème de Cauchy pour l'équation de Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial S}{\partial t}(x,t)+H\left(\frac{\partial S}{\partial x},x,t\right)=0,$$

$$S(x,0)=S_0(x),\qquad 0\leqslant t\leqslant T,\qquad x\in\mathbf{R}^n,$$

où $H(p,x,t)$ est une fonction (un hamiltonien) différentiable sur $\mathbf{R}^{2n}\times[0,T]$, dont la matrice des dérivées secondes par rapport à p est définie positive. Soit $L(t,x,v)$ le lagrangien associé au hamiltonien $H(p,x,t)$:

$$L(t,x,v)=\max_{p\in\mathbf{R}^n}\{vp-H(p,x,t)\}.$$

Si pour tout $t\in[0,T]$ la variété lagrangienne Λ^t, image du graphique Λ^0 de la différentielle de la fonction S_0 par le flot g^t_H, engendré par le système de Hamilton

$$\frac{dp}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x}(p,x,t),\qquad \frac{dx}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p}(p,x,t),$$

se projette difféomorphement sur le sous-espace $p=0$, alors le problème (1.6) admet une solution différentiable et une seule. Ceci étant, $S(x,t)$ est le minimum de la fonctionnelle

$$J(y(\cdot))=S_0(y(0))+\int_0^t L(\tau,y(\tau),\dot y(\tau)\,d\tau \tag{1.7}$$

sur l'ensemble $\Phi_{x,t}$ des fonctions $y(\cdot)$ différentiables par morceaux définies sur $[0,t]$ et telles que $y(t)=x$. (Par $\dot y$ on désigne la dérivée dy/dt.) Ceci nous suggère la définition suivante.

Définition. Appelons *solution généralisée* du problème de Cauchy (1.6) une fonction S dont la valeur en un point (x,t) du tore est l'infimum de la fonctionnelle J sur l'ensemble $\Phi_{x,t}$.

Aux termes de cette définition, le problème (1.6) admet une solution généralisée pour toute fonction S_0 à valeurs sur la droite réelle achevée $\overline{\mathbf{R}}$. Ceci définit donc l'opérateur résolvant $\mathscr{A}_H: S_0\to S$ du problème (1.6).

Soit $\oplus$ l'opérateur de prise du minimum de deux fonctions à valeurs dans $\mathbf{R}$:

$$(S_1 \oplus S_2)(z) = \min\{S_1(z), S_2(z)\}.$$

Théorème 1.1. *L'opérateur $\mathscr{A}_H$ est compatible avec l'opération $\oplus$.*

Démonstration. Soit

$$\delta_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad x = \xi, \\ +\infty & \text{pour} \quad x \neq \xi. \end{cases}$$

Alors $\mathscr{A}_H \delta_\xi(x, t)$ est le minimum de la fonction $\int_0^t L(\tau, y(\tau), \dot{y}(\tau))\, d\tau$ dans la classe $\tilde{\Phi}_{\xi, x, t}$ des fonctions $y(\cdot)$ continues par morceaux vérifiant les conditions aux limites $y(0) = \xi$, $y(t) = x$. En minimisant la fonction (1.7), d'abord par rapport aux fonctions $y(\cdot) \in \Phi_{x,t}$ vérifiant la condition initiale $y(0) = \xi$ et en calculant ensuite l'infimum par rapport à $\xi \in \mathbf{R}^n$, on obtient la formule suivante:

$$\mathscr{A}_H S_0(x, t) = \inf_{\xi \in \mathbf{R}^n} (\mathscr{A}_H \delta_\xi(x, t) + S_0(\xi)).$$

Donc

$$\mathscr{A}_H S_{01} \oplus \mathscr{A}_H S_{02} = \min(\inf_\xi (\mathscr{A}_H \delta_\xi(x, t) + S_{01}(\xi), \inf_\xi (\mathscr{A}_H \delta_\xi(x, t) +$$

$$+ S_{02}(\xi)) = \inf_\xi \min(\mathscr{A}_H \delta_\xi(x, t) + S_{01}(\xi), \mathscr{A}_H \delta_\xi(x, t) + S_{02}(\xi)) =$$

$$= \inf_\xi (\mathscr{A}_H \delta_\xi(x, t) + \min(S_{01}(\xi), S_{02}(\xi))) = \mathscr{A}_H (S_{01} \oplus S_{02}).$$

Ce théorème est valable aussi pour l'équation de Bellman

$$\max_{v \in V(t,x)} \left(\frac{\partial S}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial S}{\partial x}(x, t)\, v - L(t, x, v) \right) = 0$$

avec la condition initiale $S(x, 0) = S_0(x)$, pourvu que la solution généralisée $S(x, t)$ de ce problème de Cauchy soit comprise comme

$$\inf_{\Phi_{t,x}} (S_0(x) + \int_0^t L(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau))\, d\tau,$$

où $\Phi_{t,x}$ est la classe des fonctions $y(\cdot)$ telles que $y(t) = x$ et que $\dot{y}(t) \in V(t, y(t))$.

§ 2. Métrique et structure sur un semi-anneau

Soit $\mathscr{A}$ un semi-anneau abélien muni des opérations de semi-groupes commutatives $\oplus$ et $\odot$, des éléments neutres $\mathbb{0}$ et $\mathbb{1}$ respectivement, vérifiant la propriété de distributivité:

$$a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c),$$

$$\mathbb{0} \odot a = \mathbb{0}, \quad \mathbb{1} \odot a = a, \quad \mathbb{0} \oplus a = a.$$

На $\mathscr{A}$ задано также отношение частичного порядка $\leqslant$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$a \odot a \geqslant \mathbb{0}, \quad \forall a \in \mathscr{A},$$

$$a \leqslant b \Rightarrow a \oplus c \leqslant b \oplus c, \quad \forall c \in \mathscr{A},$$

$$a \leqslant b \Rightarrow a \odot c \leqslant b \odot c, \quad \forall c \in \mathscr{A}_+,$$

где $\mathscr{A}_+ = \{a \in \mathscr{A} : a \geqslant \mathbb{0}\}$.

Примеры. 1. Рассмотрим в качестве примера полукольцо $\mathscr{A} = \mathbf{R}_+ = \{x \in \mathbf{R} : x \geqslant 0\}$. В качестве сложения $\oplus$ возьмем операцию min, в качестве $\odot$ — сложение $+$. Нейтральными элементами этого полукольца являются 0 для умножения и $+\infty$ для сложения. Имеем

$$a \oplus \mathbb{0} = \min\{a, \infty\} = a,$$
$$a \odot \mathbb{1} = a + 0 = a,$$
$$a \odot \mathbb{0} = a + \infty = \infty = \mathbb{0}.$$

Дистрибутивность:

$$a + \min\{b, c\} = \min\{a + b, a + c\}.$$

Действительно, если $b > c$, то $a + \min\{b, c\} = a + c$, и $a + b > a + c$, т. е. $\min\{a + b, a + c\} = a + c$. Аналогичные соотношения получаются при $b < c$.

Отношение частичного порядка:

Условие $\mathbb{1} > \mathbb{0}$ для отношения частичного порядка не выполняется, поскольку $\mathbb{1} = 0 < \infty = \mathbb{0}$.

Если числа a и b удовлетворяют неравенству $a \leqslant b$, то будем говорить, что a и b как элементы полукольца удовлетворяют неравенству $a \geqslant b$ и для избежания путаницы будем писать $a \geqslant b$.

Очевидно, что соотношение $a \geqslant b$ влечет

$$\min\{a, c\} \geqslant \min\{b, c\}, \quad \forall c \in \mathscr{A}.$$

Действительно, если $c \prec a \leqslant b$, то $\min\{a, c\} = c = \min\{b, c\}$; если $a \leqslant c \leqslant b$, то $\min\{a, c\} = a \leqslant \min\{b, c\} = c$; если $a \leqslant b \prec c$, то $\min\{a, c\} = a \leqslant \min\{b, c\} = b$.

Из соотношения $a \leqslant b$ следует, что $a + c \leqslant b + c$, $\forall c \in \mathscr{A}$.

2. Рассмотрим полукольцо с операциями max, $+$, нейтральными элементами $-\infty = \mathbb{0}$ и $0 = \mathbb{1}$. Имеем

$$a \odot \mathbb{1} = a + 0 = a,$$
$$a \oplus \mathbb{0} = \max\{a, -\infty\} = a,$$
$$a \odot \mathbb{0} = a + (-\infty) = -\infty = \mathbb{0}.$$

Distributivité:

$$a+\max\{b,c\}=\max\{a+b,\ a+c\}.$$

En effet, si $b>c$, alors $a+\max\{b,c\}=a+b$ et $a+b>a+c$, c'est-à-dire que $\max\{a+b,\ a+c\}=a+b$.

On obtient une relation analogue pour $b<c$.

Relation d'ordre partiel:

$$a+a\geqslant\mathbf{0}=-\infty.$$

De la relation $a\leqslant b$, il vient

$$\max\{a,c\}\leqslant\max\{b,c\}.$$

En effet,

si $c<a\leqslant b$, alors $\max\{a,c\}=a\leqslant\max\{b,c\}=b$;

si $a\leqslant c\leqslant b$, alors $\max\{a,c\}=c\leqslant\max\{b,c\}=b$;

si $a\leqslant b<c$, alors $\max\{a,c\}=c=\max\{b,c\}=c$.

3. Considérons le semi-anneau muni des opérations min, max sur l'axe numérique $a\geqslant 0$. Le zéro et l'unité seront respectivement $+\infty$ et 0. On a

$$a\odot\mathbf{1}=\max\{a,0\}=a,$$

$$a\oplus\mathbf{0}=\min\{a,+\infty\}=a,$$

$$a\odot\mathbf{0}=\max\{a,+\infty\}=\infty=\mathbf{0}.$$

Distributivité:

$$\max\{a,\min\{b,c\}\}=\min\{\max\{a,b\},\max\{a,c\}\}.$$

En effet,

si $a\prec b\prec c$, alors $\max\{a,\min\{b,c\}\}=b=\min\{\max\{a,b\},\max\{a,c\}\}=b$;

si $b\prec a\prec c$, alors $\max\{a,\min\{b,c\}\}=a=\min\{\max\{a,b\},\max\{a,c\}\}=a$;

si $b\prec c\prec a$, alors $\max\{a,\min\{b,c\}\}=a=\min\{\max\{a,b\},\max\{a,c\}\}=a$.

Comme dans l'exemple 1, la condition $\mathbf{1}>\mathbf{0}$ n'est pas réalisée pour l'ordre habituel, puisque $\mathbf{1}=0<\infty=\mathbf{0}$. C'est pourquoi, comme dans l'exemple 1, la relation d'ordre est inverse à la relation d'ordre naturel.

Relation d'ordre partiel:

$$\max\{a,a\}=a\succ\infty=\mathbf{0}.$$

La relation $a\geqslant b$ entraîne $\min\{a,c\}>\min\{b,c\}$, $\forall c\in\mathscr{A}_+$. Cette condition a été vérifiée dans l'exemple 1.

La relation $a\geqslant b$, entraîne

$$\max\{a,c\}\geqslant\max\{b,c\},\qquad\forall c\in\mathscr{A}_+.$$

En effet,

si $a\geqslant b>c$, alors $\max\{a,c\}=a\geqslant\max\{b,c\}=b$;

si $a\geqslant c\geqslant b$, alors $\max\{a,c\}=a\geqslant\max\{b,c\}=c$;

si $c\geqslant a\geqslant b$, alors $\max\{a,c\}=c=\max\{b,c\}=c$.

4. Considérons le semi-anneau $\mathscr{A}=\mathbf{R}_+$ muni des opérations max, min. Le zéro $\mathbf{0}$ et l'unité $\mathbf{1}$ seront respectivement 0 et $+\infty$. En effet

$$a\odot\mathbf{1}=\min\{a,+\infty\}=a,$$
$$a\oplus\mathbf{0}=\max\{a,0\}=a,$$
$$a\odot\mathbf{0}=\min\{a,0\}=0=\mathbf{0}.$$

Distributivité:

$$\min\{a,\max\{b,c\}\}=\max\{\min\{a,b\},\min\{a,c\}\}.$$

En effet,

si $a<b<c$, alors $\min\{a,\max\{b,c\}\}=a=\max\{\min\{a,b\},\min\{a,c\}\}=a$,

si $b<a<c$, alors $\min\{a,\max\{b,c\}\}=a=\max\{\min\{a,b\},\min\{a,c\}\}=a$,

si $b<c<a$, alors $\min\{a,\max\{b,c\}\}=c=\max\{\min\{a,b\},\min\{a,c\}\}=c$.

Relation d'ordre partiel:

$$\min\{a,a\}=a\geqslant 0=\mathbf{0}.$$

Il est évident que la relation $a\leqslant b$, entraîne

$$\max\{a,c\}\leqslant\max\{b,c\}\text{ et }\min\{a,c\}\leqslant\min\{b,c\}.$$

5. Considérons le semi-anneau abélien $\mathscr{A}=\mathbf{R}_+$ muni des opérations max, $\cdot$ et des éléments neutres respectifs 0 et 1. En effet,

$$a\odot\mathbf{1}=a\cdot 1=a,$$
$$a\oplus\mathbf{0}=\max\{a,0\}=a,$$
$$a\odot\mathbf{0}=a\cdot 0=0=\mathbf{0}.$$

Distributivité:

$$a\cdot\max\{b\cdot c\}=\max\{a\cdot b,a\cdot c\}.$$

En effet,

$$\text{si } b>c,\text{ on a } a\cdot\max\{b,c\}=ab \text{ et } ab>ac,$$
$$\text{autrement dit } \max\{ab,ac\}=ab.$$

Le cas $b<c$ se traite de façon analogue.

Relation d'ordre partiel. Cette relation est aussi remplie, puisque la relation $a\leqslant b$ entraîne

$$\max\{a,c\}\leqslant\max\{b,c\}.$$

Supposons que le semi-anneau $\mathscr{A}$ est muni d'une topologie définie par une métrique ρ: $\mathscr{A}\times\mathscr{A}\to[0,\infty]$ satisfaisant les axiomes classiques:

(1) $\rho(a,a)=0$;
(2) $\rho(a,b)=\rho(b,a)$;
(3) $\rho(a,b)+\rho(b,c)\geqslant\rho(a,c)$;
(4) $\{\rho(a,b)=0\}\Leftrightarrow\{a=b\}$.

Un ensemble $\mathscr{A}$ est un treillis complet si chacun de ses sous-ensembles admet une borne supérieure et une borne inférieure.

Comme exemples de métriques sur $\mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, citons

$$\rho_1 : \rho(a, b) = |a - b|;$$

$$\rho_{\exp} : \rho(a, b) = \exp(\max\{a, b\}) - \exp(\min\{a, b\});$$

$$\rho_{\operatorname{Arc tg}} : \rho(a, b) = \operatorname{Arc\ tg}(\max\{a, b\}) - \operatorname{Arc\ tg}(\min\{a, b\}).$$

Pour métrique sur $\mathbf{R}^n$ on peut prendre :

$$\rho_1 : \rho(a, b) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |a_i - b_i|; \quad \rho_2 : \rho(a, b) = \sqrt{\sum_1^n |a_i - b_i|^2},$$

$$\rho_{\exp} : \rho(a, b) = \max_i \rho_{\exp}(a_i, b_i),$$

$$\rho_{\operatorname{Arc tg}} : \rho = \max_j \rho_{\operatorname{Arc tg}}(a_j, b_j).$$

Tout ensemble est borné pour la métrique $\rho_{\operatorname{Arc tg}}$, puisque $\rho_{\operatorname{Arc tg}} \leqslant \pi$. Tout ensemble majoré est borné pour la métrique $\rho_{\exp}$.

La relation $a = (a_1, \ldots, a_n) \geqslant b = (b_1, \ldots, b_n)$, où $a_i \geqslant b_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, est une relation d'ordre partiel sur $\mathbf{R}^n$. Muni de cette relation d'ordre, l'ensemble $\mathbf{R}^n$ est un treillis complet.

Les métriques $\rho_{\exp}$ et $\rho_{\operatorname{Arc tg}}$ munissent les ensembles $(\mathbf{R} \cup \{-\infty\})^n$ et $(\mathbf{R} \cup \{\pm\infty\})^n$ respectivement d'une structure d'ensemble localement compact et d'une structure d'ensemble compact. En effet, l'ensemble

$$M = \{x : \rho(x, \mathbb{0}) \leqslant a\}$$

est muni d'un ε-réseau fini pour la métrique $\rho_{\exp}$:

$$\{d_i^\varepsilon\}_1^N$$

$d_N^\varepsilon = \mathbb{0} = -\infty$; $d_k^\varepsilon = \ln(a - k\varepsilon)$, $0 \leqslant k < N$, $N = [a/\varepsilon] + 1$ (cf. fig. 13). L'ensemble $\{g_k^\varepsilon\}_1^N$ des points

$$g_0^\varepsilon = \mathbb{0} = -\infty, \quad g_k^\varepsilon = \operatorname{tg}(-\pi/2 + k\varepsilon),$$
$$0 < k < N, \quad N = [\pi/\varepsilon] + 1, \quad g_N^\varepsilon = \mathbb{1} = \infty$$

est un ε-réseau sur l'ensemble $\mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$.

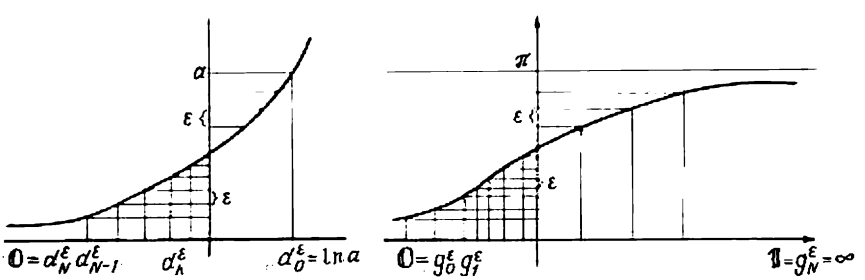


Fig. 13.

Les axiomes (1), (2) et (4) sont visiblement satisfaits par toutes les métriques énumérées ci-dessus. Vérifions l'inégalité du triangle pour les métriques $\rho_{\exp}$ et $\rho_{\mathrm{Arc\,tg}}$. On se limitera au cas unidimensionnel, puisque la vérification de cette inégalité pour le cas multidimensionnel se ramène au cas unidimensionnel. On a pour les deux métriques

$$\rho(a, b)+\rho(b, c)=\rho(a, c) \text{ si } b\in[a, c];$$
$$\rho(b, c)\geqslant\rho(a, c) \text{ si } b\leqslant a;$$
$$\rho(a, b)\geqslant\rho(a, c) \text{ si } b\geqslant c.$$

Donc l'inégalité du triangle est réalisée dans tous ces cas.

On dit qu'une métrique et un treillis complet sont *compatibles* si la convergence pour cette métrique est équivalente à la convergence pour la structure de ce treillis:

$$\left\{\inf_N \sup_{n>N} a_n=\sup_N \inf_{n>N} a_n=a\right\}\Leftrightarrow\{\rho(a_n, a)\to 0\}.$$

Si $\mathscr{A}=\mathbf{R}^n$, la condition de compatibilité est remplie pour toute métrique. Si $\mathscr{A}=(\mathbf{R}\cup\{-\infty\})^n$, la compatibilité avec les métriques $\rho_{\exp}$ et $\rho_{\mathrm{Arc\,tg}}$ a lieu, tandis que le point $(\{-\infty\})^n$ est isolé pour les métriques ρ_1 et ρ_2: $\rho_{1,2}(-\infty, a)=\infty$. Par ailleurs

$$\rho_{\exp}(-\infty, a)=\exp a\to 0 \text{ lorsque } a\to-\infty,$$
$$\rho_{\mathrm{Arc\,tg}}(-\infty, a)=\mathrm{Arc\,tg}\,a+\pi/2\to 0 \text{ lorsque } a\to-\infty.$$

Pour cette raison, dans la suite de l'exposé, l'espace $\mathbf{R}\cup\{-\infty\}$ muni des opérations $\oplus=\max$ et $\odot=+$ sera doté de la métrique $\rho_{\exp}$ et l'espace $\mathbf{R}\cup\{\pm\infty\}$, muni des opérations $\oplus=\max$, $\odot=\min$, de la métrique $\rho_{\mathrm{Arc\,tg}}$. La métrique

$$\rho(a, b)=\exp(-\min\{a, b\})-\exp(-\max\{a, b\})$$

est compatible avec les opérations $\oplus=\min$, $\odot=+$ du semi-anneau $\mathbf{R}\cup\{\infty\}$.

Définissons formellement un espace de fonctions à valeurs dans un semi-anneau sans utiliser l'idempotence des opérations. Au § 3 on introduira la notion de mesure idempotente qui permettra de décrire complètement les fonctions de cet espace.

Désignons par $C_0(X)$ l'ensemble des fonctions $\varphi(x)$ définies sur un espace localement compact X, à valeurs dans un semi-module $\mathscr{A}$, et non nulles uniquement sur des compacts $K\subseteq X$.

Munissons l'ensemble $C_0(X)$ d'une structure de semi-module $\mathscr{A}$ partiellement ordonné en le dotant des opérations

$$(\varphi\oplus\psi)(x)=\varphi(x)\oplus\psi(x), \quad (a\odot\varphi)(x)=a\odot\varphi(x)$$

d'élément neutre $\varphi(x)=\mathbb{0}$ pour l'addition et $\varphi(x)=\mathbb{1}$ pour la multiplication et de la relation d'ordre partiel $\varphi \leqslant \psi \Rightarrow \varphi(x) \leqslant \psi(x)$, $\forall x \in X$. Définissons sur le semi-module $C_0(X)$ la métrique

$$\rho(\varphi, \psi)=\sup_{x \in X} \rho(\varphi(x), \psi(x))$$

qui fait de C_0 un semi-module topologique muni de la convergence uniforme: $\varphi_n \to \psi$ lorsque $\rho(\varphi_n \to \psi) \to 0$. On dira qu'une fonction ψ: $x \in X \to \psi(x) \in A$ est *semi-continue inférieurement* si du fait que $\psi(x_0)>0$ au point $x_0 \in X$, il s'ensuit qu'il existe un voisinage (compact) $V \subset X$ de x_0 sur lequel $\psi(x)>a$, $\forall x \in V$. Définissons le produit $\varphi \odot \psi$ de deux fonctions φ et ψ par la formule: $(\varphi \odot \psi)(x)=\varphi(x) \odot \psi(x)$.

Appelons l'application bilinéaire $\varphi(x) \times \psi(x) \in C_0(X) \times C_0(X) \mapsto \mapsto (\varphi(x), \psi(x)) \in \mathscr{A}$ *produit scalaire sur* $C_0(X)$, et $\delta(x-\xi) \in C_0(X)$, telle que $(\delta(x-\xi), \varphi(x))=\varphi(\xi)$, $\forall \varphi \in C_0(X)$, *fonction* δ.

Exemples. 1. Dans l'espace $C_0(X)$ des fonctions à valeurs dans un semi-module, muni des opérations min, +, le produit scalaire est défini par la formule

$$(\varphi, \psi)=\min_x \{\varphi(x)+\psi(x)\}.$$

Exhibons un exemple de suite convergeant vers la fonction δ:

$$\delta_n(x-\xi)=(x-\xi)^2 n.$$

En effet, $\lim\limits_{n \to \infty} \min\limits_x \{(x-\xi)^2 n+\varphi(x)\}=\varphi(\xi)$.

2. Dans l'espace $C_0(X)$ des fonctions à valeurs dans un semi-module, muni des opérations max, +, le produit scalaire s'écrit

$$(\varphi, \psi)=\max_x \{\varphi(x)+\psi(x)\}.$$

La suite $\delta_n(x-\xi)=-(x-\xi)^2 n$ est un exemple de suite convergeant vers la fonction δ. En effet, $\lim\limits_{n \to \infty} \max\limits_x \{-(x-\xi)^2 n+\varphi(x)\}=\varphi(\xi)$.

3. Considérons le semi-anneau $\mathscr{A}=\mathbf{R}_+$ muni des opérations min, max. L'espace $C_0(X)$ des fonctions à valeurs dans ce semi-anneau est doté du produit scalaire

$$(\varphi, \psi)=\min_x \max_{\psi, \varphi} \{\varphi(x), \psi(x)\}.$$

Exemple de suite de fonctions convergeant vers la fonction δ:

$$\delta_n(x-\xi)=n(x-\xi)^2.$$

En effet, $\lim\limits_{n \to \infty} \min\limits_x \{\max\{(x-\xi)^2 n, \varphi(x)\}\}=\varphi(\xi)$. Comme $\varphi(x) \geqslant 0$, il vient pour $x=\xi$

$$\max\{(x-\xi)^2 n, \varphi(x)\}=\varphi(\xi).$$

4. Considérons l'espace $C_0(X)$ des fonctions à valeurs dans le semi-anneau $\mathscr{A}=\mathbf{R}_+$, muni des opérations max, min. Le produit scalaire s'écrit :

$$(\varphi, \psi)=\max_x \min_{\varphi, \psi}\{\varphi(x), \psi(x)\}.$$

Exemple de suite de fonctions convergeant vers la fonction δ :

$$\delta_n(x-\xi)=\frac{1}{(x-\xi)^2 n}.$$

En effet, $\lim\limits_{n\to\infty}\max\limits_x\left\{\min\left\{\dfrac{1}{(x-\xi)^2 n},\ \varphi(x)\right\}\right\}=\varphi(\xi)$. Comme $\varphi(x)\geqslant 0$, il vient pour $x=\xi$

$$\min\left\{\frac{1}{(x-\xi)^2 n},\ \varphi(x)\right\}=\min\{0,\ \varphi(\xi)\}=\varphi(\xi).$$

5. L'espace $C_0(X)$ des fonctions à valeurs dans un semi-anneau, muni des opérations max, $\cdot$, est doté du produit scalaire

$$(\varphi, \psi)=\max_x\{\varphi(x)\cdot\psi(x)\}.$$

La suite de fonctions

$$\delta_n(x-\xi)=e^{-(x-\xi)^2 n}$$

converge vers la fonction δ. En effet, $\lim\limits_{n\to\infty}\max\limits_x\{e^{-(x-\xi)^2 n},\ \varphi(x)\}=\varphi(\xi)$, puisque $e^{-(x-\xi)^2 n}\underset{n\to\infty}{=}\begin{cases}0, & x\neq\xi;\\ 1, & x=\xi.\end{cases}$

§ 3. Additivité de semi-groupe des mesures idempotentes

Les fonctions d'ensemble envisagées dans ce paragraphe s'apparentent aux mesures : elles sont de signe défini et additives. Pour indiquer un exemple simple et suggestif, munissons l'ensemble $\mathscr{A}=\mathbf{R}\cup\{-\infty\}$ de la relation d'ordre naturel $\geqslant$ et des opérations de semi-groupe : $a\oplus b\overset{\text{déf}}{=}\overset{\text{déf}}{=}\max\{a, b\}=\sup\{a, b\}$ et $a\odot b\overset{\text{déf}}{=}a+b$. Les éléments neutres pour l'addition $\oplus$ et la multiplication $\odot$ seront respectivement $\mathbf{0}\overset{\text{déf}}{=}-\infty$ et $\mathbf{1}\overset{\text{déf}}{=}0$. Alors toutes les quantités réelles seront positives et toutes les fonctions majorées, bornées et positives pour la structure de semi-anneau $\mathscr{A}$.

La fonction d'ensemble

$$m(B)=\sup_{x\in B} f(x), \quad f\in C(\mathbf{R}^n), \quad f\leqslant M<\infty, \quad B\in\mathscr{B}(\mathbf{R}^n), \tag{3.1}$$

où $\mathscr{B}(\mathbf{R}^n)$ est la tribu des boréliens de $\mathbf{R}^n$, est définie pour toute fonction f et est une fonction σ-additive positive monotone:

$$m(\bigcup_1^\infty B_i)=\sup_{x\in\bigcup_1^\infty B_i} f(x)=\sup_i(\sup_{x\in B_i} f(x))=\bigoplus_1^\infty m(B_i). \tag{3.2}$$

Si $f(x)$ est négative au sens ordinaire, alors $m\colon \mathscr{B}(\mathbf{R}^n)\to]0,1]$. Dire que la mesure m est idempotente revient à dire que $m(B)=m(B)\oplus m(B)$.

Signalons que la σ-additivité (3.2) a lieu pour les ensembles sécants B_i.

Contrairement aux mesures σ-additives classiques (probabilistes) la fonction d'ensemble (3.1) n'est pas continue sur des ensembles vides. Soit, par exemple, $\{B_k\}_1^\infty$ une suite de sphères de rayon $1/k$ centrées aux points $r_k=\left\{\frac{1}{k}, 0,\ldots,0\right\}$. Il est alors évident que $\bigcap_1^\infty B_k=\varnothing$, mais $\lim_{k\to\infty} m(B_k)=$ $=\lim_k \sup_{x\in B_k} f(x)=f(0)\neq 0$ pour toute fonction continue f. Ce résultat contredit la définition classique de la continuité d'une mesure sur des ensembles vides. Bien plus, il est clair que $m(\varnothing)$ dépend du choix de la fonction f et de la suite B_k qui converge vers un ensemble vide. Donc $m(\varnothing)$ ne peut en principe prendre une valeur bien définie. En châtiant le langage on dira qu'il existe des ensembles vides différents. Les conditions spécifiques imposées au système S d'ensembles sur lequel est définie la mesure idempotente sont liées à ce fait. Le système S doit être stable pour la réunion $\cup$ des ensembles. La réunion $\cup$ induit l'addition $\oplus$ des mesures et ne fait pas apparaître des ensembles vides. Cette opération nous permet de prolonger une mesure idempotente à une classe d'ensembles, stable pour les réunions (dénombrables).

Bien que les mesures idempotentes ne puissent être soustraites (puisque les opérations $\cap$ et $\setminus$ ne sont pas définies sur S), le système S doit contenir un assez grand nombre d'ensembles. Il est, en particulier, souhaitable que le système S contienne tous les ensembles (excepté l'ensemble $\varnothing$) d'une tribu $\mathfrak{A}$ engendrée par une algèbre Σ. C'est pourquoi nous admettrons que la mesure idempotente soit est définie sur tous les ensembles non vides de la tribu $\mathfrak{A}$, soit ne peut être définie sur $\mathfrak{A}$ de telle sorte que soient remplies les conditions de σ-additivité, de positivité et d'idempotence.

La mesure idempotente se distingue essentiellement des mesures ordinaires par le fait qu'elle admet des prolongements m idempotents, σ-additifs, distincts, de l'algèbre Σ à la plus petite tribu $\mathfrak{A}$ engendrée par Σ.

Supposons, par exemple, que $\Sigma_{\mathbf{R}}$ et Σ_D sont des algèbres de sous-ensembles de $\mathbf{R}$, engendrées respectivement par les intervalles fermés de

bornes rationnelles et de bornes réelles. Ces deux algèbres ne contiennent pas de points isolés et engendrent la même tribu $\mathscr{B}(\mathbf{R})$. Le nombre $\pi = 3{,}14\ldots$ étant irrationnel, aux fonctions

$$f_i(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [3, 4], \\ a, & 3 \leqslant x \leqslant \pi, \\ b, & \pi < x \leqslant 4, \\ d_i, & x = \pi, \end{cases}$$

où $d_1 = a$, $d_2 = b$, $b < d_3 < a$, $d_4 < b$, $d_5 > a$, est associée la même mesure idempotente sur l'algèbre $\Sigma_{\mathbf{R}}$:

$$m^{\mathbf{R}}(B) = \sup_{x \in B} f_i(x), \qquad B \in \Sigma_{\mathbf{R}}, \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

Parallèlement, les fonctions

$$m_i^D(B) = \sup_{x \in B} f_i(x), \qquad B \in \Sigma_D$$

sont distinctes sur l'algèbre Σ_D. En particulier, $m_1^D[\pi, 4] = a$, $m_2^D[\pi, 4] = m_4^D[\pi, 4] = b$, $m_3^D[\pi, 4] = d_3$. Toutes les mesures $m_i(B) = \sup_{x \in B} f_i(x)$, $B \in \mathscr{B}(\mathbf{R})$ sont distinctes sur la tribu $\mathscr{B}(\mathbf{R})$. Par exemple,

$$m_1(\{\pi\}) = a, \quad m_2(\{\pi\}) = b, \quad m_3(\{\pi\}) = d_3, \quad m_4(\{\pi\}) = d_4.$$

La restriction des mesures m_i à l'algèbre $\Sigma_{\mathbf{R}}$ est confondue avec $m^{\mathbf{R}}$, donc chaque mesure m_i est le prolongement de $m^{\mathbf{R}}$ à la tribu $\mathscr{B}(\mathbf{R})$. L'existence d'une infinité de prolongements distincts est due au fait que d_3 et d_4 sont arbitraires.

Figeons un prolongement. On se propose d'interpréter $\sup_{x \in \mathbf{R}} (f(x) + \varphi(x))$ comme une intégrale de Lebesgue et d'énoncer les conditions sous lesquelles ses valeurs sont indépendantes du choix du prolongement. Soient f et φ deux fonctions réelles sur $\mathbf{R}$, la fonction φ étant mesurable et majorée. Désignons par $\{\varphi_i^\varepsilon\}_1^\infty$ un ε-réseau sur l'ensemble des valeurs de φ, et par Q_i^ε et q_i^ε les boréliens

$$Q_i^\varepsilon = \{x:\ \varphi(x) \geqslant \varphi_i^\varepsilon\}, \qquad q_i^\varepsilon = \{x:\ \varphi_i^\varepsilon \leqslant \varphi(x) < \varphi_i^\varepsilon + \varepsilon\}.$$

Les ensembles Q_i^ε et q_i^ε recouvrent l'ensemble tout entier des valeurs de φ, donc

$$I \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{x \in \mathbf{R}} (f(x) + \varphi(x)) = \sup_i \left(\sup_{Q_i^\varepsilon} (f + \varphi)\right) = \sup_i \left(\sup_{q_i^\varepsilon} (f + \varphi)\right).$$

Vu que la fonction φ est justiciable de l'encadrement $\varphi_i^\varepsilon \leqslant \varphi(x) < \varphi_i^\varepsilon + \varepsilon$ sur l'ensemble q_i^ε, on obtient

$$\sup_i (\varphi_i^\varepsilon + \sup_{q_i^\varepsilon} f) \leqslant \sup_i (\varphi_i^\varepsilon + \sup_{Q_i^\varepsilon} f) \leqslant I \leqslant$$
$$\leqslant \overline{\sup_i} (\varphi_i^\varepsilon + \varepsilon + \sup_{q_i^\varepsilon} f) \leqslant \overline{\sup_i} (\varphi_i^\varepsilon + \varepsilon + \sup_{Q_i^\varepsilon} f).$$

Donc

$$\sup_i (\varphi_i^\varepsilon + \sup_{q_i^\varepsilon,\, Q_i^\varepsilon} f) \leqslant I \leqslant \sup_i (\varphi_i^\varepsilon + \sup_{q_i^\varepsilon,\, Q_i^\varepsilon} f) + \varepsilon.$$

D'où l'on déduit que

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^n} (f(x) + \varphi(x)) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_i (\varphi_i^\varepsilon + \sup_{x \in q_i^\varepsilon} f) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_i (\varphi_i^\varepsilon + \sup_{x \in Q_i^\varepsilon} f).$$

En se servant des opérations $\oplus$ et $\odot$ définies plus haut, on peut représenter cette relation par la somme

$$I(\varphi) = \sup_{x \in \mathbf{R}^n} (f(x) + \varphi(x)) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \overset{\infty}{\underset{i=1}{\oplus}} (\varphi_i^\varepsilon \odot m(Q_i^\varepsilon)) =$$
$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \overset{\infty}{\underset{i=1}{\oplus}} (\varphi_i^\varepsilon \odot m(q_i^\varepsilon)) \overset{\text{déf}}{=} \int_{\mathbf{R}^n}^{\oplus} \varphi(x) \odot m(dx), \qquad (3.3)$$

où $m(B) = \sup_{x \in B} f(x)$. Le second membre de cette égalité peut être appelé intégrale idempotente, puisqu'il jouit de la propriété suivante: $I(\varphi) \oplus \oplus I(\varphi) = I(\varphi)$.

Pour tout prolongement m_k en une fonction d'ensemble m idempotente σ-additive, on peut définir une procédure d'intégration des fonctions mesurables qui coïncident dans ses grands traits avec la définition de l'intégrale de Lebesgue.

L'intégrale d'une fonction $\varphi(x)$ simple majorée à valeurs dans les ensembles q_i est égale à

$$\int_{\mathbf{R}}^{\oplus} \varphi(x) \odot m(dx) \overset{\text{déf}}{=} \overset{\infty}{\underset{1}{\oplus}} (\varphi_i \odot m(q_i)). \qquad (3.4)$$

La définition (3.4) admet une modification fondamentale. Par des raisonnements identiques à ceux utilisés pour déduire l'égalité (3.3) on obtient la relation suivante:

$$\overset{\infty}{\underset{1}{\oplus}} (\varphi_i \odot m(q_i)) = \overset{\infty}{\underset{1}{\oplus}} (\varphi_i \odot m(Q_i)), \qquad (3.5)$$

où $Q_i = \bigcup_{j \in J(i)} q_j$, $J(i) = \{j : \varphi_j \geqslant \varphi_i\}$. En effet, $q_i \in Q_i$, donc $m(Q_i) \geqslant m(q_i)$ et le second membre de (3.5) est, en tous les cas, $\geqslant$ au premier.

Par ailleurs, la σ-additivité de la mesure idempotente m nous permet de mettre $m(Q_i)$ sous forme de la somme :

$$m(Q_i) = \bigoplus_{j \in J(i)} m(q_j).$$

Donc

$$\bigoplus_{1}^{\infty} (\varphi_i \odot m(Q_i)) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} (\varphi_i \odot (\bigoplus_{j \in J(i)} m(q_j))) \leqslant \bigoplus_{i=1}^{\infty} (\bigoplus_{j \in J(i)} (\varphi_j \odot m(q_j))).$$

La répétition des termes ne modifie pas la somme idempotente $\oplus$. D'où l'on déduit que le premier membre de (3.5) est $\geqslant$ au second. Ce qui prouve l'égalité (3.5).

Définissons l'intégrale de Lebesgue idempotente d'une fonction mesurable majorée φ par rapport à une mesure m induite par une fonction majorée f. Pour une telle intégrale, il est naturel de prendre la limite d'une suite d'intégrales idempotentes d'une suite de fonctions simples majorées convergeant vers φ :

$$I(\varphi) \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \bigoplus_{1}^{\infty} (\varphi_i^{\varepsilon} \odot m(Q_i^{\varepsilon})) = \int_{\mathbf{R}}^{\oplus} \varphi(x) \odot m(dx).$$

Cette limite existe, puisque l'ensemble $\mathbf{R}$ est séparable et localement compact, et la suite des intégrales de fonctions simples, bornée et monotone. Ces propriétés de $\mathbf{R}$ et de la suite $I_\varepsilon(\varphi)$ seront appliquées ultérieurement pour construire une intégrale de Lebesgue à valeurs dans un espace partiellement ordonné.

Revenons au problème des divers prolongements d'une mesure idempotente. On a vu plus haut que les mesures $m_i(x)$ admettant les mêmes restrictions à l'algèbre $\Sigma_{\mathbf{R}}$, sont induites par des fonctions majorées par une même fonction $f_1(x)$ semi-continue supérieurement :

$$f_1(x) = \inf_{i=1,2,3,4} \{\psi(x) : \psi(x) \geqslant f_i(x), \quad \psi(x) \in C(\mathbf{R})\}.$$

Des exemples élémentaires montrent que

$$\sup(f_i(x) + \varphi(x)) = \sup(f_1(x) + \varphi(x)), \quad i = 1, 2, 3, 4$$

pour toute fonction φ semi-continue inférieurement.

Soient

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [3, 4], \\ \beta, & x \in]\pi, 4[, \\ \alpha, & x \in [3, \pi[, \\ c_i, & x = \pi, \end{cases}$$

où $c_1 = \alpha$, $c_2 = \beta$, $\alpha < \beta$, $i = 1, 2$.

La fonction $\varphi_1(x)$ qui est semi-continue inférieurement vérifie les égalités: $\sup(f_i(x)+\varphi_1(x))=\max\{\alpha+a,\ \beta+b\}$, $i=1,\ 2,\ 3,\ 4$. Pour la fonction semi-continue supérieurement φ_2, on a

$$\sup(f_1+\varphi_2)=\beta+a, \quad \sup(f_{2,4}+\varphi_2)=\max\{\alpha+a,\ \beta+b\},$$
$$\sup(f_3+\varphi_2)=\max\{\alpha+a,\ \beta+c\}$$

et

$$\sup(f_5+\varphi_1)=\max\{\alpha+d_5,\ \beta+b\}, \quad \sup(f_5+\varphi_2)=\beta+b.$$

La généralisation naturelle de cette observation est le théorème suivant.

Théorème 3.1. *Soient f et φ deux fonctions réelles sur $\mathbf{R}^n$, la fonction φ étant semi-continue inférieurement. Soit*

$$(\mathrm{cl}f)(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \inf\{\psi(x):\ \psi\geqslant f,\ \psi\in C(\mathbf{R}^n)\} \tag{3.6}$$

une fonction semi-continue supérieurement. Alors

$$\sup(f+\varphi)=\sup(\mathrm{cl}f+\varphi). \tag{3.7}$$

L'opérateur cl s'appelle *fermeture* [ ].

Démonstration. Remarquons tout d'abord que $\mathrm{cl}f(x)\geqslant f(x)$ et que pour tout $\varepsilon>0$, il existe dans un voisinage U_x de x, aussi petit que l'on veut, un point y tel que $(\mathrm{cl}f)(x)-f(y)\leqslant\varepsilon$. En effet, dans le cas contraire on aurait $(\mathrm{cl}f)(x)-f(y)>\varepsilon$ pour tous les $y\in U_x$. Il existe donc une fonction $\chi(x)$ continue positive de support contenu dans U_x, telle que $f(x)\leqslant(\mathrm{cl}f)(x)-\varepsilon\chi(x)<(\mathrm{cl}f)(x)$ en tous les points x tels que $\chi(x)\neq0$. L'existence d'une telle fonction contredit la définition de la borne inférieure (3.6).

Prouvons (3.7). Comme $\mathrm{cl}\,f(x)\geqslant f(x)$, il est évident que le second membre de (3.7) est $\geqslant$ au premier.

Supposons que $\theta=\sup(f+\varphi)<\sup(\mathrm{cl}\,f+\varphi)=\Xi=\theta+\delta$, $\delta>0$. Aux termes de la définition de la borne supérieure, il existe alors pour un $\varepsilon>0$ aussi petit que l'on veut un point x_ε tel que $(\mathrm{cl}\,f)(x_\varepsilon)+\varphi(x_\varepsilon)>\Xi-\varepsilon=\theta+\delta-\varepsilon$. La fonction $\varphi(x)$ étant semi-continue inférieurement, l'ensemble $U^\varepsilon=\{x:\varphi(x)>\varphi(x_\varepsilon)-\varepsilon\}$ est ouvert et contient le point x_ε, c'est-à-dire que U^ε est un voisinage ouvert du point x_ε. D'après la remarque faite lors de la démonstration du théorème, il existe sur l'ensemble U^ε un point y tel que $(\mathrm{cl}\,f)(x_\varepsilon)-f(y)\leqslant\varepsilon$. Donc

$$f(y)-\varphi(y)\geqslant(\mathrm{cl}\,f)(x_\varepsilon)+\varphi(x_\varepsilon)-2\varepsilon>\theta+\delta-3\varepsilon.$$

En prenant maintenant $\varepsilon<3\delta$, on obtient une contradiction avec la définition de $\theta=\sup(f+\varphi)$. On en déduit que $\theta=\Xi$. Ce qui prouve le théorème.

On démontrerait de façon analogue l'égalité

$$\inf_x(f+\varphi)=\inf_x(\mathrm{cl}_*\,\varphi+f), \tag{3.8}$$

où f est une fonction semi-continue supérieurement et cl_* la fermeture inférieure:

$$(\mathrm{cl}_*\varphi)(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \sup\{\psi(x): \psi \leqslant \varphi, \quad \psi \in C(\mathbf{R}^n)\}. \tag{3.9}$$

Toute fonction ψ semi-continue supérieurement vérifie l'inégalité

$$\mathrm{cl} \circ \mathrm{cl}_* \psi(x) \leqslant \psi(x),$$

et toute fonction η semi-continue inférieurement, l'inégalité

$$\mathrm{cl}_* \circ \mathrm{cl}\, \eta \geqslant \eta.$$

Donc

$$\sup(\eta' + \mathrm{cl}_* \circ \mathrm{cl}\, \eta'') \leqslant \sup(\eta' + \mathrm{cl}\, \eta''),$$
$$\inf(\mathrm{cl} \circ \mathrm{cl}_* \psi' + \psi'') \geqslant \inf(\mathrm{cl}_* \psi' + \psi').$$

D'où, compte tenu de (3.7) et de (3.8), l'on déduit

$$\sup_x(\eta' + \eta'') = \sup_x(\eta' + \mathrm{cl}_* \circ \mathrm{cl}\, \eta'') = \sup_x(\eta' + \mathrm{cl}\, \eta''),$$
$$\inf_x(\psi' + \psi'') = \inf_x(\mathrm{cl} \circ \mathrm{cl}_* \psi' + \psi'') = \inf_x(\mathrm{cl}_* \psi' + \psi''). \tag{3.10}$$

Pour domaine de définition des fonctions f et φ, on peut prendre n'importe quel espace topologique normal, puisque tout voisinage ouvert de tout point de cet espace contient le support d'une fonction réelle continue. C'est la seule propriété topologique du domaine de définiton à être utilisée pour la démonstration des égalités (3.7) à (3.10).

Dans la suite on décrira une procédure de construction du prolongement σ-additif maximal d'une mesure définie sur une algèbre à la tribu engendrée par cette algèbre et l'on prouvera le théorème suivant.

Théorème 3.2. *Soient $f(x): \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ une fonction réelle majorée, Σ une algèbre engendrant une tribu $\mathscr{B}(\mathbf{R}^n)$ et $m(B) = \sup_{x \in B} f(x)$, $B \in \Sigma$. La mesure m se prolonge alors en une mesure m^* idempotente σ-additive maximale de Σ à la tribu $\mathscr{B}(\mathbf{R}^n)$, et de plus*

$$m^*(B) = \sup_{x \in B} (\mathrm{cl}\, f)(x), \qquad B \in \mathscr{B}(\mathbf{R}^n).$$

Les théorèmes 3.1 et 3.2 nous disent que si f est une fonction réelle bornée et φ une fonction bornée semi-continue inférieurement, alors $\sup_x (f + \varphi)$ peut être interprétée comme une intégrale indempotente de Lebesgue

$$I(\varphi) = \int_{\mathbf{R}^n}^{\oplus} \varphi(x) \odot m^*(dx), \tag{3.11}$$

où m^* est un prolongement idempotent σ-additif de la mesure $m(B) = \sup_{x \in B} f(x)$, $B \in \Sigma$, définie sur une algèbre Σ engendrant la tribu $\mathscr{B}(\mathbf{R}^n)$. À noter que le second membre de (3.11) n'est pas indépendant du choix du prolongement.

Donc la propriété de semi-continuité (inférieure) d'une fonction intégrable compense l'absence de continuité de la mesure idempotente sur les ensembles vides, donc l'existence de plusieurs prolongements de la mesure. De ce point de vue, la semi-continuité de la fonction intégrable est duale de la continuité des mesures sur des ensembles vides.

Traitons le problème suivant qui se pose lorsqu'on étudie l'intégrale $I(\varphi)$: pour quelles fonctions φ l'intégrale $I(\varphi)$ ne dépend pas du procédé de prolongement de la mesure dans le cas où le domaine de définition des fonctions φ n'est pas muni d'une topologie et de la notion de continuité correspondante. On montrera plus bas que ces fonctions φ sont telles que

$$\{x: \varphi(x) > C\} \in G, \tag{3.12}$$

où G est une classe d'ensembles engendrée par des réunions dénombrables d'ensembles de l'algèbre Σ. Ces fonctions seront appelées *semi-mesurables inférieurement* par analogie aux fonctions semi-continues inférieurement.

Clôturons ce paragraphe en traitant quelques exemples montrant que le choix de la mesure et de l'algèbre Σ influe directement sur le calcul de l'estimation de la borne supérieure.

Si f et φ sont des fonctions réelles continues inférieurement et bornées sur $\mathbf{R}^n$, alors $I = \sup\limits_x (f+\varphi)$ peut être représenté par deux intégrales idempotentes distinctes:

$$I = \overset{\oplus}{\int\limits_{\mathbf{R}^n}} f(x) \odot m_\varphi(dx) = \overset{\oplus}{\int\limits_{\mathbf{R}^n}} \varphi(x) \odot m_f(dx),$$

où

$$m_f(B) = \sup_B f(x), \qquad m_\varphi(B) = \sup_B \varphi(x).$$

La représentation de $\sup\limits_x (f+\varphi)$ par deux intégrales distinctes signifie qu'il existe des algorithmes différents de calcul de l'estimation de $\sup (f+\varphi)$. Dans un cas, pour estimer l'intégrale, il faut calculer $\sup\limits_{Q_i^\varepsilon} \varphi(x)$ sur les ensembles $Q_i^\varepsilon = \{x: f(x) > d_i^\varepsilon\}$, où $\{d_i^\varepsilon\}_1^\infty$ est un ε-réseau sur l'ensemble des valeurs de f, et estimer sup par les sommes $\bigoplus\limits_i : I \Leftarrow \bigoplus\limits_i d_i^\varepsilon \odot m_\varphi(Q_i^\varepsilon)$. Dans l'autre cas, $I \Leftarrow \bigoplus\limits_i g_i^\varepsilon \odot m_f(D_i^\varepsilon)$, où $D_i^\varepsilon = \{x: \varphi(x) > g_i^\varepsilon\}$, et $\{g_i^\varepsilon\}$ un ε-réseau sur l'ensemble des valeurs de φ.

La différence entre ces deux procédés de calcul devient essentielle lorsque l'une des fonctions, par exemple φ, est simple et prend un nombre fini de valeurs. L'utilisation de cette fonction comme intégrant rend la deuxième estimation exacte pour tous les ε assez petits et simplifie donc l'estimation de l'intégrale.

Signalons qu'il n'est pas possible de calculer $\sup\limits_{Q_i^\varepsilon} \varphi$ exactement sur tout ensemble de la tribu $\mathfrak{A}$. Même si φ est une fonction monotone, $\sup\limits_{Q_i^\varepsilon} \varphi(x)$ ne peut être calculé que sur des intervalles fermés de bornes rationnelles, c'est-à-dire sur des ensembles d'une sous-algèbre de Σ. Le théorème 3.2 montre

que les estimations de sup $(f+\varphi)$ acquises numériquement à l'aide du schéma de Lebesgue convergeront vers sup $(f+\varphi)$ si φ est semi-continue (semi-mesurable) inférieurement.

L'indépendance de l'intégrale par rapport au procédé de prolongement de la mesure à la tribu $\mathfrak{A}$ prend un relief particulier lorsque la variable d'intégration prend ses valeurs dans un espace infini et les valeurs de la mesure peuvent être données uniquement sur l'algèbre Σ. Montrons qu'à des algèbres Σ différentes correspondent des procédures différentes d'estimation de l'intégrale.

Soit $\Omega=\{x_\tau\colon [0,\ t]\to\mathbf{R},\ x_0=0,\ \int_0^t |\dot{x}_\tau|^2\,d\tau<\infty\}$ et supposons que l'algèbre $\Sigma=\Sigma_c$ est composée d'ensembles cylindriques

$$S=S(\xi_\tau^1,\ldots,\xi_\tau^k|B_k)=\{x_\tau\colon(\langle\dot{x}_\tau,\xi_\tau^1\rangle,\ldots,\langle\dot{x}_\tau,\xi^k\rangle)\in B_k\in\mathscr{B}(\mathbf{R}^k)\},\quad(3.13)$$

où $x_\tau\in\Omega$, $x_0=0$, $\xi_\tau^i\in C[0,t]$, $\langle\dot{x}_i,\xi_\tau\rangle\overset{\text{déf}}{=}\int_0^t\dot{x}_\tau\xi_\tau\,d\tau$.

Soit $m(S)\overset{\text{déf}}{=}\sup\limits_{x_\tau\in S}\{-\int_0^t|\dot{x}_\tau|^2d\tau\}$ une mesure sur l'algèbre Σ_c. Estimons-la. L'espace Ω peut être représenté par une somme directe de l'espace à dimension finie $L_k=L(\xi_\tau^1,\ldots,\xi_\tau^k)=\{x_\tau^{(\lambda)}\colon\dot{x}_\tau=\sum_1^k\lambda_i\xi_\tau^i,\ x_0=0\}$ et de son orthocomplément $L_k^\perp$. Il est clair que si $x_\tau\in S_k$ et $x_\tau\in L_k$, alors $x_\tau+y_\tau\in S$ pour tout $y\in L_k^\perp$ et d'autre part $\int_0^t|\dot{x}_\tau|^2\,d\tau\leqslant\int_0^t|\dot{y}_\tau+\dot{x}_\tau|^2\,d\tau=\int_0^t|\dot{x}_\tau|^2\,d\tau+\int_0^t|\dot{y}|^2\,d\tau$. Donc la borne supérieure de $m(S)$ est confondue avec la borne inférieure sur un sous-ensemble de l'espace L_k:

$$m(S)=\inf_{\substack{x_\tau(\lambda)\in S\\ \lambda\in\mathbf{R}^k}}\int_0^t|\dot{x}_\tau(\lambda)|^2\,d\tau.\quad(3.14)$$

Le calcul de la borne inférieure (3.14) sur les sous-ensembles de Σ_c relève de la programmation quadratique. On peut donc estimer la mesure $m(S)$, $S\in\Sigma_c$, numériquement. Outre l'algèbre Σ_c, on peut utiliser une algèbre Σ_M d'ensembles cylindriques de la forme

$$S=S(t_1,\ldots,t_k|B_n)=\{x_\tau\colon(x_{t_1},\ldots,x_{t_k})\in B_k\in\mathscr{B}(\mathbf{R}^k),\ 0<t_1<\ldots<t_k\leqslant t\}.$$

La définition de la mesure $m(S)$ sur de tels ensembles se ramène à un problème plus simple de programmation quadratique dont la résolution ne fait pas intervenir les produits scalaires $\langle\xi_\tau^i,\xi_\tau^j\rangle=\int_0^t\xi_\tau^i\xi_\tau^j\,d\tau$, puisque

$$m(S)=\inf_{(x_1,\ldots,x_k)\in B_k}\{\inf_{x_\tau\colon x_{t_i}=x_i}\int_0^t|\dot{x}_\tau|^2\,d\tau\}=\inf_{(x_1,\ldots,x_k)\in B_k}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{|x_i-x_{i+1}|^2}{t_{i+1}-t_i},\ \text{où}\ x_0=0.\quad(3.15)$$

Le second membre de (3.15) est la borne inférieure d'une fonction quadratique définie sous forme d'un prolongement analytique. La convergence des estimations des intégrales idempotentes à l'aide des valeurs prises par la mesure sur les algèbres Σ_c et Σ_M résulte des analogues du théorème de Lebesgue de passage à la limite sous le signe d'intégration.

Pour décrire la convergence faible des opérateurs, il faut munir d'une topologie l'ensemble des fonctions semi-continues inférieurement. Soit $\mathscr{A}$ un semi-anneau métrique partiellement ordonné. Pour que le produit scalaire $(f, \varphi)=\sup_x (f(x)+\varphi(x))$ défini sur $\mathscr{A}$ soit continu, il faut que les topologies de l'ensemble des fonctions semi-continues inférieurement et du semi-anneau $\mathscr{A}$ soient compatibles. Pour de telles topologies, on prendra des topologies induites par diverses métriques ρ sur $\mathscr{A}$:

$$r(\varphi_1, \varphi_2)=\sup_x \rho(\varphi_1(x), \varphi_2(x)), \tag{3.16}$$

par exemple

$$r_{\mathrm{Arc\,tg}}(\varphi_1, \varphi_2)= \\ =\sup_x \left[\mathrm{Arc\,tg}\left(\max\{\varphi_1(x), \varphi_2(x)\}\right)-\mathrm{Arc\,tg}\left(\min\{\varphi_1(x), \varphi_2(x)\}\right)\right].$$

Les ensembles des fonctions semi-continues inférieurement et semi-continues supérieurement sont complets pour la topologie de la convergence uniforme et la composition d'une fonction continue et d'une fonction semi-continue inférieurement (resp. supérieurement) est aussi une fonction semi-continue inférieurement (resp. supérieurement). Ces observations peuvent être utilisées pour prouver la complétude de l'espace des fonctions semi-continues inférieurement pour les métriques $r_{\exp}$ et $r_{\mathrm{Arc\,tg}}$. Soient $\{\varphi_n^1\}_1^\infty$ et $\{\varphi_n^2\}_1^\infty$ des suites de fonctions semi-continues inférieurement fondamentales respectivement pour les métriques $r_{\exp}$ et $r_{\mathrm{Arc\,tg}}$. Alors les suites $\exp\varphi_n^1(x)$ et $\mathrm{Arc\,tg}\,\varphi_n^2(x)$ sont aussi composées de fonctions semi-continues inférieurement, et de plus

$$|\exp\varphi_n^1(x)-\exp\varphi_m^1(x)| \leqslant r_{\exp}(\varphi_n^1, \varphi_m^1), \\ |\mathrm{Arc\,tg}\,\varphi_n^2(x)-\mathrm{Arc\,tg}\,\varphi_m^2(x)| \leqslant r_{\mathrm{Arc\,tg}}(\varphi_n^2, \varphi_m^2).$$

Donc les suites $\exp\varphi_n^1(x)$ et $\mathrm{Arc\,tg}\,\varphi_n^2(x)$ sont fondamentales pour la métrique de la convergence uniforme et leurs limites

$$\varphi_{\exp}(x)=\lim_{n\to\infty} \exp\varphi_n^1(x), \qquad \varphi_{\mathrm{Arc\,tg}}(x)=\lim_{n\to\infty} \mathrm{Arc\,tg}\,\varphi_n^2(x)$$

sont des fonctions semi-continues inférieurement. Les fonctions réciproques $\ln\varphi_{\exp}(x)$ et $\mathrm{tg}\,\varphi_{\mathrm{Arc\,tg}}(x)$ sont aussi semi-continues inférieurement. Ce qui entraîne la complétude de l'espace métrique des fonctions semi-continues inférieurement pour les métriques $r_{\exp}$ et $r_{\mathrm{Arc\,tg}}$.

Les métriques r et ρ sont douées des propriétés importantes suivantes:

(a) elles sont uniformes pour les opérations de semi-groupes sur un semi-anneau: si $R(a_n, b_n)\to 0$ lorsque $n\to\infty$, alors $R(a_n \diamondsuit d, b_n \diamondsuit d)\to 0$ lorsque $n\to\infty$ uniformément par rapport à $d\in D$ pour tout ensemble borné

D, où R est l'une des métriques r ou ρ, et $\diamondsuit$ l'une des opérations de semi-groupes $\oplus$, $\odot$, max, min;

(b) elles sont minimax, c'est-à-dire que

$$R((a \diamondsuit b), (c \diamondsuit d)) \leqslant \max\{R(a, c), R(b, d)\},$$

où R est l'une des métriques r ou ρ, et $\diamondsuit$ l'une des trois opérations $\oplus$, min, max. La propriété de minimax entraîne l'inégalité de minimax:

$$R(\sup_i \{a_i\}, \sup_j \{b_j\}) \leqslant \inf_i \sup_j R(a_i, b_j)$$

quels que soient les ensembles $I \ni i$ et $J \ni j$.

(c) elles sont monotones, c'est-à-dire que si $a \leqslant b \leqslant c$, on a

$$\max\{\rho(a, b), \rho(b, c)\} \leqslant \rho(a, c).$$

Le théorème suivant nous donne des conditions suffisantes de continuité des fonctionnelles à valeurs dans $\mathscr{A}$.

Théorème 3.3. *Si une métrique r d'un ensemble de fonctions $\varphi: X \to \mathscr{A}$ est liée à une métrique de $\mathscr{A}$ par la relation* (3.16) *et est uniforme et minimax, alors la fonctionnelle linéaire $\varphi \mapsto (b, \varphi) = \sup_x (f \diamondsuit \varphi)(x)$ est continue pour la métrique de $\mathscr{A}$ quelle que soit la fonction bornée f.*

Démonstration. Supposons que $r(f, \varphi_n) \to r(f, \varphi)$ pour $n \to \infty$ et soit f une fonction bornée $r(f, \mathbb{0}) < \infty$. La métrique étant uniforme et minimax, on a

$$\rho_n \stackrel{\text{déf}}{=} \rho((f, \varphi_n), (f, \varphi)) = \rho(\sup_x (\varphi_n \diamondsuit f)(x), \sup_x (\varphi \diamondsuit f)(x)) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_x \rho((\varphi_n \diamondsuit f(x), (\varphi \diamondsuit f)(x)) = r((\varphi_n \diamondsuit f), (\varphi \diamondsuit f)) \stackrel{\text{déf}}{=} r_n,$$

d'où il s'ensuit que $\rho_n \to 0$ pour $n \to \infty$. Ce qui prouve le théorème.

Soit $\mathscr{L}(h)$, $h \in [0, 1]$ une famille d'opérateurs continus dans un espace métrique de fonctions à valeurs dans $\mathscr{A}$ et $\mathscr{L}^*(h)$ une famille d'opérateurs adjoints définis à l'aide du produit scalaire à valeurs dans $\mathscr{A}$:

$$\sup_x (\mathscr{L}(h) f(x) \diamondsuit \varphi(x)) = \sup_x (f(x) \diamondsuit \mathscr{L}^*(h) \varphi(x)).$$

Si la famille des opérateurs adjoints $\mathscr{L}^*(h)$ est continue par rapport à h pour la métrique r, alors existe $\lim_{h \to 0} \mathscr{L}^*(h) \varphi(x) = (\mathscr{L}^* \varphi)(x)$ qui définit la fonctionnelle linéaire continue f^* à valeurs dans $\mathscr{A}$:

$$(f^*, \varphi) = \sup_x (f \diamondsuit \mathscr{L}^* \varphi).$$

En particulier, si $\diamondsuit = +$, le théorème 3.3 nous dit que la limite faible de f^* est à un isomorphisme près confondue avec la classe d'équivalence des fonctions admettant une même fermeture et peut être définie de façon unique à l'aide de ses valeurs sur l'ensemble des fonctions semi-continues inférieurement prenant les valeurs $-\infty = \mathbb{0}$ et $0 = \mathbb{1}$.

Prouvons un théorème général de faible séparabilité pour le produit scalaire $(f, \varphi) \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_X (f(x)+\varphi(x))$. Soit B un ensemble quelconque de fonctions $\varphi: X \to \mathbf{R}$. Appelons *projection* d'une fonction $f: X \to \mathbf{R}$ par rapport à B la fonction $\mathrm{cl}_B f(x) = \inf_{\varphi \in B} ((f, \varphi) - \varphi(x))$, où $\varphi^*(x) = \varphi(x)$.

Théorème 3.4. *Pour que* $(f_1, \varphi) = (f_2, \varphi)$, $\varphi \in B$, *il est nécessaire et suffisant que* $\mathrm{cl}_B f_1 = \mathrm{cl}_B f_2$.

Démonstration. Suffisance. Montrons que $(f, \varphi) = (\mathrm{cl}_B, f, \varphi)$, $\forall \varphi \in B$. Il est clair que $\mathrm{cl}_B f \geqslant f$, $(\mathrm{cl}_B, f, \varphi) \geqslant (f, \varphi)$. Par ailleurs,

$$(\mathrm{cl}_B f, \varphi) \leqslant \sup_X ((f, \varphi) - \varphi(x) + \varphi(x)) = (f, \varphi).$$

Donc, $(\mathrm{cl}_B, f, \varphi) = (f, \varphi)$.

Nécessité. Supposons par absurde que $\mathrm{cl}_B f_1 \not\equiv \mathrm{cl}_B f_2$. Il existe alors un point x_c et $c > 0$ tels que $\mathrm{cl}_B f_1(x_c) \geqslant \mathrm{cl}_B f_2(x_c) + c$. Par définition de cl_B, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $\psi = \psi_{\varepsilon, c} \in B$ telle que $\mathrm{cl}_B f_2(x_c) + \varepsilon \geqslant (f_2, \psi) - \psi(x_c)$. Donc

$$(f_1, \psi) - \psi(x_c) \geqslant \mathrm{cl}_B f_1(x_c) \geqslant \mathrm{cl}_B f_2(x_c) + c \geqslant (f_2, \psi) - \psi(x_c) + c - \varepsilon.$$

De là nous déduisons l'inégalité $(f_1, \psi) \geqslant (f_2, \psi) + c - \varepsilon$ pour $\varepsilon < c$ qui contredit la condition du théorème. Donc $\mathrm{cl}_B f_1 = \mathrm{cl}_B f_2$. Ce qui achève la démonstration du théorème.

Considérons le théorème de limite supérieure faible d'une suite de fonctionnelles idempotentes linéaires.

Soient X un espace topologique localement compact, $C_0(X)$ un ensemble de fonctions réelles continues sur X à support compact et $\{f_n(x)\}_1^\infty$ une suite de fonctions sur X à valeurs dans la droite réelle achevée $\mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$. Désignons par $C_B(X)$ l'ensemble de toutes les fonctions réelles semi-continues supérieurement sur X à valeurs dans $\mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$.

On appelle *enveloppe supérieure* $\Phi_B(x)$ d'une suite $\{f_n\}_1^\infty$ par rapport à un ensemble B la borne inférieure de l'ensemble de toutes les fonctions semi-continues supérieurement $\geqslant$ à toutes les fonctions de la suite $\{P_n f_n(x)\}_1^\infty$ à partir de l'une d'entre elles :

$$\Phi_{B,n}(x) = \inf \{\Phi(x) : \Phi(\xi) \geqslant P_B f_k(\xi),\ \forall \xi \in X,\ \forall k \geqslant n;\ \Phi \in C_B\}, \qquad (3.17)$$

$$\Phi_B(x) = \inf_n \Phi_{B,n}(x) = \lim_{n \to \infty} \Phi_n(x).$$

Remarque. La fonction Φ_B est semi-continue supérieurement, puisque $\Phi_{B,n} \downarrow \Phi_B$ lorsque $n \to \infty$ et $\Phi_{B,n}$ est semi-continue supérieurement.

Avant de passer au théorème fondamental de convergence faible, considérons un exemple en illustrant le contenu.

Soit $X=[0, 1]$ et soit $f_n(x)=a(x)\cos nx$, où $a(x)$ est une fonction bornée continue. Alors $\Phi_B(x)=|a(x)|$ et existe la limite faible

$$\lim_{n\to\infty}(f_n, \varphi)=(\Phi_B, \varphi),$$

c'est-à-dire que la fonction $|a(x)|$ est limite faible de la suite de fonctions $f_n(x)=a(x)\cos nx$ pour le produit scalaire à valeurs dans $\mathscr{A}$ muni des opérations sup et $+$.

En effet, il est tout d'abord évident que

$$\Phi_B(x)\geqslant|f_n(x)|\geqslant f_n(x),$$

donc

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(f_n, \varphi)\leqslant(\Phi_B, \varphi). \tag{3.18}$$

Soit, par ailleurs, $\varepsilon>0$ et soit $x_\varepsilon\in[0, 1]$ un point en lequel

$$(\Phi_B, \varphi)\leqslant\Phi_B(x_\varepsilon)+\varphi(x_\varepsilon)+\varepsilon.$$

L'ensemble $M_\varepsilon=\{x:\varphi(x)>\varphi(x_\varepsilon)-\varepsilon\}$, où $\varphi(x)$ est une fonction semi-continue inférieurement, est ouvert et contient le point x_ε. Pour tous les n assez grands, l'ensemble M_ε contient aussi un point y_ε séparé de x_ε d'une distance $\leqslant 2\pi/n$ en lequel $\cos ny_\varepsilon=\operatorname{sign}a(y_\varepsilon)$ et $f_n(y_\varepsilon)=a(y_\varepsilon)=\Phi_B(y_\varepsilon)$. Comme $a(x)$ est une fonction continue, l'ensemble

$$N_\varepsilon=\{x:\ \Phi_B(x)<\Phi_B(y_\varepsilon)+\varepsilon\}$$

est ouvert, contient le point y_ε ainsi que le point x_ε pour tous les n assez grands. Donc $x_\varepsilon, y_\varepsilon\in M_\varepsilon\cap N_\varepsilon$ et

$$(f_n, \varphi)\geqslant f_n(y_\varepsilon)+\varphi_n(y_\varepsilon)\geqslant\Phi_B(x_\varepsilon)+\varphi(x_\varepsilon)-2\varepsilon\geqslant(\Phi_B, \varphi)-3\varepsilon. \tag{3.19}$$

Comme ε est aussi petit que l'on veut, on en déduit la minoration

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(f_n, \varphi)\geqslant(\Phi_B, \varphi). \tag{3.20}$$

La relation $\lim_{n\to\infty}(f_n, \varphi)=(\Phi_B, \varphi)$ résulte maintenant des relations (3.18), (3.19), (3.20). Dans le cas général on a le

Théorème 3.5. *Pour toute fonction réelle continue $\varphi(x)$, $x\in X$, à support compact et toute suite de fonctions réelles $\{f_n(x)\}_1^\infty$ existe la limite supérieure*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup_X(f_n(x)+\varphi(x))=\sup_X(\Phi_B(x)+\varphi(x))=(\Phi_B, \varphi), \tag{3.21}$$

où $\Phi_B(x)$ est l'enveloppe supérieure (3.17) *de la suite $\{f_n\}$.*

Démonstration. La démonstration se fait en deux étapes.

1) La compacité du support de la fonction φ et la semi-continuité supérieure des fonctions φ et $\Phi_{B,n}$ nous donnent: $\overline{\lim_{n\to\infty}}(f_n, \varphi)\leqslant(\Phi_B, \varphi)$.

2) La semi-continuité supérieure de Φ_B et la semi-continuité inférieure de φ entraînent: $\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(f_n, \varphi)\geqslant(\Phi_B, \varphi)$. Nous avons séparément pour ces deux cas: $(\Phi_B, \varphi)>-\infty$ et $(\Phi_B, \varphi)=-\infty$. Ces estimations prouvent le théorème; quant aux conditions imposées à la fonction φ, elles expriment dans leur ensemble la continuité de φ.

Les inégalités $f_n(x)\leqslant\Phi_{B,n}(x)$, $(f_n, \varphi)\leqslant(\Phi_{B,n}, \varphi)$ qui résultent de la définition de l'enveloppe supérieure montrent que l'établissement de la majoration revient à vérifier l'inégalité $\lim_{n\to\infty}(\Phi_{B,n}, \varphi)\leqslant(\Phi_B, \varphi)$. Montrons que l'inégalité $(\Phi_{B,n}, \varphi)>(\Phi_B, \varphi)+\delta$, $\delta>0$, contredit la semi-continuité supérieure.

En effet, dans ce cas il existe sur l'ensemble compact $K=\operatorname{supp}\varphi$ une suite de points $\{x_{n,\delta}\}_1^\infty$ tels que

$$\Phi_{B,n}(x_{n,\delta})+\varphi(x_{n,\delta})>(\Phi_B, \varphi)+\delta/2, \qquad x_{n,\delta}\in K.$$

En vertu de la compacité de K on peut extraire de la suite $\{x_{n,\delta}\}_1^\infty$ une suite partielle $\{x_{n_k,\delta}\}$ convergeant vers $y^*\in K$ lorsque $k\to\infty$. Posons $y_k=x_{n_k,\delta}$. Donc tout voisinage ouvert U du point y^* contient les points $y_{k,\delta}(k\geqslant k_0(U,\delta))$, en lesquels $\Phi_{B,n_k}(y_k)+\varphi(y_k)>(\Phi_B, \varphi)+\delta/2$. La suite Φ_{B,n_k} est strictement décroissante, donc $\Phi_{B,n}(y_k)+\varphi(y_k)\geqslant(\Phi_B, \varphi)+\delta/2$ pour tous les $n\leqslant n_k$. En vertu de la semi-continuité supérieure de la fonction $\varphi(y)$, on peut exhiber un $k=k_0(\delta)$ aussi grand que l'on veut, tel que $\varphi(y_k)\leqslant\varphi(y^*)+\delta/4$. Ceci étant,

$$\Phi_{B,n}(y_k)+\varphi(y^*)\geqslant(\Phi_B, \varphi)+\delta/4; \qquad k\geqslant k_0(\delta), \qquad n\leqslant n_k.$$

La fonction $\Phi_{B,n}$ étant semi-continue supérieurement, il vient

$$\Phi_{B,n}(y^*)\geqslant\lim_{k\to\infty}\Phi_{B,n}(y_k).$$

De là on déduit que

$$\Phi_{B,n}(y^*)+\varphi(y^*)=\lim_{n\to\infty}\Phi_{B,n}(y^*)+\varphi(y^*)\geqslant(\Phi_B, \varphi)+\delta/4.$$

Cette inégalité contredit la définition du produit scalaire à valeurs dans $\mathscr{A}$ muni des opérations sup et $+$. Donc $\lim_{n\to\infty}(\Phi_{B,n}, \varphi)\leqslant(\Phi_B, \varphi)$ et

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(f_n, \varphi)\leqslant(\Phi_B, \varphi). \tag{3.22}$$

Soit $(\Phi_B, \varphi)<\infty$. Pour tout $\varepsilon>0$, il existe alors un point $x_\varepsilon\in X$ tel que

$$(\Phi_B, \varphi)\leqslant\Phi_B(x_\varepsilon)+\varphi(x_\varepsilon)+\varepsilon. \tag{3.23}$$

L'ensemble $M_\varepsilon=\{x:\varphi(x)>\varphi(x_\varepsilon)-\varepsilon\}$ est ouvert et contient le point x_ε. Supposons que pour un $\delta>0$ fixe

$$P_B f_n(y)\leqslant\Phi_B(x_\varepsilon)-\delta, \qquad \forall y\in M_\varepsilon \tag{3.24}$$

pour tous les n supérieurs à un certain n. Alors la fonction

$$\Phi(x)=\{\infty,\ x\in X\setminus M_\varepsilon;\ \Phi_B(x_\varepsilon)-\delta,\ x\in M_\varepsilon\}\in C_B(X)$$

est semi-continue supérieurement et $\Phi(x) \geqslant P_B f_n(x)$, $\forall x$. La définition (3.17) de l'enveloppe supérieure et l'hypothèse (3.24) conduisent à la relation contradictoire :

$$\Phi_B(x_\varepsilon) \leqslant \Phi(x_\varepsilon) = \Phi_B(x_\varepsilon) - \delta .$$

Donc l'hypothèse (3.24) est mise en défaut, c'est-à-dire que pour tout $\delta > 0$, il existe une suite de points $y_{\delta,n} \in M_\varepsilon$ telle que

$$P_B f_n(y_{\delta,n}) \geqslant \Phi_B(x_\varepsilon) - \delta, \qquad y_{\delta,n} \in M_\varepsilon . \tag{3.25}$$

Du théorème 3.4, des inégalités (3.23), (3.25) et de la définition de l'ensemble M_ε, il s'ensuit maintenant que pour une infinitié de n

$$(f_n, \varphi) = (P_B f_n, \varphi) \geqslant P_B f_n(y_{\delta,n}) + \varphi(y_{\delta,n}) \geqslant$$
$$\geqslant \Phi_B(x_\varepsilon) + \varphi(x_\varepsilon) - \varepsilon - \delta \geqslant (\Phi_B, \varphi) - 2\varepsilon - \delta .$$

Comme ε et δ sont arbitrairement petits, on en déduit que

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} (f_n, \varphi) \geqslant (\Phi_B, \varphi), \tag{3.26}$$

ce qui, combiné à (3.22), prouve le théorème.

La démonstration est identique si $(\Phi_B, \varphi) = \infty$. Pour tout $N > 0$, il existe un point x_N tel que $\Phi_B(x_N) + \varphi(x_N) \geqslant N$. Comme dans le cas précédent, il existe un ensemble $M_{N,\varepsilon} = \{x : \varphi(x) > \varphi(x_N) - \varepsilon\}$ ouvert contenant le point x_N, autrement dit pour tout $\delta > 0$ il existe une suite de points $y_{\delta,n}$ telle que $P_B f_n(y_{n,\delta}) \geqslant \Phi(x_N) - \delta$. Donc

$$(f_n, \varphi) = (P_B f_n, \varphi) \geqslant f_n(y_{n,\delta}) + \varphi(y_{\delta,n}) \geqslant \Phi(x_N) + \varphi(x_N) - \varepsilon - \delta \geqslant N - \varepsilon - \delta .$$

Puisque ε et δ sont aussi petits que l'on veut et N aussi grand que l'on veut, il vient $\overline{\lim_{n \to \infty}} (f_n, \varphi) = \infty = (\Phi_B, \varphi)$. Ce qui achève la démonstration du théorème.

Corollaire. *Si une suite $\{f_n\}_1^\infty$ converge faiblement sur un ensemble $C_0(X)$ de fonctions continues à support compact, sa limite faible est l'enveloppe supérieure* (3.17). *Pour les suites stationnaires, ce résultat est confondu avec le théorème* 3.4.

§ 4. Prolongement maximal d'une mesure idempotente

Soient Ω un ensemble, Σ l'algèbre des sous-ensembles de Σ, $\mathfrak{A}$ la plus petite tribu engendrée par Σ et $\mu : \mathfrak{A} \to \mathscr{A}$ une fonction d'ensemble. Supposons que $\mathscr{A}$ est un ensemble partiellement ordonné muni d'une structure de semi-groupe abélien pour les opérations associatives $\oplus$ et $\odot$ d'éléments neutres respectifs $\mathbb{0}$ et $\mathbb{1}$. Supposons par ailleurs que $\mathscr{A}$ est un treillis complet sur lequel les opérations sup et inf commutent avec les opérations de semi-groupe et que pour tous $a > b$ il existe un c tel que $a > c > b$.

Considérons une fonction d'ensemble $\mu\{\Sigma\setminus\{\varnothing\}\}\to\mathscr{A}$

a) positive et bornée:

$$\mathbb{0}\leqslant\mu(S)\leqslant a,\qquad \mu(\Omega)=a\in\mathscr{A},\qquad S\in\Sigma;$$

b) additive:

$$\mu(S\cup S')=\mu(S)\oplus\mu(S'),\qquad S\cap S'=\varnothing;\qquad S,\ S'\in\Sigma;$$

c) idempotente:

$$\mu(S)\oplus\mu(S)=\mu(S).$$

Désignons par $\mathscr{G}$ la classe des sous-ensembles de Ω, réunions dénombrables des ensembles de Σ. Définissons le prolongement m de μ à $\mathscr{G}$:

$$m(G)\overset{\text{déf}}{=}\sup_{\{S_n\}}\sup_n\mu\left(\bigcup_1^n S_i\right),\qquad G\in\mathscr{G},\qquad G\in\bigcup_1^\infty S_i,\qquad S_i\in\Sigma \tag{4.1}$$

et le prolongement m de μ à $\mathfrak{A}$:

$$m(A)\overset{\text{déf}}{=}\inf_{\{G_n\}}\inf_n m\left(\bigcap_1^n G_i\right),\qquad G_i\in\mathscr{G},\qquad A=\bigcap_1^\infty G_i\in\mathfrak{A}. \tag{4.2}$$

Théorème 4.1. *La fonction d'ensemble m est bornée, positive, idempotente et σ-additive sur $\mathfrak{A}$.*

Le prolongement idempotent σ-additif m est unique sur $\mathscr{G}$ et maximal sur $\mathfrak{A}$.

Démonstration. Il coule de source que m est bornée et positive sur $\mathscr{G}$ et $\mathfrak{A}$. Montrons qu'elle est monotone sur $\mathscr{G}$. Soit $G'\supset G$. Considérons deux suites $\{S'_n\}$ et $\{S_n\}$ telles que $G'=\bigcup_1^\infty S'_n$, $G=\bigcup_1^\infty S_n$. Alors $\bigcup_1^n S'_j\supset\left(\bigcup_1^n S'_j\right)\cap\left(\bigcup_1^k S_i\right)$ et comme m est monotone sur Σ, pour tous n et k on a l'inégalité

$$m\left(\bigcup_1^n S'_j\right)\geqslant m\left(\left(\bigcup_1^n S'_j\right)\cap\left(\bigcup_1^k S_i\right)\right).$$

On a une inégalité analogue pour $\sup_n$

$$m(G')\geqslant m\left(G'\cap\left(\bigcup_1^n S_i\right)\right)=m\left(\bigcup_1^n S_i\right).$$

En passant à $\sup_k$, on obtient $m(G')\geqslant m(G)$. Ce qui prouve que m est monotone sur $\mathscr{G}$.

Prouvons incidemment l'indépendance des valeurs de $m(G)$ par rapport au choix de la suite $\{S_i\}$. En effet, si $G=\bigcup_1^\infty S_i\supseteq\bigcup_1^\infty S'_i=G'$, alors, d'une part, $m(G)\geqslant m(G')$, et de l'autre, $m(G)\leqslant m(G')$. Donc, dans la définition (4.1), l'opération $\sup_{\{S_n\}}$ ne modifie pas le résultat.

On démontre de façon analogue que m est monotone sur $\mathfrak{A}$. Mais dans la définition (4.2) on ne peut plus écarter l'opération $\inf_{\{G_n\}}$. Les ensembles vides susceptibles d'apparaître lors du passage à la limite des intersections peuvent transformer $m(A)$, $A \in \mathfrak{A}$, en une constante et violer les propriétés de monotonie, d'additivité et d'idempotence.

Supposons par exemple que $\Sigma = \Sigma_{\mathbf{R}}$, et soit $f(x) = \{x : x \in [0, 1]; 0, x \in [0, 1]\}$, $m(B) = \sup_{x \in B} f(x)$, $B \in \Sigma_{\mathbf{R}}$. Si $A = \bigcap_1^\infty G_n$, $G_n \in \mathscr{G}$, alors $A = \bigcap_1^\infty G'_n$, où $G'_n = G_n \cup]1 - \frac{1}{n}, 1[\in \mathscr{G}$. Sans passer à l'opération $\inf_{\{G_n\}}$, on aurait pu définir la valeur de $m(A)$ pour $A \in \mathfrak{A}$, $A \notin \mathscr{G}$, de la manière suivante :

$$m(A) = \inf_n m\left(\bigcap_1^n G'_i\right).$$

Mais

$$m\left(\bigcap_1^n G'_i\right) = m(G'_n) = \sup\left\{x : x \in G_n \cup]1 - \frac{1}{n}, 1[\right\} \equiv 1 \equiv m(\mathbf{R}).$$

Cet exemple met en évidence le rôle important de $\inf_{\{G_n\}}$ dans la définition (4.2). Soient $A' \supset A$, A, $A' \in \mathfrak{A}$ et $A = \bigcap_1^\infty G_i$, $A' = \bigcap_1^\infty G'_j$, G_i, $G'_j \in \mathscr{G}$. Alors $\bigcap_1^n G'_i \supset \left(\bigcap_1^n G'_i\right) \cap \left(\bigcap_1^k G_j\right)$ et puisque la mesure m est monotone sur $\mathscr{G}$, pour tous n et k finis on a l'inégalité

$$m\left(\bigcap_1^n G'_i\right) \geqslant m\left(\left(\bigcap_1^n G'_i\right) \cap \left(\bigcap_1^n G_j\right)\right) \geqslant m(A).$$

En passant à la borne inférieure par rapport à n, on obtient $m(A') \geqslant m(A)$.

Etant idempotente sur Σ et additive sur les ensembles non disjoints, la mesure m est additive sur tout ensemble de Σ. De là et de l'indépendance de $m(G \cup G')$ par rapport au choix de la suite de Σ qui converge vers $G \cup G'$, il s'ensuit que m est additive sur $\mathscr{G}$:

$$m(G \cup G') = \sup_n \left(m\left(\left(\bigcup_1^n S_i\right) \cup \left(\bigcup_1^n S'_i\right)\right)\right) =$$

$$= \sup_n \left(m\left(\bigcup_1^n S_i\right) \oplus m\left(\bigcup_1^n S'_i\right)\right) = m(G) \oplus m(G').$$

De la monotonie de m sur $\mathfrak{A}$ et de l'idempotence de l'addition $\oplus$, il vient

$$m(A \cup A') = m(A \cup A') \oplus m(A \cup A') \geqslant m(A) \oplus m(A'). \tag{4.3}$$

D'autre part, de la définition de m sur $\mathfrak{A}$, on déduit l'inégalité contradictoire:

$$m(A \cup A') < \inf_{\{G_n\},\{G'_n\}} \inf_n m\left(\left(\bigcap_1^n G_i\right) \cup \left(\bigcap_1^n G'_i\right)\right) = m(A) \oplus m(A'). \quad (4.4)$$

Les relations (4.3) et (4.4) entraînent l'idempotence et l'additivité de m sur $\mathfrak{A}$.

On remarquera maintenant que, d'une part, pour tout n fini, on a $m\left(\bigcup_1^n G_i\right) = \bigoplus_1^n m(G_i) \leqslant \bigoplus_1^\infty m(G_i)$. Donc, $m\left(\bigcup_1^\infty G_i\right) \leqslant \bigoplus_1^\infty \mu(G_i)$. D'autre part, m étant monotone sur $\mathfrak{A}$, on a: $m\left(\bigcup_1^\infty G_i\right) \geqslant m\left(\bigcup_1^n G_i\right) \geqslant \bigoplus_1^n m(G_i)$. Donc $m\left(\bigcup_1^\infty G_i\right) \geqslant \bigoplus_1^\infty m(G_i)$. D'où la σ-additivité de m sur $\mathscr{G}$. La σ-additivité de m *sur* $\mathfrak{A}$ se démontre de façon analogue.

Tout prolongement σ-additif idempotent de μ à $\mathscr{G}$ est confondu avec m. En effet, soit w un autre prolongement. Alors

$$w(G) = \bigoplus_1^\infty w(S_i) = \bigoplus_1^\infty m(S_i) = m(G_i), \qquad S_i \in \Sigma.$$

Montrons que tout prolongement σ-additif idempotent de μ à $\mathfrak{A}$ est $\leqslant m$.

Soit v un tel prolongement. Etant idempotent et σ-additif, le prolongement v est confondu avec m sur $\mathscr{G}$. La monotonie de v entraîne

$$v(A) \leqslant v(G) = m(G) \text{ pour tout } G \supset A,\ G \in \mathscr{G}.$$

On a une inégalité analogue pour inf:

$$v(A) \leqslant \inf_n m\left(\bigcap_1^n G_i\right) = m(A), \quad \bigcap_1^\infty G_i = A.$$

Donc le prolongement m de μ est maximal sur $\mathfrak{A}$. Ceci achève la démonstration du théorème.

Les exemples envisagés ci-dessus montrent qu'en général on peut obtenir de plus petits prolongements.

Le théorème suivant exprime que les mesures idempotentes à valeurs dans $\mathscr{A}$, associées aux fonctions semi-continues supérieurement, sont confondues avec leurs prolongements maximaux.

Théorème 4.2. *Soit Ω un espace topologique, $\mathscr{B} = \mathscr{B}(\Omega)$ la tribu de ses boréliens et Σ une algèbre engendrant $\mathscr{B}$. Si f est une fonction semi-continue supérieurement à valeurs dans $\mathscr{A}$, alors $\sup_{\omega \in \mathfrak{A}} f(\omega) = m(A)$, $\forall A \in \mathscr{B}$, où m est le prolongement maximal de la mesure idempotente $\mu(S) = \sup_{\omega \in S} f(\omega)$, $S \in \Sigma$.*

Démonstration. Il est clair que la restriction de m à la classe $\mathscr{G}$ est confondue avec le prolongement de μ à $\mathscr{G}$, puisque ce prolongement est unique (cf. théorème 4.1). La mesure m est maximale sur la tribu $\mathscr{B}$, donc $m(A) \geqslant \sup_x f(x)$, $A \in \mathscr{B}$.

Supposons qu'il existe un ensemble $A \in \mathscr{B}$, tel que $\Xi = m(A) > \sup_A f(x) = \theta$. La semi-continuité supérieure de $f(x)$ entraîne $\sup_A f(x) = \sup_{\bar{A}} f(x)$, où $\bar{A}$ est l'adhérence de A pour la topologie de Ω.

Supposons d'autre part que $\Xi = m(A) \stackrel{\text{déf}}{=} \inf_{\{G_i\}} \inf_i m(G_i) \leqslant \inf_i m(G_i) = \inf_i \sup_{x \in \bar{G}_i} f(x)$, où $A = \bigcap_1^\infty G_i$. Considérons l'ensemble $\bar{G}^\varepsilon = \{x : f(x) \geqslant \Xi\}$, où $\Xi \geqslant \theta$. L'ensemble $\bar{G}^\varepsilon$ est fermé, puisque la fonction f est semi-continue supérieurement. Donc sont fermés et non vides les ensembles $\mathscr{M}_i = \bar{G}_i \cap \bar{G} \subset \bar{G}_i$ ainsi que leur intersection $\mathscr{M} = \bigcap_1^\infty \mathscr{M}_i \subset \bar{A}$. Donc

$$\Xi \leqslant \sup_{\mathscr{M}} f(x) \leqslant \sup_{\bar{A}} f(x) = \theta.$$

D'où $\Xi = \theta$. C.Q.F.D.

Ce théorème généralise le théorème 3.2

§ 5. Intégration idempotente des fonctions mesurables et semi-mesurables

Soit Σ une algèbre de sous-ensembles d'un ensemble Ω, engendrant une tribu $\mathfrak{A}$ et $\mathscr{G}$ la classe des éléments de Ω, réunions dénombrables des ensembles de Σ. Soit $\mathscr{A}$ un semi-anneau métrique partiellement ordonné vérifiant les conditions énoncées au § 1.

On dit qu'une fonction $f : \Omega \to \mathscr{A}$ est *mesurable inférieurement* si les ensembles $V(a) = \{\omega : f(\omega) \geqslant a\}$, $\Omega(a) = \{\omega : f(\omega) > a\}$ appartiennent à $\mathfrak{A}$ quel que soit $a \in \mathscr{A}$ et *semi-mesurable inférieurement*, si $\Omega(a) \subset \mathscr{G}$.

La relation d'ordre de $\mathscr{A}$ est partielle, donc l'ensemble $W(a) = \{\omega : f(\omega) \leqslant a\}$ n'est pas le complémentaire de l'ensemble $\Omega(a)$ et il faut faire une distinction entre la (semi-) mesurabilité inférieure et la (semi-) mesurabilité supérieure. Il est évident que la notion de semi-mesurabilité dépend du choix de l'algèbre Σ qui définit la classe $\mathscr{G}$; mais dans la suite de l'exposé il sera toujours question de la même algèbre Σ, aussi serons-nous dispensés d'indiquer par rapport à quelle classe est définie la semi-mesurabilité.

Précisons la notion de ε-*réseau*. On dit qu'un sous-ensemble $\{d_i^\varepsilon\}_i^\infty$ d'un ensemble $D \subset \mathscr{A}$ est un ε-réseau si pour tout point $d \in D$, il existe un élément d_i^ε tel que

$$\rho(d_i^\varepsilon, d) \leqslant \varepsilon. \tag{5.1}$$

Si en plus de (5.1) est réalisée la condition $d_i^\varepsilon \geqslant d$, on dit alors que c'est un *réseau supérieur*, et si $d_i^\varepsilon \leqslant d$, un *réseau inférieur*. Signalons que bien qu'un ε-réseau ne soit ni inférieur ni supérieur, il existe des 2ε-réseaux supérieur et inférieur

$$D_i^{2\varepsilon} = \sup \{D: \rho(D, d_i^\varepsilon) \leqslant \varepsilon\} \text{ et } g_i^{2\varepsilon} = \inf \{g: \rho(g, d_i^\varepsilon) \leqslant \varepsilon\}$$

qui lui sont associés. En effet, l'inégalité triangulaire nous donne:

$$\rho(x, D_i^{2\varepsilon}) \leqslant \rho(x, d_i^\varepsilon) + \rho(d_i^\varepsilon, D_i^{2\varepsilon}) \leqslant 2\varepsilon.$$

Une fonction $f: \Omega \to \mathscr{A}$ est dite *élémentaire* si elle est constante sur un ensemble $A \in \mathfrak{A}$ et égale à $\mathbb{0}$ sur son complémentaire. Une fonction f est *simple* si elle est égale à la somme d'un nombre au plus dénombrable de fonctions élémentaires: $f_n(\omega) = \bigoplus_1^\infty f_i(\omega)$.

Pour déterminer la notion d'intégrale idempotente à valeurs dans $\mathscr{A}$, nous aurons besoin de certaines propriétés de la métrique et de la structure du semi-anneau $\mathscr{A}$ que nous énoncerons sous la forme des conditions suivantes:

(1) Condition de compatibilité des opérations de structure et de la métrique:

Si $\sup a_n \to a$ et $\inf a_n \to a$ lorsque $n \to \infty$, alors $\rho(a_n, a) \to 0$, et réciproquement (cf. § 1, n° 5).

(2) Condition d'uniformité de la métrique pour les opérations de semi-groupe et les opérations de structure.

Si $\rho(a_n, b_n) \to 0$, alors $\rho(a_n \diamondsuit d, b_n \diamondsuit d) \to 0$ uniformément en d pour tout ensemble borné $D \ni d$, où $\diamondsuit$ est l'une des opérations $\oplus$, $\odot$, sup, inf.

(3) Condition de minimax de la métrique:

$$\rho(a \diamondsuit b,\ c \diamondsuit d) \leqslant \max \{\rho(a, c), \rho(b, d)\},$$

où $\diamondsuit$ est l'une des trois opérations $\oplus$, sup, inf.

(4) Condition de monotonie de la métrique:

Si $a \geqslant b \geqslant c$, alors $\rho(a, c) \geqslant \max \{\rho(a, b), \rho(b, c)\}$.

Un important corollaire de la condition (3) est l'inégalité de minimax:

$$\rho\left(\bigoplus_1^n a_i, \bigoplus_1^n b_i\right) \leqslant \min_j \max_i \rho(a_i, b_j). \tag{5.2}$$

En effet, on démontre par récurrence que

$$\rho\left(\bigoplus_1^n a_i, \bigoplus_1^n b_j\right) \leqslant \max (\rho(a, b_{\pi(1)}), \ldots \rho(a_n, b_{\pi(n)})\}, \tag{5.3}$$

où π est une permutation de l'ensemble des indices $1, \ldots, n$. Comme (5.2) est valable pour toute permutation, choisissons celle qui minimise ce maximum pour obtenir (5.2).

Les conditions de compatibilité et d'uniformité sont réalisées pour la métrique $\rho_{\exp}$. Montrons que cette métrique satisfait aussi à la condition de

minimax. Considérons tout d'abord le cas $\mathbf{R}\cup\{-\infty\}$. Supposons que $a<b$ et $c<d$. Alors

$$\rho(a\diamondsuit b,\ c\diamondsuit d)=\begin{cases}\rho(b,d) & \text{pour les opérations sup et } \oplus,\\ \rho(a,c) & \text{pour l'opération inf.}\end{cases}$$

Le cas multidimensionnel se ramène au cas unidimensionnel, puisque pour la métrique $\rho_{\exp}$ on a

$$\rho(a\diamondsuit b,\ c\diamondsuit d)\overset{\text{déf}}{=}\max_i \rho\left((a\diamondsuit b)_i,\ (c\diamondsuit d)_i\right)=\max_i \rho\,(a_i\diamondsuit b_i,\ c_i\diamondsuit d_i).$$

Théorème 5.1. *Soit $f:\Omega\to\mathscr{A}$ une fonction dont l'ensemble des valeurs est séparable. Si f est mesurable inférieurement, il existe une suite de fonctions simples convergeant inférieurement vers f.*

Si l'ensemble Ω est $\mathscr{A}$-normal, l'espace $\mathscr{A}$, localement compact, la métrique ρ, minimax et enfin f, semi-continue, inférieurement bornée et à support compact, alors il existe une suite f_n de fonctions continues convergeant inférieurement vers f en chaque point.

Démonstration. Soit $\{f_i^\varepsilon\}_1^\infty$ un ε-réseau inférieur sur l'ensemble des valeurs de f. Désignons par $f_i(\omega)$ une fonction élémentaire égale à f_i^ε sur l'ensemble $\Omega_i^\varepsilon=\{\omega: f(\omega)\geqslant f_i^\varepsilon\}\in\mathfrak{A}$ et à $\mathbb{0}$ sur son complémentaire. Il est clair que $f_i(\omega)\leqslant f(\omega)$ et $f_j(\omega)\oplus f(\omega)=f(\omega)$.

Supposons que $f_n^\varepsilon(\omega)=\bigoplus_1^\infty f_i(\omega)$ est une fonction simple. Alors

$$f_n^\varepsilon(\omega)\leqslant f_n^\varepsilon(\omega)\oplus f(\omega)\leqslant\bigoplus_1^\infty f_i(\omega)\oplus f(\omega))=f(\omega).$$

En vertu de la définition d'un ε-réseau, pour tout point ω il existe un numéro $i=i(\omega)$ tel que

$$\varepsilon\geqslant\rho(f_i^\varepsilon, f(\omega))=\rho(f_i(\omega), f(\omega))\geqslant\rho(f_n^\varepsilon(\omega), f(\omega)).$$

Donc

$$\sup_{\omega\in\Omega}\rho(f_n(\omega),\ f(\omega))\leqslant\varepsilon,\qquad f_n^\varepsilon(\omega)\leqslant f(\omega).$$

Prouvons la seconde partie du théorème. La compacité du support de la fonction bornée semi-continue inférieurement f entraîne la compacité relative des ensembles ouverts $\Omega_i^\varepsilon=\{\omega: f(\omega)>\{g_i^\varepsilon\}$, où $\{g_i^\varepsilon\}_1^N$ est un ε-réseau inférieur sur l'ensemble des valeurs de f et $N=N(\varepsilon)$.

Soit $\{D_{i,n}^\varepsilon\}$ une suite d'ensembles compacts telle que

$$D_{i,n}^\varepsilon\subset\Omega_i^\varepsilon,\qquad\bigcup_{n=1}^\infty D_{i,n}^\varepsilon=\Omega_i^\varepsilon.$$

L'espace X étant $\mathscr{A}$-normal par hypothèse, il existe des fonctions continues $f_{n,i}(\omega)\leqslant g_i^\varepsilon$ égales à g_i^ε si $\omega\in D_{i,n}^\varepsilon$ et à $\mathbb{0}$ sinon. Considérons la fonction

$$f_n(\omega)=\bigoplus_1^\lambda f_{n,i}^\varepsilon(\omega)\big|_{\varepsilon=n^{-1}}.$$

Il est immédiat de voir que $f_{n,i}(\omega) \leqslant f(\omega)$ entraîne $f_n(\omega) \leqslant f(\omega)$. La somme $\oplus$ d'un nombre fini de fonctions continues pour la métrique minimax est aussi continue, donc $f_n(\omega) \in C_{\mathscr{A}}(\Omega)$. Par définition du ε-réseau, pour tout point ω on peut exhiber un point $g^{\varepsilon}_{i,N}$, $i = i(\omega)$, du ε-réseau tel que $f(\omega) \geqslant g^{\varepsilon}_i$ et $\rho(f(\omega), g^{\varepsilon}_i) \leqslant \varepsilon$. Donc $\rho(f(\omega), \overset{N}{\underset{1}{\oplus}} f_{n,i}(\omega)) \leqslant \varepsilon$. Et, par suite, $\rho(f(\omega), f_n(\omega)) \leqslant n^{-1}$. Ce qui prouve le théorème.

Appelons *intégrale d'une fonction élementaire* f à valeurs dans $\mathscr{A}$ par rapport à une mesure finie $m: \mathfrak{A} \to \mathscr{A}$, la quantité

$$\int_{\Omega}^{\oplus} f_e(\omega) \cdot m(d\omega) = f \odot m(g),$$

$$\text{où } f_e(\omega) \overset{\text{déf}}{=} \begin{cases} f, & \omega \in g, \\ \mathbb{0}, & \omega \notin g. \end{cases}$$

Appelons *intégrale d'une fonction simple bornée* $f(\omega) = \overset{\infty}{\underset{1}{\oplus}} f_i(\omega)$ la somme

$$\int_{\Omega}^{\oplus} f(\omega) \odot m(d\omega) = \overset{\infty}{\underset{i}{\oplus}} (f_1 \odot m(g_i)).$$

Corollaire. *Si f et φ sont des fonctions simples bornées et $f \leqslant \varphi$, alors*

$$\int_{\Omega}^{\oplus} f(\omega) \odot m(d\omega) \leqslant \int_{\Omega}^{\oplus} \varphi(\omega) \odot m(d\omega).$$

Lemme 5.1. *Si une suite de ε-réseaux inférieurs est définie sur l'ensemble des valeurs d'une fonction simple bornée $f: \Omega \to \mathscr{A}$, alors*

$$\overset{\infty}{\underset{1}{\oplus}} f_i \odot m(g_i) = \overset{\infty}{\underset{1}{\oplus}} f_i \odot m(G_i) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \overset{\infty}{\underset{1}{\oplus}} (f^{\varepsilon}_i \odot m(G^{\varepsilon}_i)), \tag{5.4}$$

où

$$G_i \overset{\text{déf}}{=} \{\omega : f(\omega) \geqslant f_i\} = \bigcup_{j : f_j \geqslant f_i} g_i, \qquad G^{\varepsilon}_i \overset{\text{déf}}{=} \{\omega : f(\omega) \geqslant f^{\varepsilon}_i\},$$

$$f(\omega) \overset{\text{déf}}{=} f_i \quad \textit{pour} \quad \omega \in g_i.$$

Démonstration. L'ensemble des valeurs d'une fonction simple f est discret. Donc chaque ensemble G^{ε}_i est la réunion des ensembles $G_i = \{\omega : f(\omega) \geqslant f_i\}$:

$$G^{\varepsilon}_i = \bigcup_{f_j \geqslant f^{\varepsilon}_i} G_j \supset G_i.$$

Par conséquent,

$$\overset{\infty}{\underset{1}{\oplus}} \left(f^{\varepsilon}_i \odot m(G^{\varepsilon}_i) \right) = \overset{\infty}{\underset{i=1}{\oplus}} \left(f^{\varepsilon}_i \odot \left(\bigodot_{j = f^{\varepsilon}_i \leqslant f_j} m(G_j) \right) \right) = \overset{\infty}{\underset{j=1}{\oplus}} \left(m(G_j) \odot \left(\bigoplus_{i = f^{\varepsilon}_i \leqslant f_j} f^{\varepsilon}_i \right) \right).$$

D'après la définition d'un ε-réseau inférieur, il vient

$$\rho\left(f_j, \bigoplus_{i=f_i^\varepsilon \leqslant f_j} f_i^\varepsilon\right) \leqslant \varepsilon.$$

La condition de minimax de la mesure entraîne

$$\rho\left(\bigoplus_1^\infty f_i \odot m(G_i), \bigoplus_1^\infty f_i^\varepsilon \odot m(G_i^\varepsilon)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \max_j \rho\left(f_j \odot m(G_j), \left(\bigoplus_{i=f_i^\varepsilon \leqslant f_j} f_i^\varepsilon\right) \odot m(G_i)\right) \to 0 \qquad (5.4)$$

lorsque $\varepsilon \to 0$; puisque $m(G_i) \leqslant m(\Omega)$ et la mesure m est finie. Ce qui prouve le lemme.

Appelons enfin *intégrale d'une fonction bornée mesurable inférieurement* $f_n: \Omega \to \mathscr{A}$ à valeurs dans un ensemble séparable, la limite d'une suite d'intégrales de fonctions simples, convergeant vers f inférieurement

$$\int_\Omega^\oplus f(\omega) \odot m(d\omega) \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} \dot{\int_\Omega} f^\varepsilon(\omega) \odot m(d\omega), \qquad (5.5)$$

où f_n^ε est la suite de fonctions simples construite dans la démonstration du théorème 5.1:

$$f^\varepsilon(\omega) = \bigoplus_1^\infty f_i^\varepsilon(\omega). \qquad f_i^\varepsilon(\omega) = \{f_i^\varepsilon, \omega \in \Omega_i^\varepsilon, \mathbb{0}, \omega \notin \Omega_i^\varepsilon\},$$

$$\Omega_i^\varepsilon = \{\omega : f(\omega) \geqslant f_i^\varepsilon\}.$$

L'existence de la limite dans la définition (5.5) est assurée par le théorème suivant.

Théorème 5.2. *Soit $\mathscr{A}$ un semi-anneau complet partiellement ordonné dont la métrique et les opérations de structure vérifient les propriétés* (1) *à* (4). *Alors l'intégrale* (5.5) *existe pour toute mesure* σ*-additive idempotente finie et toute fonction bornée mesurable inférieurement f: $\Omega \to \mathscr{A}$ à valeurs dans un ensemble séparable.*

Démonstration. Soient $\{f_i^\varepsilon\}_1^\infty$ et $\{d_i^\delta\}_1^\infty$ respectivement un ε-réseau et un δ-réseau sur l'ensemble des valeurs de f, $f_n^\varepsilon(\omega)$ et $f_n^\delta(\omega)$ des fonctions simples associées à ces ε- et δ-réseaux et $I_\varepsilon = I(f_n^\varepsilon)$, $I_\delta = I(f_n^\delta)$ des intégrales idempotentes. On se propose de prouver que $\rho(I_\varepsilon, I_\delta) \to 0$ avec ε et δ, autrement dit que la suite $\{I_\varepsilon\}$ est fondamentale.

Considérons l'intégrale $I_{\varepsilon,\delta} = I_\varepsilon \oplus I_\delta = I(f_n^\varepsilon \oplus f_n^\delta)$ associée à la réunion des deux réseaux. Comme $\{f_i^\varepsilon\}_1^\infty$ est un ε-réseau inférieur, chaque point d_j^ε appartient au ε-voisinage supérieur d'un point f_i^ε. Désignons par $J_\varepsilon(i)$ l'ensemble des points du δ-réseau appartenant au ε-voisinage supérieur du point f_i^ε:

$$d_j^\varepsilon \geqslant f_i^\varepsilon, \qquad \rho(f_i^\varepsilon, d_j^\varepsilon) \leqslant \varepsilon, \qquad \forall_j \in J_\varepsilon(i).$$

En changeant l'ordre de sommation, on obtient

$$I_{\varepsilon,\delta}=\bigoplus_{i=1}^{\infty}\left(f_i^{\varepsilon}\odot m(D_i^{\varepsilon})\bigoplus_{j\in J_{\varepsilon}(i)}(d_i^{\delta}\odot m(D_j^{\delta}))\right),$$

où $D_i^{\varepsilon}=\{\omega: f(\omega)\geqslant f_i^{\varepsilon}\}$, $D_j^{\delta}=\{\omega: f(\omega)\geqslant d_j^{\delta}\}$. Comme $d_j^{\varepsilon}\geqslant f_i^{\varepsilon}$ pour tout $j\in J_{\varepsilon}(i)$, il vient $D_j^{\varepsilon}\subseteq D_i^{\varepsilon}$. Donc

$$I_{\varepsilon,\delta}\leqslant\bigoplus_{i=1}^{\infty}(f_i^{\varepsilon}\bigoplus_{j\in J_{\varepsilon}(i)}d_i^{\varepsilon})\odot m(D_i^{\varepsilon})\leqslant\bigoplus_{i=1}^{\infty}F_i^{\varepsilon}\odot m(D_i^{\varepsilon}),$$

où

$$F_i^{\varepsilon}=\sup\{f: f\geqslant f_i^{\varepsilon},\ \rho(f,f_i^{\varepsilon})\leqslant\varepsilon\}.$$

Ce résultat peut être appliqué à l'estimation de la distance $\rho(I_{\varepsilon},I_{\varepsilon,\delta})$. La propriété de minimax de la métrique entraîne

$$\rho(I_{\varepsilon},I_{\varepsilon,\delta})\leqslant\rho\left(\bigoplus_{i=1}^{\infty}(f_i^{\varepsilon}\odot m(D_i^{\varepsilon})),\bigoplus_{i=1}^{\infty}(F_i^{\varepsilon}\odot m(D_i^{\varepsilon}))\right)\leqslant$$

$$\leqslant\sup_i(\rho(f_i^{\varepsilon}\odot m(D_i^{\varepsilon}),F_i^{\varepsilon}\odot m(D_i^{\varepsilon}))).$$

Vu que $\rho(f_i^{\varepsilon},F_i^{\varepsilon})\leqslant\varepsilon$ et que $m(D_i^{\varepsilon})\leqslant m(\Omega)$, on en déduit que $\rho(I_{\varepsilon},I_{\varepsilon,\delta})\to 0$ avec ε.

On démontre de façon analogue que $\rho(I_{\delta},I_{\varepsilon,\delta})\to 0$ avec δ. Finalement l'inégalité du triangle nous donne

$$\rho(I_{\varepsilon},I_{\delta})\leqslant\rho(I_{\varepsilon},I_{\varepsilon,\delta})+\rho(I_{\delta},I_{\varepsilon,\delta})\to 0$$

pour $\varepsilon,\ \delta\to 0$.
Ce qui prouve le théorème.

Le théorème suivant est le principal résultat de ce paragraphe.

Théorème 5.3. *Soit m un prolongement σ-additif idempotent d'une mesure finie μ d'une algèbre Σ à la tribu $\mathfrak{A}$ engendrée par Σ, m^* le prolongement maximal. Alors les intégrales par rapport à m et m^* de toute fonction bornée semi-mesurable inférieurement prenant ses valeurs dans un ensemble séparable sont confondues.*

Démonstration. Soit $\{f_i^{\varepsilon}\}_1^{\infty}$ un ε-réseau supérieur sur l'ensemble des valeurs de f, $\{F_i^{\varepsilon}\}_1^{\infty}$ un 2ε-réseau inférieur: $F_i^{\varepsilon}\leqslant f_i^{\varepsilon}$, $\rho(f_i^{\varepsilon},F_i^{\varepsilon})\leqslant\varepsilon$. Le théorème 5.2 nous dit que les suites

$$I_{\varepsilon}^*(f)=\bigoplus_1^{\infty}f_i^{\varepsilon}\odot m^*\{x: f(x)\geqslant f_i^{\varepsilon}\}\quad\text{et}\quad J_{\varepsilon}^*(f)=\bigoplus_1^{\infty}F_i^{\varepsilon}\odot m^*\{x: f(x)\geqslant F_i^{\varepsilon}\}$$

convergent inférieurement vers l'intégrale $J^*(f)=\overset{\oplus}{\int}f(x)\odot m^*(dx)$ et les suites

$$I_{\varepsilon}(f)=\bigoplus_1^{\infty}f_i^{\varepsilon}\odot m\{x: f(x)\geqslant f_i^{\varepsilon}\}\quad\text{et}\quad J_{\varepsilon}(f)=\bigoplus_1^{\infty}F_i^{\varepsilon}\odot m\{x: f(x)\geqslant F_i^{\varepsilon}\}$$

vers l'intégrale $I(f)=\int^{\oplus} f(x)\odot m(dx)$. La mesure m^* étant bornée et la métrique ρ localement uniforme pour la multiplication $\odot$, on déduit de la convergence de $\rho(f_i^\varepsilon, F_i^\varepsilon)\to 0$ pour $\varepsilon\to 0$ et de la propriété de minimax de la métrique ρ, que $\rho(\tilde{J}_\varepsilon^*(f), J_\varepsilon^*(f))\to 0$ pour $\varepsilon\to 0$, où $\tilde{J}_\varepsilon(f)=$ $=\bigoplus_1^\infty F_i^\varepsilon\odot m^*\{x: f(x)\geqslant f_i^\varepsilon\}$.

La chaîne d'inegalités (5.6) résulte de la définition du ε-réseau inférieur et de la coïncidence des mesures m et m^* sur les ensembles de classe $\mathscr{G}$, ensembles qui sont de la forme $\{x: f(x)>F_i^\varepsilon\}$, où f est une fonction semi-mesurable inférieurement

$$m^*\{x: f(x)\geqslant f_i^\varepsilon\}\leqslant m^*\{x: f(x)>F_i^\varepsilon\}=$$
$$=m\{x: f(x)>F_i^\varepsilon\}\leqslant m\{x: f(x)\geqslant F_i^\varepsilon\}\leqslant m^*\{x: f(x)\geqslant F_i^\varepsilon\}. \quad (5.6)$$

En multipliant cette chaîne d'inégalités par F_i^ε et en sommant sur i, on obtient $\tilde{J}_\varepsilon^*(f)\leqslant J_\varepsilon(f)\leqslant J_\varepsilon^*(f)$. Comme $\rho(J_\varepsilon^*, \tilde{J}_\varepsilon^*)\to 0$ avec ε, on en déduit que $\rho(J_\varepsilon(f), J_\varepsilon^*(f))\to 0$. Ce qui prouve le théorème.

§ 6. Mesures idempotentes et fonctionnelles à valeurs dans un semi-anneau

Dans ce paragraphe on se propose de démontrer un théorème relatif à la représentation intégrale d'une fonctionnelle linéaire continue à valeurs dans un semi-anneau $\mathscr{A}$. Ce théorème permet d'établir le théorème de Fubini qui a pour conséquence immédiate les formules intégrales de Duhamel qui expriment la solution de l'équation d'évolution non homogène en fonction d'intégrales des solutions des équations d'évolution homogènes.

Considérons un ensemble $C_0^{\mathscr{A}}(X)$ de fonctions à valeurs dans $\mathscr{A}$ à support compact définies sur un espace topologique X localement compact $\mathscr{A}$-normal. Par analogie à la normalité ordinaire, on dit que l'espace X est $\mathscr{A}$-normal si pour tout fermé K et tout ouvert $M\supset K$ on peut exhiber une fonction continue à valeurs dans $\mathscr{A}$ égale à $\mathbb{1}$ sur K et à $\mathbb{0}$ en dehors de M. Soit $m: C_0^{\mathscr{A}}(X)\to\mathscr{A}$ une fonctionnelle linéaire pour les opérations de semi-groupe $\oplus$ et $\odot$, positive et continue au sens suivant:

$$\rho(m(\varphi), m(f))\leqslant \sup_{x\in K}\rho(c_k\odot\sup(f(x), \varphi(x)), \quad c_k\odot\inf f(x), \varphi(x)),$$

où K est un fermé contenant supp f et supp φ, et c_k une constante de $\mathscr{A}$ dépendant de K.

Dans la suite de l'exposé nous aurons souvent à nous servir du lemme suivant.

Lemme 6.1. *Soit ρ une mesure minimax. Alors tout nombre fini d'opérations $\oplus$, sup, inf est stable sur la classe des fonctions continues et semi-continues inférieurement à support compact.*

Démonstration. Désignons par $\diamondsuit$ les opérations $\oplus$, sup, inf et soient f et φ des fonctions continues. Si une suite $\{x_n\}$ converge vers un point $x \in X$, alors

$$\rho(f(x)\diamondsuit\varphi(x),\ f(x_n)\diamondsuit\varphi(x_n)) \leqslant \max\{\rho(f(x),\ f(x_n)),\ \rho(\varphi(x),\ \varphi(x_n))\} \to 0,$$

où $n \to \infty$, autrement dit $f \diamondsuit \varphi$ est une foncion continue.

Si f et φ sont des fonctions semi-continues inférieurement, il existe des suites de fonctions continues f_n et φ_n convergeant simplement inférieurement vers f et φ. Ceci étant, de $f \geqslant f_n$ et $\varphi \geqslant \varphi_n$ il s'ensuit que

$$f \diamondsuit \varphi \geqslant f_n \diamondsuit \varphi_n \stackrel{\text{déf}}{=} \psi_n$$

et

$$\rho(f(x)\diamondsuit\varphi(x),\ \psi_n) \leqslant \max\{\rho(f(x), f_n(x)),\ \rho(\varphi(x),\ \varphi_n(x))\} \to 0$$

lorsque $n \to \infty$. Vu qu'en vertu de la première partie du lemme la suite ψ_n est une suite de fonctions continues, il vient que $(f \diamondsuit \varphi)(x)$ est une fonction semi-continue inférieurement. Ce qui prouve le lemme.

Prolongeons la mesure m: $C_0^{\mathscr{A}}(X) \to \mathscr{A}$ à l'ensemble $\Phi^{\mathscr{A}}(X)$ des fonctions semi-continues inférieurement

$$m^*(f) \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{\varphi} \{m(\varphi),\ \varphi \leqslant f,\ \varphi \in C_0^{\mathscr{A}}(X)\}. \tag{6.1}$$

Assurons-nous tout d'abord que ce prolongement est monotone.

Lemme 6.2. *Si $f_{1,2} \in \Phi^{\mathscr{A}}(X)$ et $f_1 \leqslant f_2$, alors $m^*(f_1) \leqslant m^*(f_2)$.*

Démonstration. Il suffit de s'assurer que si $\{\varphi_n^1\}_1^\infty$ est une suite de fonctions de $C_0^{\mathscr{A}}$ convergeant vers f_1 inférieurement, il existe une suite $\{\varphi_n^2\}_1^\infty$ de fonctions convergeant vers f_2 telle que $\varphi_n^2 \geqslant \varphi_n^1$. En vertu du lemme 6.1, une telle suite peut être déduite de toute suite $\{\tilde{\varphi}_n^2\}_1^\infty$ à l'aide de la formule $\varphi_n^2(x) = \sup(\varphi_n^1(x), \tilde{\varphi}_n^2(x))$ ou $\varphi_n^2(x) = \varphi_n^1(x) \oplus \tilde{\varphi}_n^2(x)$. Ce qui prouve le lemme.

Définissons sur un ensemble de fonctions arbitraires la *mesure supérieure*

$$m^*(\psi) \stackrel{\text{déf}}{=} \inf_{f} \{m^*(f),\ f \geqslant \psi,\ f \in \Phi^{\mathscr{A}}(X)\}. \tag{6.2}$$

En se servant du fait que la mesure m^* est monotone sur $\Phi^{\mathscr{A}}(X)$ et du résultat du lemme 6.1, on démontre immédiatement que la mesure supérieure m^* est monotone.

Lemme 6.3. *Si $\psi_1 \leqslant \psi_2$, alors $m^*(\psi_1) \leqslant m^*(\psi_2)$.*

On dira qu'un semi-anneau métrique partiellement ordonné $\mathscr{A}$ est *précompact* si sur tout ensemble borné $D \subset \mathscr{A}$, il existe un ε-réseau $\{d_i^\varepsilon\}_1^N$, $N = N(\varepsilon)$, tel que $\forall x \in D$, $\exists d_i^\varepsilon \geqslant x$, $\rho(d_i^\varepsilon, x) \leqslant \varepsilon$.

Corollaire. *Si un semi-anneau localement compact $\mathscr{A}$ est précompact, pour toute fonction bornée ψ on peut exhiber une fonction f semi-continue inférieurement telle que*

$$\rho(m^*(\psi), m^*(f)) \leqslant \varepsilon, \quad f \geqslant \psi.$$

En effet, soient $D = \{m^*(f),\ f \geqslant \psi,\ f \leqslant \sup \psi,\ f \in \Phi^{\mathscr{A}}(X)\}$ un ensemble borné et $\{d_i^\varepsilon\}_1^N$ un ε-réseau sur D. Supposons par ailleurs que $f_i^\varepsilon(x)$ sont les fonctions semi-continues inférieurement de $\Phi^{\mathscr{A}}(X)$ pour lesquelles $m(f_i^\varepsilon) = d_i^\varepsilon$. Dans ce cas, la fonction

$$f^\varepsilon(x) = \inf_{1 \leqslant i \leqslant N} f_i^\varepsilon(x)$$

est aussi semi-continue inférieurement (cf. lemme 6.1) et $f^\varepsilon \geqslant \psi$, puisque $f_i^\varepsilon \geqslant \psi$. En outre $\rho(m^*(f^\varepsilon), m^*(\psi)) \leqslant \varepsilon$ en vertu de la définition du ε-réseau. C.Q.F.D.

Théorème 6.1. *Si une suite de fonctions ψ_n est strictement croissante et converge inférieurement vers une fonction bornée ψ, alors $m^*(\psi_n) \uparrow m^*(\psi)$:*

$$\limsup m^*(\psi_n) = m^*(\limsup \psi_n).$$

Démonstration. Il est clair que

$$m^*(\psi) \geqslant \sup_n m^*(\psi_n). \tag{6.3}$$

D'après le corollaire, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction semi-continue inférieurement $f_n \in \Phi^{\mathscr{A}}(X)$ telle que $\psi_n \leqslant f_n$, $m^*(\psi_n) \leqslant m^*(f_n)$ et $\rho(m^*(\psi_n), m^*(f_n)) \leqslant 2^{-n}\varepsilon$. Soit $\varphi_n(x) = \sup\{f_1(x), \ldots, f_n(x)\} \in \Phi^{\mathscr{A}}(X)$. Il est évident que $\varphi_{n+1} \geqslant f_{n+1} \geqslant \psi_{n+1}$, $\varphi_{n+1} \geqslant \varphi_n$. Comme

$$\sup\{\varphi_n, f_{n+1}\} \leqslant \varphi_n \oplus f_{n+1}$$

et

$$\rho(a, b \oplus c) \leqslant \rho(a, b) + \rho(a, c),$$

alors

$$\rho(m^*(\psi_{n+1}), m^*(\varphi_{n+1})) \leqslant \rho(m^*(\psi_{n+1}), m^*(\varphi_n)) +$$
$$+ \rho(m^*(\psi_{n+1}), m^*(f_{n+1})) \leqslant \rho(m^*(\psi_n), m^*(\varphi_n)) +$$
$$+ 2^{-n}\varepsilon \leqslant \ldots \leqslant \rho(m^*(\psi_1), m^*(\varphi_1)) + \left(\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right)\varepsilon \leqslant 2\varepsilon.$$

Donc $\sup \varphi_n \geqslant \psi_n$, et par suite

$$\rho(m^*(\psi_n), m^*(\varphi_n)) \leqslant \rho(m^*(f_n), m^*(\varphi_n)) \leqslant \varepsilon. \tag{6.4}$$

La métrique étant compatible avec les opérations de structure et ε étant arbitrairement choisi, de (6.4) on déduit l'inégalité

$$\sup_n m^*(\psi_n) \geqslant m^*(\sup_n \psi_n) = m^*(\psi).$$

En effet, si l'on suppose par absurde que $m^*(\varphi) > \sup m^*(\psi_n)$ alors *a fortiori* $\sup m^*(\varphi_n) > m^*(\psi_n)$ et l'inégalité (6.4) ne peut plus être réalisée quel que soit $\varepsilon > 0$. D'où, compte tenu de (6.4), la proposition du théorème.

Lemme 6.2. (Fatou). *Si* $\{f_n\}$ *est une suite uniformément bornée de fonctions à valeurs dans* $\mathscr{A}$, *alors*

$$m^*(\liminf f_n) \leqslant \liminf m^*(f_n).$$

Démonstration. Considérons les fonctions $F_n(x) = \inf\{f_m(x), m \geqslant n\} \leqslant f_n$. Ces fonctions forment une suite croissante convergeant par définition vers $\liminf f_n$. Le théorème 6.1 entraîne

$$\limsup m^*(F_n) = m^*(\limsup F_n) = m^*(\liminf f_n). \tag{6.5}$$

Comme $F_n(x) \leqslant f_m(x)$ pour $m \geqslant n$, il vient $m^*(F_n) \leqslant m^*(f_m)$, $m \geqslant n$. Donc $m^*(F_n) \leqslant \inf m^*(f_m)$. De là et de (6.5) il s'ensuit que

$$\liminf m^*(f_n) \geqslant m^*(\liminf f_n).$$

Ce qui prouve le lemme.

On dit qu'un ensemble $A \in X$ est *intégrable* si sa fonction caractéristique l'est, et *mesurable* si sont intégrables les fonctions caractéristiques des $A \cap K$ pour tout compact K.

On dit qu'un ensemble A est *localement négligeable* si

$$m^*(A) = \sup_K m^*(A \cap K) = 0,$$

où $m^*(A) \stackrel{\text{déf}}{=} m^*(\chi_A)$.

Du théorème 6.1 il résulte que si des ensembles A_n sont intégrables et $m^*(A_n) \leqslant \text{const}$, les ensembles $A = \bigcup_1^\infty A_n$ le sont aussi :

$$\chi_A(x) = \bigoplus_1^\infty \chi_{A_n}(x),\ m^*(\chi_A) \stackrel{\text{déf}}{=} m^*(A) =$$

$$= \limsup m^*\Big(\bigoplus_1^n \chi_{A_n}\Big) = m^*\Big(\limsup \bigoplus_1^n \chi_{A_n}\Big).$$

Donc m^* est une mesure σ-additive idempotente.

Désignons par $\mathscr{B}(X)$ la tribu des boréliens sur X, c'est-à-dire la plus petite tribu par rapport à laquelle sont mesurables toutes les fonctions continues.

Théorème 6.2. *Si* φ *est une fonction bornée* $\mathscr{B}$*-mesurable inférieurement à valeurs dans un ensemble séparable, alors*

$$m^*(\varphi) = \int_X^\oplus \varphi(x) \odot m^*(dx),$$

où $m(dx)$ est une mesure superieure sur $\mathscr{B}(X)$ engendrée par une fonctionnelle linéaire continue m sur $C_0^{\mathscr{A}}(X)$ et $m^*(\varphi)$ le prolongement supérieur de m.

Démonstration. Soit $\varphi^\varepsilon(x)=\bigoplus_1^\infty \varphi_n^\varepsilon \odot \chi\{x: \varphi(x)\geqslant\varphi_n^\varepsilon\}$, où $\{\varphi_n^\varepsilon\}_1^\infty$ est un ε-réseau sur l'ensemble des valeurs de φ. Alors $\varphi^\varepsilon\leqslant\sup(\varphi^\varepsilon,\varphi)\leqslant\varepsilon$. Donc $\varphi^\varepsilon\uparrow\varphi(x)$. Le théorème 6.1 nous apprend que $m^*(\varphi^\varepsilon)\uparrow m^*(\varphi)$, et les théorèmes 5.1 et 5.2, que

$$\int_X^\oplus \varphi^\varepsilon(x)\odot m^*(dx)\uparrow\int_X^\oplus \varphi(x)\odot m^*(dx) \qquad \text{lorsque } \varepsilon\to 0.$$

Vu que pour des fonctions simples

$$m^*(f^\varepsilon)=\bigoplus_1^\infty f_n\odot m^*(\chi_A)=\bigoplus_1^\infty f_n\odot m^*(A_n)=\int_X^\oplus f^\varepsilon(x)\odot m^*(dx),$$

cette égalité est valable quand on passe à la limite pour $\varepsilon\to 0$. Ce qui prouve le théorème.

Soient m_1 et m_2 deux fonctionnelles linéaires continues à valeurs dans $\mathscr{A}$, définies respectivement sur $C_0^{\mathscr{A}}(X_1)$ et $C_0^{\mathscr{A}}(X_2)$, où X_1 et X_2 sont des espaces topologiques localement compacts $\mathscr{A}$-normaux.

Soit $X=X_1\times X_2$ le produit direct des espaces topologiques localement compacts X_1 et X_2, et soit $C_0^{\mathscr{A}}(X)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact définies sur $X=X_1\times X_2$, à valeurs dans $\mathscr{A}$. Il est aisé de voir que les fonctions

$$\varphi_1(x_1)=m_2(\varphi(x_1,\cdot)) \quad \text{et} \quad \varphi_2(x_2)=m_1(\varphi(\cdot,x_2))$$

appartiennent respectivement à $C_0^{\mathscr{A}}(X_1)$ et $C_0^{\mathscr{A}}(X_2)$ si $\varphi\in C_0^{\mathscr{A}}(X)$. Donc les expressions $m_{12}(\varphi)=m_1(m_2(\varphi))$ et $m_{21}=m_2(m_1(\varphi))$ définissent des fonctionnelles linéaires continues définies sur $C_0^{\mathscr{A}}(X)$ à valeurs dans $\mathscr{A}$.

On se propose de démontrer que $m_{12}=m_{21}$.

Théorème 6.3. *Soit $\varphi\in C_0(X)$, $X=X_1\times X_2$ une fonction continue à valeurs dans un espace séparable. Alors*

$$m_{12}(\varphi)=m_{21}(\varphi).$$

Démonstration. Soient K_1 et K_2 des sous-ensembles compacts de X_1 et X_2 respectivement dont le produit contient supp φ.

La fonction $\rho(f(x_1,x_2),f(x_1',x_2'))$ est continue sur le compact $K=K_1\times K_2\times K_1\times K_2$. Elle est donc équicontinue et pour tout $\varepsilon>0$, il existe des partitions finies des compacts K_1 et K_2 telles que

$$\rho(\varphi(x_1,x_2),\varphi(x_1,x_1'))\leqslant\varepsilon, \quad x_1\in K_1; \quad x_2,x_2'\subset K_{2j}^\varepsilon,$$

$$\rho(\varphi(x_1,x_2),\varphi(x_1',x_2))\leqslant\varepsilon, \quad x_2\in K_2; \quad x_1,x_1'\in K_{1j}^\varepsilon,$$

$$K_1=\bigcup_{j=1}^N K_{1j}^\varepsilon, \quad K_2=\bigcup_{j=1}^N K_{2j}^\varepsilon, \qquad N=N(\varepsilon).$$

Considérons la suite de fonctions simples $\varphi_\varepsilon(x_1, x_2) = \bigoplus_{i,j} \varphi_{ij}^\varepsilon(x_1, x_2)$, où

$$\varphi_{ij}^\varepsilon(x_1, x_2) = \begin{cases} \inf \varphi(x_1, x_2) = \varphi_{ij}^\varepsilon & \text{si } (x_1, x_2) \in K_{1i}^\varepsilon \times K_{ij}^\varepsilon, \\ \mathbb{0} & \text{sinon,} \end{cases}$$

qui converge uniformément vers $\varphi(x_1, x_2)$ inférieurement.

En vertu du théorème 6.2, les suites de fonctions simples $\psi^\varepsilon(x_1) = \bigoplus_{i=1}^N \psi_i^\varepsilon(x_1)$, $\Phi^\varepsilon(x_2) = \bigoplus_{i=1}^N \Phi_j^\varepsilon(x_2)$, où

$$\psi_i^\varepsilon(x_1) = \begin{cases} \bigoplus_{j=1}^N \varphi_{ij}^\varepsilon \odot m_2(K_{2j}^\varepsilon) & \text{si } x_1 \in K_{1i}^\varepsilon, \\ \mathbb{0} & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\Phi_j^\varepsilon(x_2) = \begin{cases} \bigoplus_{j=1}^N \varphi_{ij}^\varepsilon \odot m_1(K_{1i}^\varepsilon) & \text{si } x_2 \in K_{2j}^\varepsilon, \\ \mathbb{0} & \text{sinon,} \end{cases}$$

convergent pour $\varepsilon \to 0$ vers les intégrales

$$\psi(x_1) = \int_{X_2}^{\oplus} \varphi(x_1, x_2) \odot m_2(dx_2) = m_2(\varphi(x_1, \cdot)) = m_{21}(\varphi)$$

et

$$\Phi(x_2) = \int_{X_1}^{\oplus} \varphi(x_1, x_2) \odot m_1(dx_1) = m_2(\varphi(\cdot, x_2)) = m_{12}(\varphi).$$

Or pour tout $N = N(\varepsilon)$ fini, les intégrales

$$\int_{X_1}^{\oplus} \psi^\varepsilon(x_1) \odot m_1(dx_1) \quad \text{et} \quad \int_{X_2}^{\oplus} \Phi^\varepsilon(x_2) \odot m_2(dx_2)$$

sont égales à une même somme

$$\bigoplus_{i,j=1}^N \varphi_{ij}^\varepsilon \odot m_1(K_{1i}^\varepsilon) \odot m_2(K_{2j}^\varepsilon).$$

Donc cette égalité se conserve à la limite. Ce qui prouve le théorème.

Le résultat obtenu pour les fonctions continues se généralise aux fonctions bornées semi-continues inférieurement à valeurs dans un ensemble séparable et ensuite aux fonctions bornées mesurables.

§ 7. Transformation de Fourier-Legendre

Soit X un espace topologique localement compact $\mathscr{A}$-régulier muni d'une structure de groupe abélien et soit m une fonctionnelle linéaire continue définie sur $C_0^{\mathscr{A}}(X)$ à valeurs dans $\mathscr{A}$ invariante par le groupe de translations

$$m(T_q\varphi)=m(\varphi), \quad T_q\varphi(x)=\varphi(x+q), \quad x, q\in X.$$

Le théorème 6.2 nous dit que sur un ensemble de fonctions définies sur $C_0^{\mathscr{A}}(X)$ à valeurs dans un ensemble séparable, la fonctionnelle m admet la représentation intégrale

$$m(\varphi)=\overset{\oplus}{\int_X}\varphi(x)\odot m^*(dx),$$

où m^* est la mesure supérieure sur $\mathscr{B}(X)$, engendrée par la fonctionnelle m.

On appelle *produit de convolution* de deux fonctions φ, $\psi\in C_0^{\mathscr{A}}(X)$ la fonction de $C_0^{\mathscr{A}}(X)$ égale à

$$(\varphi*\psi)_m(q)=m(T_q\varphi'\odot\psi), \tag{7.1}$$

où $\varphi'(x)=\varphi(-x)$ et $T_q\varphi'(x)=\varphi(q-x)$.

Il est immédiat de voir que

$$T_q(\varphi*\psi)(q)=(T_{-y}\varphi*\psi)(q)=(T_{-y}\psi*\varphi(q)). \tag{7.2}$$

Considérons un opérateur linéaire continu $\mathscr{F}_{x\to p}$ de l'ensemble $C_0^{\mathscr{A}}(X)$ dans l'ensemble $C^{\mathscr{A}}(X)$ des fonctions continues bornées à valeurs dans $\mathscr{A}$, doué de la propriété caractéristique suivante. L'opérateur $\mathscr{F}_{x\to p}$ est opérateur propre de l'opérateur de translation

$$\mathscr{F}_{x\to p}T_q=l(q,p)\odot\mathscr{F}_{x\to p},$$

où $l(q, p)$ est une fonction continue bornée à valeurs dans $\mathscr{A}$.

Cette propriété caractérise également la transformation de Fourier et de plus $l(q, p)=\exp\pm(ipq)$.

Dans le cas général

$$\mathscr{F}_{x\to p}(T_{q+u}\varphi)=l(q+u,p)\odot\mathscr{F}_{x\to p}\varphi=\mathscr{F}_{x\to p}(T_q\circ T_u\varphi)=$$
$$=l(q,p)\odot l(u,p)\odot\mathscr{F}_{x\to p}\varphi,$$

d'où il vient

$$l(q,p)\odot l(u,p)=l(q+u,p). \tag{7.3}$$

Une autre propriété importante de la transformation de Fourier est la formule de commutation avec le produit de convolution:

$$\mathscr{F}_{x\to p}(\varphi*\psi)=(\mathscr{F}_{x\to p}\psi)\odot(\mathscr{F}_{x\to p}\psi). \tag{7.4}$$

Montrons que si l'on admet que (7.4) est réalisée, la fonction l satisfait la condition (7.3) par rapport au deuxième argument et la transformée de

Fourier admet une représentation intégrale sur l'ensemble des fonctions à valeurs dans un ensemble séparable. Les propriétés du produit de convolution (7.1) nous donnent :

$$(\mathscr{F}_{x\to p}\varphi)\odot(\mathscr{F}_{x\to p}\psi)=\mathscr{F}_{x\to p}(\varphi * \psi)=$$
$$=m(\mathscr{F}_{x\to p})\,(T_{-(\cdot)}\varphi\odot\psi(\cdot))=(\mathscr{F}_{x\to p}\varphi)\odot m\big(l(-p,\,\cdot)\odot\psi(\cdot)\big),$$

où $(\cdot)$ est l'argument sur lequel agit la fonctionnelle m. Donc $\mathscr{F}_{x\to p}\psi=$ $=m\big(l(-p,\,\cdot)\odot\psi(\cdot)\big)$. Dans le cas de fonctions continues à valeurs dans un ensemble séparable, cette relation peut être représentée par l'intégrale

$$\mathscr{F}_{x\to p}\psi=\int_X^{\oplus}\psi(x)\odot l(-p,\,x)\odot m^*(dx), \tag{7.5}$$

où $l(-p-p',\,x+x')=l(-p,\,x)\odot l(-p',\,x)\odot l(-p,\,x')\odot l(-p',\,x')$.

Exemple. Soit $A=\mathbf{R}\cup\{-\infty\}$, $X=\mathbf{R}^n$, $\oplus=\sup$, $\odot=+$, $m=\text{const}$, $\mathbb{1}=0$, $\mathbb{0}=-\infty$.

Alors

$$\mathscr{F}_{x\to p}\varphi=\sup\big(l(p,\,x)+\varphi(x)\big),$$

où $l(x,\,p)$ est une fonction additive continue de x et p. Toute fonction additive continue étant linéaire, on a $l(p,\,x)=(p,\,Hx)$, où H est une matrice d'ordre n. Donc, dans le cas considéré, la transformation de Fourier pour les opérations linéaires de $\mathscr{A}$ est confondue avec celle de Legendre pour les opérations de groupe sur $\mathbf{R}$.

§ 8. Principe de Duhamel

Appliquons maintenant la théorie de l'integration idempotente à la démonstration du principe de Duhamel dans le cas d'un semi-groupe non muni de la soustraction et de la différentiation. On peut éviter la différentiation en passant à une formulation intégrale et en se servant du théorème de Fubini qui légitime le changement de l'ordre d'intégration.

Soit donnée une famille $\hat{L}(t)$, $t\in\mathbf{R}$, d'opérateurs linéaires bornés continus en t d'un espace normé $B^{\mathscr{A}}(X)$ de fonctions à valeurs dans $\mathscr{A}$, stable pour l'addition $\oplus$ et pour la multiplication $\odot$ par une constante, dans lui-même. Soient $m\colon \mathscr{B}(\mathbf{R})\to\mathscr{A}$ une mesure bornée σ-additive idempotente et $\varphi_t(x)$, $\psi_{t,s}(x)$, Φ_t des fonctions de $B^*(X)$ dépendant continûment du paramètre t et à valeurs dans des ensembles séparables. Si les opérateurs $\hat{L}(t)$ conservent la séparabilité de l'ensemble des valeurs (c'est-à-dire si l'espace $\mathscr{A}$ tout entier est séparable), alors sont définies les intégrales

$$\int_{]0,\,t]}^{\oplus}\hat{L}(\tau)\,\varphi_\tau\circ m(d\tau),\qquad \int_{]0,\,t]}^{\oplus}\hat{L}(\tau)\,\psi_{\tau,s}\odot m(d\tau).$$

Supposons que les fonctions $\varphi_t, \psi_{t,s}, \Phi_t$ sont solutions des équations suivantes:

Représentation intégrale des équations pour les opérations de semi-groupe $\oplus$ et $\odot$	Représentation différentielle des équations pour les opérations de groupe $+, \cdot$
(8.1) $\varphi_t = \varphi_0 \oplus \overset{\oplus}{\int\limits_{]0,t]}} (\hat{L}(\tau)\varphi_\tau \oplus \psi_\tau) \odot m(d\tau)$	$\dfrac{\partial \varphi_t}{\partial t} = \hat{L}(t)\varphi_t + \psi_t, \quad \varphi\big\|_{t=0} = \varphi_0 \in B^{\mathcal{A}}(X);$
(8.2) $\psi_{t,s} = \psi_s \oplus \overset{\oplus}{\int\limits_{]s,t]}} (\hat{L}(\tau)\psi_{\tau,s} \odot m(d\tau)$	$\dfrac{\partial \psi_{t,s}}{\partial t} = \hat{L}(t)\psi_{t,s}, \quad \psi\big\|_{t,s} = \psi_s \in B^{\mathcal{A}}(X),$
(8.3) $\Phi_t = \varphi_0 \oplus \overset{\oplus}{\int\limits_{]0,t]}} (\hat{L}(\tau)\Phi_\tau \odot m(d\tau)$	$\dfrac{\partial \Phi_t}{\partial t} = \hat{L}(t)\Phi_t, \quad \Phi_{t=0} = \varphi_0.$

Théorème 8.1. *Supposons que* ψ *et* Φ *sont solutions des équations* (8.2), (8.3). *Alors*

$$S_t = \Phi_t \oplus \overset{\oplus}{\int\limits_{]0,t]}} \psi_{t,\tau} \odot m(d\tau) \tag{8.4}$$

est solution de l'équation (8.1).

Démonstration. En utilisant les représentations intégrales de Φ_t et $\psi_{t,\tau}$, on obtient l'identité suivante:

$$S_t = \varphi_0 \oplus \overset{\oplus}{\int\limits_{]0,t]}} (\hat{L}(t)\Phi_\tau) \odot m(d\tau) \oplus \overset{\oplus}{\int\limits_{]0,t]}} (\psi_\tau \oplus \overset{\oplus}{\int\limits_{]\tau,t]}} (\hat{L}(s)\psi_{s,\tau}) \odot m(ds) \odot m(d\tau). \tag{8.5}$$

Signalons que les conditions du théorème de Fubini sont remplies pour la fonction $f(s,\tau) = \hat{L}(s)\psi_{s,\tau}$ et la mesure $\mu = m \times m$ sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Donc la valeur de l'intégrale sur le domaine $\Omega = \{(s,\tau),\ s \geqslant \tau\}$ est indépendante de l'ordre d'intégration:

$$\overset{\oplus}{\int\limits_{]0,t]}} m(d\tau) \odot \overset{\oplus}{\int\limits_{]\tau,t]}} (\hat{L}(s)\psi_{s,\tau}) \odot m(d,s) = \overset{\oplus}{\int\limits_{]0,t]}} m(ds) \odot \overset{\oplus}{\int\limits_{]0,s]}} \hat{L}(s)\psi_{s,\tau} \odot m(d\tau).$$

En tenant compte de l'identité (8.5), on obtient

$$S_t = \varphi_0 \oplus \overset{\oplus}{\int\limits_{]0,t]}} \{\hat{L}(\tau)(\Phi_\tau \oplus \overset{\oplus}{\int\limits_{]0,\tau]}} \psi_{\tau,s} \odot m(ds)) + \psi_\tau\} \odot m(d\tau) =$$

$$= \varphi_0 + \overset{\oplus}{\int\limits_{]0,t]}} (\hat{L}(\tau)S_\tau + \psi_\tau) \odot m(d\tau).$$

Ce qui prouve le théorème.

Considérons maintenant la solution stationnaire $\varphi_t = \varphi$ qui satisfait l'équation (8.3) lorsque $t \to \infty$. Cette solution peut visiblement être représentée comme suit lorsque $t \to \infty$:

$$\varphi = \varphi_0 \oplus \overset{\oplus}{\int_{]0,\infty]}} dm_\tau \odot e^{Lm_\tau} \psi = \varphi_0 \oplus A\psi, \tag{8.6}$$

où $A \overset{\oplus}{\int_{]0,\infty]}} dm_\tau \odot e^{Lm_\tau}$ est quasi réciproque de L. On a ainsi représenté la solution générale de l'équation stationnaire par la somme d'une solution stationnaire quelconque φ_0 de l'équation homogène $L\varphi = 0$ et d'une solution spéciale $\varphi_1 = A\psi$ de l'équation non homogène.

On sait que sous certaines conditions, la solution du problème de Cauchy de l'équation discrète de Bellman converge vers la solution de l'équation généralisée de Hamilton-Jacobi ou de l'équation continue de Bellman. Ce passage à la limite se présente formellement comme suit. On considère une famille d'équations discrètes de Bellman dépendant d'un petit paramètre h

$$u(t+h, x) = \sup_{p \in X_h} \{u(x+hp) - hL(p)\}, \tag{8.7}$$

où X_h est une famille de réseaux dépendant de $h \in]0, 1[$ dans X.

En développant $u(x+hp)$ en série de Taylor par rapport au petit paramètre h et en portant $u(t, x)$ dans le premier membre, on obtient à $O(h^2)$ près

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sup_{p \in X_0} \left\{ p \frac{\partial u}{\partial x} - L(p) \right\}$$

qui est l'équation continue de Bellman ou équation généralisée de Hamilton-Jacobi. D'autre part, s'agissant de l'équation discrète de Bellman avec second membre

$$u(t+h, x) = \max \{ \sup_{p \in X_h} \{u(t, x+hp) + hL(p)\}, \quad \mathscr{F}_h(x, t) \}, \tag{8.8}$$

où $\mathscr{F}_h(x, t)$ est une famille à un paramètre de fonctions continues, ce passage à une équation différentielle n'est plus possible, puisque $u(x, t)$ ne peut plus être passée dans le premier membre. Cependant, le principe de Duhamel nous permet de ramener l'intégration de l'équation (8.8) à celle de l'équation (8.5), de prouver l'existence de la limite de la solution et de ramener ainsi le problème à la résolution du problème de Cauchy pour l'équation généralisée de Hamilton-Jacobi.

Dans le cas général nous devons naturellement postuler l'existence de la limite de la solution du problème de Cauchy pour le cas discret, d'une part, et la convergence uniforme de la famille résolvante, de l'autre, et à partir de ces hypothèses établir le principe de Duhamel, l'existence et l'unicité de la solution de l'équation avec second membre.

Soit donc $l: C_0(\mathbf{R}) \to \mathscr{A}$ une mesure invariante par le groupe des translations. On appellera *schéma aux différences linéaire* sur $\mathbf{R}$ l'équation d'évolution non homogène

$$\varphi(t+h) = A^h(t)\varphi(t) \oplus \psi(t) \odot d^h l(t), \tag{8.9}$$

où $h>0$ est un paramètre appelé pas du schéma, $d^h l(t) = l(\chi^h(t))$, la mesure de la fonction caractéristique χ de l'intervalle $[t,\ t+h]$ et $A^h(t)$: $C_0(X) \to C_0(X)$ des opérateurs $\mathscr{A}$-linéaires définissant la famille résolvante $G^h(t_1, t) = A^h\left(t + \dfrac{t_1 - t}{h}\right) h \circ \ldots \circ A^h(t+h) \circ A^h(t)$ vérifiant la condition suivante de convergence uniforme pour $h \to 0$: pour tout $t_1 \in \mathbf{R}$ et toute suite $\{\psi_n\}$ de fonctions $\psi_h: X \times [0,\ t_1[\to \mathscr{A}$ convergeant uniformément vers une fonction $\psi_0: X \times [0,\ t_1[\to \mathscr{A}$, la famille $\{\varphi_n^h\}$ de fonctions $\varphi_n^h(x,t) = G^h(t_1, t)\psi_n(x,t)$ converge uniformément sur $X \times [0,\ t_1[$ vers une fonction $\varphi_0^*(x,t)$ lorsque $n \to \infty$ et $h \to 0$:

$$\sup_{x \in X} \rho(\psi_h(x,t), \psi_0(x,t)) \to \Rightarrow \sup \rho(\varphi_n^h(x,t), \varphi_0(x,t)) \to 0, \qquad t \in [0, t_1[$$

pour $n \to \infty$, $h \to 0$.

Le principe de Duhamel se généralise comme suit.

Théorème 8.2. *Soit $\varphi_0(x,t)$ la limite pour $h \to 0$ de la solution $\varphi^h(x,t)$ de l'équation homogène $\varphi(t+h) = L^h(t)\varphi(t)$ avec la condition initiale $\varphi^h(0,x) = \varphi_0(x)$, et soit $\psi(x,t)$ la limite uniforme des fonctions en escalier $\psi_m(x,t) = \bigoplus_{n=0}^{[t_1/h]} \chi^h(nh,t) \odot \psi(x, n/m)$, où $\chi^h(t_0,t) = \mathbb{1}$ si $t \in [t_0, t_0+h]$ et $\mathbb{0}$ sinon. Dans ces conditions la limite pour $h \to 0$ de la solution du schéma aux différences (8.9) qui vérifie la condition initiale $\varphi_0(x)$ peut être représentée par*

$$\varphi(t_1) = \varphi_0(t_1) \oplus \overset{\oplus}{\int_{[0, t_1[}} \psi_t(t_1) \odot dl(t), \tag{8.10}$$

où $\psi_t(x, t_1)$ est la solution de l'équation homogène vérifiant la condition initiale $\psi_t(x,t) = \psi(t)$.

Démonstration. Mettons la solution du schéma aux différences (8.10) vérifiant les conditions initiales φ_0 sous la forme:

$$\varphi^h(t_1) = \varphi_0^h(t_1) + \sum_{h=0}^{[t_1/h]} G^h(t_1, nh)\psi(nh) \odot d^h(t).$$

En vertu de la continuité uniforme

$$G^h(t_1, nh) \cdot \psi(nh) \to G(t_1, t) \cdot \psi(t)$$

pour $h \to 0$ et $nh \to t$. Considérons la fonction en escalier ψ_t^h de $t \in [0,\ t_1[$:

$$\psi_{t_1}^h = \bigoplus_{h=0}^{[t_1/h]} \chi^h(nh, t) \odot G^h(t_1, nh) \cdot \psi(nh)$$

qui converge uniformément vers $\theta(t_1) = G(t_1, t) \cdot \psi(t)$. On a

$$l(\psi^h) = \sum_{n=0}^{[t_1/h]} G^h(t_1, nh)\, \psi(nh) \odot d^h l(t) \to l(\theta) = \int_{]0, t_1]}^{\oplus} G(t_1, t)\, \psi(t)\, dl(t)$$

puisque la mesure l est uniformément continue. Donc

$$\varphi^h(t_1) = \varphi_0^h(t_1) + l(\theta^h) \to \varphi_0(t_1) \oplus \int_{]0, t_1]}^{\oplus} G(t_1, t) \cdot \psi(t)\, dl(t).$$

C.Q.F.D.

Considérons l'équation stationnaire

$$\varphi(t+h) = A_h \varphi(t) \oplus \psi \odot d_h l,$$

où $\psi \in C_0(X)$ est une fonction $X \to \mathscr{A}$ indépendante de t.

On s'intéressera à la solution stationnaire $\varphi: X \to \mathscr{A}$ qui satisfait l'équation algébrique

$$\varphi = A_h \varphi \oplus \psi \odot d_h l.$$

Il est naturel de chercher la solution de cette équation comme la limite pour $t_1 \to \infty$ de la solution

$$\varphi(t_1) = \int_{]0, t_1]}^{\oplus} G(t_1 - t)\, \varphi(t)\, dl(t)$$

en imposant la condition suivante au comportement asymptotique des opérateurs résolvants: $G_h(t_1 - t_0) = A_h^{[(t_1 - t_0)/h]}$.

Théorème 8.3. *Supposons que pour toute suite $\{\varphi_m\}$ convergeant uniformément vers φ, la famille de fonctions $\{A_h^n \varphi_m\}$ converge uniformément aussi par rapport à $h \leqslant h_0$ lorsque $n, m \to \infty$, c'est-à-dire que pour tout ε on peut exhiber un N tel que*

$$\sup_{h \leqslant h_0} \rho(A_h^n \varphi_m), A_h^{n'} \varphi_{m'} < \varepsilon \qquad \textit{pour} \qquad n, n', m, m' < N$$

et de plus que la somme $S_{hm}^N = \bigoplus_{n=0}^{N} A_h^n \varphi_m$ converge aussi uniformément par rapport à h:

$$\sup \rho(S_{hm}^N, S_{hm}^M) \to 0 \qquad \textit{pour } N, M, n, m \to 0.$$

Alors

$$\lim_{t_1 \to \infty} \int_{]0, t_1]}^{\oplus} G(t)\, \varphi\, dl(t) \overset{\text{déf}}{=} \int_{]0, \infty]}^{\oplus} G(t)\, \varphi\, dl(t).$$

Démonstration. Figeons ε et supposons que N, M, n et m sont tels que

$$\sup_{h \leqslant h_0} \rho(S_{hm}^N, S_{hm}^M) < \varepsilon/3,$$

où $\varphi_n = \varphi = \varphi_m$. En passant à la limite pour $h \to 0$ dans les sommes intégrales S_h^N et S_h^M, on obtient

$$\rho(S^{t_1}, S^{t_2}) \leqslant \rho(S^{t_1}, S_h^{N_1}) + \rho(S_h^{N_1}, S^{t_2}) \leqslant$$

$$\leqslant \rho(S^{t_1}, S_h^{N_1}) + \rho(S_h^{N_1}, S_h^{N_2}) + \rho(S_h^{N_2}, S^{t_2}) \leqslant \varepsilon,$$

si

$$\rho(S^{t_1}, S_h^{N_1}) \leqslant \varepsilon/3, \quad \rho(S^{t_2}, S_h^{N_2}) \leqslant \varepsilon/3,$$

où S^{t_1} et S^{t_2} sont les limites pour $h \to 0$ des sommes intégrales $S_h^{N_1}$ et $S_h^{N_2}$ pour $N_1 = [t_1/h]$ et $N_2 = [t_2/h]$. Donc la suite d'intégrales

$$S^{t_N} = \overset{\oplus}{\int_{]0, t_N]}} G(t)\, \varphi\, dl(t),$$

où $t_N = hN$ est fondamentale, c'est-à-dire qu'existe la limite $S = \lim_{n \to \infty} S^t$. C.Q.F.D.

§ 9. Alternative de Fredholm

1. Soit $\mathscr{L}$ l'espace des fonctions majorées $v: X \to \mathbf{R}$ induisant les mesures idempotentes $\mu(A) = \sup_{x \in A} v(x)$ sur une tribu $\mathfrak{A}$, et soit M l'ensemble des fonctions bornées semi-mesurables inférieurement $f: X \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ pour lesquelles existe l'intégrale idempotente de Lebesgue $(f, v) = \overset{\oplus}{\int} f(x)\, \mu(dx)$ en vertu du théorème 5.1.

Munissons $\mathscr{L}$ de l'équivalence $v_1 \simeq v_2 \Leftrightarrow (f, v_1) = (f, v_2)$, $\forall f \in M$.

Théorème 9.1. *L'équivalence définie sur $\mathscr{L}$ est une congruence pour la structure de semi-module de $\mathscr{L}$.*

Démonstration. En effet, si $v_1 \simeq v_2$, alors $av_1 \simeq av_2$ pour tout $a \in \mathscr{A}$, puisque $(f, av_1) = (af, v_1) = (af, v_2) = (f, av_2)$. On vérifie de façon analogue que si $v_1 \simeq v_1'$, $v_2 \simeq v_2'$, alors $v_1 \oplus v_2 \simeq v_1' \oplus v_2'$.

Signalons que ce théorème est valable pour tout semi-module $\mathscr{L}$ de fonctions v à valeurs dans $\mathscr{A}$ et pour son dual, i.e. le semi-module M des homomorphismes f: $\mathscr{L} \to \mathscr{A}$ pour le produit scalaire $(f, v) \overset{\text{déf}}{=} f(v)$. Ceci étant, toute congruence sur $\mathscr{L}$ est définie par le semi-module dual M des homomorphismes tels que $v_1 \simeq v_2 \Rightarrow f(v_1) = f(v_2)$.

2. Considérons l'équation $Tu = v$ dans $\mathscr{L}$. L'ensemble de ses solutions, lorsque v parcourt $\mathscr{L}$, forme un semi-module quotient pour la congruence $u_1 \simeq u_2 \Leftrightarrow Tu_1 = Tu_2$ induite par l'adjoint T^* de T sur le semi-module dual $M = T^* \mathscr{L}^*$.

En effet, si $Tu_1 = v = Tu_2$, alors $(T^* g)(u_1) = g(Tu_1) = g(Tu_2) = (T^* g)(u_2)$ pour tout $g \in \mathscr{L}^*$, c'est-à-dire que $f(u_1) = f(u_2)$ pour tout $f \in T^* \mathscr{L}^*$. Inversement, si $f(u_1) = f(u_2)$ pour tout $f \in T^* \mathscr{L}^*$, alors $Tu_1 = Tu_2$, autrement dit u_1 et u_2 sont des solutions de l'équation $Tu = v$ avec un même second membre. Nous avons ainsi prouvé le

Théorème 9.2. *Soit $M = T^* \mathscr{L}^*$ l'ensemble des valeurs de l'opérateur T^*, autrement dit l'équation $T^* g = f$ admet une solution pour tout $f \in M$. Alors l'équation $Tu = v$ admet une solution unique à la congruence près.*

La réciproque est vraie si l'espace M satisfait la condition subsidiaire suivante. On dira qu'un semi-module dual M est *complètement séparé* pour la congruence $\simeq$ si pour tout sous-espace propre $M_1 \subset M$, on peut exhiber des éléments $u_1, u_2 \in \mathscr{L}$ non équivalents (mod M) tels que $f(u_1) = f(u_2)$, $\forall f \in M_1$.

Théorème 9.3. *Supposons que l'équation $Tu = v$ admet une solution unique à l'équivalence près définie sur un semi-module complètement séparé M. Alors $T^* \mathscr{L}^* = M$, c'est-à-dire que l'équation $T^* g = f$ admet une solution pour tout $f \in M$.*

Démonstration. Soit $Tu_1 = v = Tu_2$, c'est-à-dire que

$$T^* g(u_1) = gT(u_1) = gT(u_2) = T^* g(u_2), \qquad \forall g \in \mathscr{L}^*.$$

Alors $u_1 \simeq u_2$ (mod M) par hypothèse, c'est-à-dire que $T^* g \subset M$ pour tout $g \in \mathscr{L}^*$ et par suite $T^* \mathscr{L}^* \subseteq M$. Montrons que $T^* \mathscr{L}^* = M$. Pour cela il suffit de s'assurer que $T^* \mathscr{L}^* \supseteq M$. Supposons par absurde que $T^* \mathscr{L}^* \subset M$. En vertu de la condition de séparation complète de M, il existe alors $u_1 \not\simeq u_2$ tels que $(T^* g, u_1) = (T^* g, u_2)$ pour tous les $g \in \mathscr{L}^*$. Or, il s'ensuit de là que $Tu_1 = Tu_2$, puisque $g \in \mathscr{L}^*$ est arbitraire, c'est-à-dire la non-unicité de la solution de l'équation $Tu = v$. Ce qui est contraire à l'hypothèse.

§ 10. Equation de Bellman discrète généralisée pour X fini

Soit $X = \{1, \ldots, n\}$ un ensemble fini muni d'une topologie discrète. Alors les fonctions continues $\varphi : X \to \mathscr{A}$ peuvent être identifiées à des vecteurs $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathscr{A}^X$ de composantes arbitraires $a_i \in \mathscr{A}$. Le théorème suivant établit la forme générale de toute fonctionnelle (mesure) et de tout opérateur (endomorphisme) du semi-module $\mathscr{A}^X$ dans lui-même.

Théorème 10.1. *Tout homomorphisme (fonctionnelle) $m : \mathscr{A}^X \to \mathscr{A}$ est de la forme $m(a) = m^1 \odot a_1 \oplus \ldots \oplus m^n \odot a_n$, où m^i sont des éléments arbitraires du semi-anneau $\mathscr{A}$.*

Démonstration. Mettons le vecteur a sous la forme $a = a_1 \odot e^1 \oplus \ldots \ldots \oplus a_n \odot e^n$, où e^i sont des colonnes dont toutes les composantes sont nulles à l'exception de la composante i qui est égale à 1. La propriété de linéarité nous donne

$$\mu(a) = a_1 \odot \mu(e^1) \oplus \ldots \oplus a_n \odot (e^n). \qquad (*)$$

En posant $\mu(e^i) = m^i$, on obtient la représentation cherchée. Réciproquement, si m^i sont des éléments quelconques du semi-anneau $\mathscr{A}$, la combinaison $(*)$ est visiblement associée à une mesure sur $C_0(X) = \mathscr{A}^X$.

Corollaire. *Tout endomorphisme* G: $\mathscr{A}^X \to \mathscr{A}^X$ *est de la forme*:

$$G(a)_i = g_i^1 \odot a_1 \oplus \ldots \oplus g_i^n \odot a_n, \quad i = 1, \ldots, n,$$

où g_i^j sont des éléments arbitraires de $\mathscr{A}$. On obtient cette «représentation source» en appliquant le théorème de représentation de la mesure μ sur $\mathscr{A}^*$ à chaque composante de $G(a)_i$.

On appelle *équation de Bellman discrète* l'équation d'évolution à temps discret, définie par les opérateurs

$$L_t: C_0^{\mathscr{A}}(X) \to C_0(X), \quad \varphi_{t+1} = L_t \varphi_t, \quad t = 0, 1, \ldots \tag{10.1}$$

En se servant des éléments matriciels généralisés $\lambda_t^{x_0}(x)$ de l'opérateur L_t, on peut mettre cette équation sous la forme intégrale:

$$\varphi_{t+1}(x_0) = \int \lambda_t^{x_0}(x) \odot \varphi_t(x)\, m(dx)$$

ou, si l'ensemble X est fini, sous la forme matricielle

$$a_{i,\,t+1} = l_{i,t}^1 \odot a_{1,\,t} \oplus \ldots \oplus l_{i,t}^n \odot a_{n,\,t}.$$

Sa solution peut être mise sous la forme $\varphi_t = G_t(t_0) \cdot \varphi_{t_0}$ à l'aide de l'opérateur

$$G_t(t_0) = L_{t-1} \circ \ldots \circ L_{t_0+1} \circ L_{t_0}.$$

Exemples. 1. Considérons le cas où $\mathscr{A} = \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, $a \oplus b = \max\{a, b\}$, $a \odot b = a + b$, $\mathbb{0} = -\infty$ et $\mathbb{1} = 0$.

Soit $m(\varphi) = \sup \varphi(x) = \max \varphi(x)$ une mesure positive sur φ définissant le produit scalaire

$$(\varphi, \psi)_m = \max_x \{\varphi(x) + \psi(x)\}.$$

Il est évident que la condition de linéarité de la fonctionnelle m est remplie:

$$m(\max\{a + \varphi, b + \psi\}) = \sup \max\{a + \varphi, b + \psi\} =$$
$$= \max\{a + \sup \varphi(x), b + \sup \psi(x)\}.$$

Ceci entraîne la linéarité pour les opérations de semi-groupe de l'opérateur générateur L de l'équation de Bellman ordinaire en temps discret

$$\varphi_{t+1}(p) = \sup_x \{\varphi_t(x) + \lambda_t^p(x)\},$$

où $\{l_t^p\}$ est une famille de fonctionnelles linéaires

$$l_t^p(\varphi) \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_x (\varphi(x) + \lambda_t^p(x)).$$

2. Considérons le semi-anneau $\mathscr{A} = \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$, $a \oplus b = \max\{a, b\}$, $a \odot b = \min\{a, b\}$, $\mathbb{0} = -\infty$ et $\mathbb{1} = +\infty$. Soit $m(\varphi) = \sup \varphi(x) = \max \varphi(x)$ une mesure positive dont la linéarité se vérifie immédiatement:

$$m(\max\{\min\{a, \varphi\}, \min\{b, \psi\}\}) =$$
$$= \sup_x (\max\{\min\{a, \varphi(x)\}, \min\{b, \psi(x)\}\}) =$$

$$= \max \{\min \{a, \sup_x \varphi(x)\}, \min \{b, \sup_x \psi(x)\}\} =$$

$$= \max \{\min \{a, m(\varphi)\}, \min \{b, m(\varphi)\}\}.$$

Ecrivons maintenant le produit scalaire en utilisant la mesure m:

$$\sup_x \min \{\varphi(x), \psi(x)\} = (\varphi, \psi)_m.$$

En portant dans ce produit $\psi(x) = \lambda_t^p(x)$, où $\lambda_t^p(x)$ est le noyau de l'équation d'évolution

$$\varphi_{t+1}(p) = \sup_x \min \{\varphi_t(x), \lambda_t^p(x)\},$$

on constate que cette équation de Bellman « minimax » est aussi linéaire dans l'espace considéré.

L'équation d'évolution (10.1) sur les semi-anneaux des exemples 1 et 2 est généralement traitée dans les problèmes d'optimisation de mathématiques discrètes comme une équation décrivant un processus évolutif en milieu discret.

INDEX ALPHABÉTIQUE DES MATIÈRES

Accouplement d'espaces 333
Adhérence 166
Algèbre 163
– abélienne (ou commutative) 164
– de BANACH 211
– Λ_0-asymptotique 155
– de LIE nilpotente 119
– normée 210
– de POISSON 151
– topologique 210
– – à μ-structure 52
– unitaire 164
Alternative de FREDHOLM 700
Amplitude 478
Application canonique 486
– contractante 207
– dissipative 486
– semi-linéaire 194
Atlas pondéré 588
Axiome de correspondance 43, 53
– d'écartement des indices 43, 53
– d'homogénéité 42, 53
– du paramètre 122.
– du produit 43, 54
– de la somme 43, 53
– d'unicité 122
– du zéro 43, 54

Base orthonormée 179
Bicaractéristique d'un opérateur 139
Bidual 183
Boule fermée 166
– ouverte 166

Centre de JORDAN 62
Champ de vecteurs eulérien 152
Coefficients de FOURIER 178
Combinaison linéaire 168
Compact 167
Complété de S 216
Condition(s) d'absorption 141, 632
– – globales 631
– d'asymptoticité 156
– de dissipation 496
– d'incompatibilité d'un spectre 474
– de quantification 160
Convergence forte 184
Crochet autonome 30
– de LAGRANGE 484
– de POISSON 152

Décomposition spectrale 39
Dérivée de FRÉCHET 206
– partielle 202, 221
Développement en série de NEWTON 48
Différentielle d'une application 206
Dissipation 484
Distance 166, 176
Distributions 214
– propres 312

Echelle de BANACH 322
Egalité de PARSEVAL 215, 250
Elément associé 285

– propre 285
– p.a. 287
– quasi inversible 115, 628
– Δ-quasi inversible 629
Ensemble absorbant 167
– arrondi 167
– convexe 163, 167
– de définition 185
– fermé 166
– générateur 307
– intégrable 690
– localement négligeable 690
– mesurable 690
– ouvert 166
– quarrable 202
– résolvant 50
– symétrique 167
– de valeurs 185
Enthalpie 485
Enveloppe convexe 163
– linéaire 163
– supérieure 674
ε-réseau 167, 681
Equation de BELLMAN discrète 701
– des bicaractéristiques 137
– de BÜRGERS 652
– des caractéristiques 137
d'évolution 204
– du germe 146
– de HAMILTON-JACOBI 137
– – – à dissipation 480, 484
– – – pour l'oscillateur 91
– des ondes 75
– de SCHRÖDINGER 92
– de transport 565
– – à dissipation 525, 526
Espace de BANACH 166
– – intermédiaire 252
– complet 166
– à dimension dénombrable 179
– des fonctions BOCHNER-intégrables 203
– hilbertien 173
– métrique 166
– – compact 167
– normé séparable 179
– préhilbertien 172
– quotient 171
– reflexif 183
– de SOBOLEV 214, 217
– vectoriel 162
– – complexe 162
– – normé 166
– – réel 163

Famille de bicaractéristiques 631
– bornée 603
– dissipative 502
– totale 182
Fermeture d'un opérateur 188, 668
Fonction(s) asymptotiquement quasi homogène 138
– δ_ξ de DIRAC 222, 233
– de carré intégrable 170
– de HAMILTON 138
– discontinues 214
– élémentaire 682
– mesurable inférieurement 681
– ρ-quasi homogène 138
– semi-mesurables inférieurement 670, 681
– simple 682
– subordonnée 138
Fonctionnelle cylindrique 458
– linéaire 180
– – bornée 180
– – continue 180
– simple 458
Formule de changement des indices 45
– de commutation 33, 378
– , K- 46
Front d'onde 131

γ-atlas 497
γ-carte 497
γ-admissible 585
γ-difféomorphisme 497
γ-domaine 497
γ-réaccord de phase 499
Générateur 246, 258, 322

Germe complexe 485
– dissipatif 500, 501
Graphe d'un opérateur 189
Groupe commutatif 162
– $GL(B)$ 193
– de HEISENBERG 62
– de translation 277

Hamiltonien 33, 130, 137, 161, 514
Homomorphisme 185

Idéal 212
– à droite 165
– à gauche 165
Indice d'une classe 581
Inégalité de BESSEL 178
– de CAUCHY-BOUNIAKOVSKI 172
– de dissipation 146, 147, 502
– de GÅRDING 482
Intégrale d'une fonction élémentaire 684
– – mesurable inférieurement 685
– – simple 684
Isomorphisme 165
– isométrique 168

Lemme de FATOU 690
– du tonneau 167
Limite d'une fonction 202

μ-action 495
Monôme principal 541
Multiplication 162
Multiplicité d'un point du spectre 38

Norme 166
– d'une fonctionnelle 180
– de HILBERT-SCHMIDT 194
– d'un opérateur 185
Noyau d'un opérateur 197

Opérateur(s) 28, 42
– adjoint 194, 199
– auto-adjoint (hermitien) 200
– borné 185
– compact 192
– continu 185
– D-asymptotique 542
– dégénéré 192
– de dérivation 16
– discret 285
– équivalents 386
essentiellement auto-adjoint 200
– étalon 129
– fermé 187
– de HILBERT 278
– inversible 193, 197
– linéaire 185
– nul 196
– des ondes 75
– pseudo-différentiel 55, 357
– quasi identique 542
– quasi inversible 109
– – à droite 129
– – à gauche 129
– réciproque 193, 197
– régulier 309
– de SCHMIDT 317
– de translation 22
– unité 196
– vectoriel 323
Opération binaire 162
– de contournement 514
– prime 31
Ordre d'une série 540
Orthocomplément 178

Partie essentielle d'une fonction 138
– – d'une matrice 629
– principale d'une matrice 629
– supérieure d'une fonction 138

$\mathscr{P}$-fonction 525
Poids spectral 350
– – subordonné 350
Point central 581
– C-lagrangien 570
– essentiel 584
– focal 103, 514
– non singulier 519
– – – initial 138
d'une résolvante 336, 344
Potentiel 485
Principe de DUHAMEL 694
Problème de Λ_0-quasi-inversion 158
Produit de convolution 326, 327, 693
– d'opérateurs 196
– scalaire 172, 662
Projection 177, 674
Prolongement d'un opérateur 187

Quasi-valeur propre 194

Recouvrement 167
– admissible 581
Redressement des conditions initiales 115
Régulateur d'un problème 76, 84
Relation d'anticommutation 58, 61
– de commutation 61
– – perturbée 62
– de JORDAN 62
Représentation(s) asymptotique 84
– – de l'algèbre de POISSON 156
– droite 121
– gauche 121
– d'un opérateur 118
– ordonnées 58
– – droite 121
– – gauche 121
Réseau, ε- 167
– inférieur 682
– supérieur 682
Résolvante d'un ensemble 308
– d'un opérateur 193, 283
Rotation d'un jacobien 579

S-action 484
Schéma aux différences linéaire 697
Semi-groupe additif 454
– multiplicatif 455
Série D-asymptotique 540
– entière formelle 164
– h-asymptotique 540
– localement asymptotique 541
Solution asymptotique pour la différentiabilité 67
– généralisée 655
Somme directe orthogonale 178
– d'opérateurs 196
Sous-ensemble C-lagrangien 570
Sous-système 165
Spectre 38
– d'un couple 29, 336
– – ordonné 39
– d'un ensemble générateur 309
– incompatible 474
– d'une matrice 41
– d'un opérateur 193, 283, 344
– quotient 386
Structure de groupe 162
Subhamiltonien 161
Suite(s), δ- 234
– équivalentes 168
– faiblement bornée 184
– – convergente 184
– – fondamentale 184
– fondamentale 166
– quasi inverse à droite 116
– – à gauche 116
– stationnaire 168
Support d'une fonctionnelle 324
Symbole 42
– d'une application 19
– d'un opérateur 17, 260, 308
– subprincipal 161
Système algébrique 165
– complet 314
– dissipatif 481
– de HAMILTON 80
– orthonormé 178
– – complet 179
– des p.a.-distributions 314

Théorème de BAIRE 167
– de BANACH 190
– de BANACH-STEINHAUS 192
– du graphe fermé 191
– de HAHN-BANACH 180
– d'immersion 227, 228
– de LIOUVILLE 489
– de la moyenne 207
– du parallélogramme 174
– du point fixe 207
– du produit 45
– de quasi inversibilité 142
– de F. RIESZ 182
– de la somme, deuxième 44
– –, premier 44
Tonneau 167
T-produit 398, 455
Trajectoires 458
– discrètes 477
– d'un système hamiltonien 92
Transformation de FOURIER 215, 216, 223, 224, 330, 334
– – inverse 215
– de FOURIER-LEGENDRE 693
Type d'un opérateur 525

Unité généralisée 653

Valeur propre d'un opérateur 194
Variété *C*-lagrangienne 578
– lagrangienne 484
– linéaire 163
– subordonnée 593
– symplectique 153
– – d'une algèbre de POISSON 160
– – quantifiée 160
Vecteurs équivalents 171
– orthogonaux 174

Zéro généralisé 653
Zone *I*-ième 492
– non singulière 492

À NOS LECTEURS

Les Editions Mir vous seraient très reconnaissantes de bien vouloir leur communiquer votre opinion sur le contenu de ce livre, sa traduction et sa présentation, ainsi que toute autre suggestion.

Notre adresse:
2, Pervi Rijski péréoulok,
Moscou, I-110, GSP, U.R.S.S.

Imprimé en Yougoslavie

SINGULARITÉS DES APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES (en deux parties)

par V. Arnold, A. Vartchenko, S. Goussein-Zadé

I. Classification des points critiques, des caustiques et des fronts d'onde

La théorie des singularités des applications différentiables est un domaine en pleine expansion des mathématiques contemporaines. Résultant d'une ample généralisation de l'étude des maxima et minima des fonctions, elle admet de multiples applications en mathématiques, sciences de la nature, technique (théories dites des bifurcations et des catastrophes). Ce livre est le premier tome d'une importante monographie dont la seconde partie est consacrée aux aspects algébriques et topologiques de cette théorie.

S'adresse aux chercheurs et étudiants post-universitaires en mathématiques, ainsi qu'aux spécialistes en mécanique, physique, technique, etc., intéressés par la théorie des singularités des applications différentiables.

SINGULARITÉS DES APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES (en deux parties)

par V. Arnold, A. Vartchenko, S. Goussein-Zadé

II. Monodromie et comportement asymptotique des intégrales

Faisant suite à la première partie de l'ouvrage, intitulée *Singularités des applications différentiables*. I. *Classification des points critiques, des caustiques et des fronts d'onde*, la seconde partie met l'accent sur la structure des singularités, décrit les familles d'hypersurfaces complexes, le comportement asymptotique des intégrales dans les méthodes de la phase stationnaire et du point selle en dimension >1, ainsi que des applications des méthodes de géométrie algébrique à l'étude des points critiques des fonctions.

S'adresse aux chercheurs et étudiants post-universitaires en mathématiques, ainsi qu'aux spécialistes en mécanique, physique, technique, etc., intéressés par la théorie des singularités des applications différentiables.

PRÉCIS D'ANALYSE FONCTIONNELLE

par L. Lusternik, V. Sobolev

L'ouvrage expose les éléments d'analyse, d'algèbre, de topologie. Il étudie les opérateurs linéaires, les fonctionnelles linéaires, les opérateurs compacts et les équations faisant intervenir ces derniers. Sont présentés les éléments de calcul différentiel et intégral dans des espaces vectoriels normés ainsi que les éléments de théorie spectrale, des opérateurs hermitiens bornés dans l'espace de Hilbert. Se caractérise par un haut niveau scientifique et méthodique, contient un grand nombre de problèmes d'application et d'exemples intéressants.

S'adresse aux étudiants des universités.

ÉLÉMENTS DE SIMULATION ET TRAITEMENT PRIMAIRE DES DONNÉES

par S. Aïvasian, I. Enioukov, L. Méchalkine

Cet ouvrage est consacré aux méthodes d'analyse statistique primaire des données, à la construction d'un modèle simulant l'événement caractérisé par ces données. Il expose les éléments de théorie des probabilités et de statistique mathématique et étudie les problèmes concernant la réalisation de ces méthodes sur ordinateur. Contient de nombreux résultats originaux.

Pour les statisticiens, les économistes, les mathématiciens et tous ceux qui utilisent les méthodes de traitement statistique des données.